

ELECTROMAGNETISMO & ÓPTICA

MECivil+LEGM

9º Conjunto de problemas

1. *Vector de Poynting e Energia numa onda Electromagnética*

Num fio de 2 m de comprimento e secção circular com 1 mm de raio passam 5 A. O fio é homogéneo com condutividade eléctrica $\sigma_C = 1.592 \times 10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$.

- a) Calcule o campo magnético \mathbf{B} à superfície do fio. [R: $\mathbf{B} = 0,001 \mathbf{e}_\phi$ (T)]
- b) Calcule a resistência do fio. [R: $R = 0,4 \Omega$]
- c) Calcule o campo eléctrico \mathbf{E} à superfície do fio. [R: $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z$ (V/m)]
- d) Calcule o vector de Poynting $\mathbf{\Sigma}$ junto ao fio. [R: $\mathbf{\Sigma} = -795,8 \mathbf{e}_R \text{ W/m}^2$]
- e) Calcule, usando o resultado anterior, a energia de radiação trocada entre o fio e o exterior por unidade de tempo. Para onde vai essa energia? [R: $P = 10 \text{ W}$]
- f) Calcule a potência dissipada no fio por efeito de Joule (calor de Joule). [R: 10 W]

2. *Ondas electromagnéticas e Polarização* (Probl.203 {apoio})

Uma onda electromagnética plana e monocromática, propaga-se num meio de constantes eléctricas e magnéticas relativas $\epsilon_r = 4$ e $\mu_r = 1$, e possui um campo eléctrico dado por:

$$\mathbf{E}(z,t) = 200 \cos\left(6 \times 10^6 t - kz + \frac{\pi}{3}\right) \mathbf{e}_y \text{ (V / m)}$$

- a) Caracterize o estado de polarização desta onda e determine a velocidade de propagação e o vector de onda. [R: linear, 90° com \mathbf{e}_x ; $v = 1,5 \times 10^8 \text{ m/s}$, $\mathbf{k} = 0,04 \mathbf{e}_z \text{ m}^{-1}$].
- b) Determine o campo de indução magnética (\mathbf{B}).
[R: $\mathbf{B}(z,t) = 1,33 \times 10^{-6} \cos(6 \times 10^6 t - 0,04z - 2\pi/3) \mathbf{e}_x$ (T)]
- c) Determine o valor médio da densidade de energia electromagnética transportada por esta onda e a sua intensidade. [R: $u_{EM} = u_E + u_M = 0,71 \mu\text{J/m}^3$, $I = 106,1 \text{ W/m}^2$]
- d) Supondo que esta onda incide segundo um ângulo de 60° relativamente à normal a uma superfície plana, determine o valor médio da energia por unidade de tempo que incide numa superfície de área $S = 20 \text{ m}^2$. [R: $1,06 \text{ kW}$]

3. Ondas electromagnéticas e Polarização

Uma onda plana electromagnética propaga-se num meio dieléctrico com permeabilidade magnética $\mu=\mu_0$, tendo a seguinte expressão para o campo eléctrico:

$$\begin{aligned}E_x &= 0 \\E_y &= -\frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - k \frac{y+z}{\sqrt{2}} \right) \\E_z &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - k \frac{y+z}{\sqrt{2}} \right)\end{aligned}$$

onde $E_0 = 900 \text{ V/m}$, $\omega = 3,768 \times 10^{15} \text{ rad/s}$ e $|k| = 1,257 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$.

- Determine as expressões correspondentes para o Campo Magnético (**H**).
- Qual o comprimento de onda, a direcção, e o sentido da propagação da onda (vector **k** num sistema de eixos (x,y,z)). Verifique que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, e que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$.
- Qual a velocidade de propagação da onda no meio (fracção de velocidade da luz, c) e qual o valor da constante dieléctrica do meio? [R: c , ϵ_0]
- Quando esta onda incide perpendicularmente a um painel solar com 2 m^2 de área, qual a potência (média!) nele incidente? [R: $2,15 \text{ kW}$]
- Caracterize a polarização da onda (circular direita ou esquerda, ou linear a XX graus com os eixos). [R: linear a 45° com \mathbf{e}_z e a 135° com \mathbf{e}_y]

4. Ondas electromagnéticas e Polarização

Uma onda plana electromagnética propaga-se num meio dieléctrico com permeabilidade magnética $\mu=\mu_0$, tendo a seguinte expressão para o campo eléctrico:

$$\begin{aligned}E_x &= E_0 \sin(\omega t - ky) \\E_y &= 0 \\E_z &= E_0 \cos(\omega t - ky)\end{aligned}$$

onde $E_0 = 4 \times 10^{-9} \text{ V/m}$, $\omega = 5 \times 10^5 \text{ rad/s}$ e $|k| = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$.

- Determine as expressões correspondentes para o Campo Magnético (**H**).
- Qual a direcção e sentido da propagação da onda (vector **k** num sistema de eixos (x,y,z)). Verifique que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, e que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0$.
- Qual a velocidade de propagação da onda no meio (fracção de velocidade da luz, c)? [R: $5/6 c$]
- Qual o comprimento de onda da onda? [R: $\pi \times 10^3 \text{ m}$]

- e) Caracterize a polarização da onda (circular direita ou esquerda, ou linear a XX graus com o eixo x (horizontal)). [R: circular direita]

5. Dispersão e velocidade de grupo

Um pulsar é uma estrela que emite pulsos de ondas electromagnéticas com variadas frequências, definidas com muita precisão. Estes pulsos viajam até à Terra directamente através do meio interstrelar. Observações radiotelescópicas de uma estrela pulsar mostram que o tempo de chegada de um pulso particular com frequência igual a 400 MHz é 700 ms depois de outro pulso com frequência igual a 1400 MHz. O índice de refração do meio interstrelar é dado por:

$$n = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2}} \cong 1 - \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m \omega^2}$$

em que $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ F/m, a massa do electrão tem o valor $m = 9,1 \times 10^{-31}$ Kg, a carga do electrão tem o valor $e = 1,602 \times 10^{-19}$ C, ω é a frequência angular da onda e N é a densidade de electrões do meio, neste caso aproximadamente uniforme entre a Terra e a estrela e dado por $N = 3 \times 10^4 \text{ m}^{-3}$.

- Determine o tempo que uma onda leva a chegar da estrela até nós, em função da distância D (Terra-Estrela) e da frequência angular da onda.
- Determine o intervalo de tempo entre dois pulsos em função da distância D e das frequências angulares de ambos os pulsos.
- Determine a distância da Terra à Estrela em anos-luz (1 ano-luz = 9.5×10^{15} m).

Note que a velocidade de grupo u não é a velocidade de fase (ou da onda) v , tendo-se antes a relação (com $n=c/v$):

$$u = c/(n + \omega \frac{dn}{d\omega})$$

$$[R: t(\omega) = \frac{D}{c} \left(1 + \frac{Ne^2}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega^2} \right); \Delta t = \frac{DNe^2}{2c\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2} \right); D = 3190 \text{ anos-luz.}]$$