

ELECTROMAGNETISMO & ÓPTICA

MEC/LEGM

10º Conjunto de problemas

1. Vector de Poynting e Intensidade em função da distância

Uma nave a 30 000 km da Terra possui um emissor de 10 W emitindo isotropicamente. Calcule o valor médio do vector de Poynting e o valor de pico do campo eléctrico à superfície da Terra (despreze a curvatura da Terra e considere o ar como tendo constante dielétrica ϵ_0). [R: $8,84 \times 10^{-16} \text{ W/m}^2$, $E_0 = 8,2 \times 10^{-7} \text{ (V/m)}$]

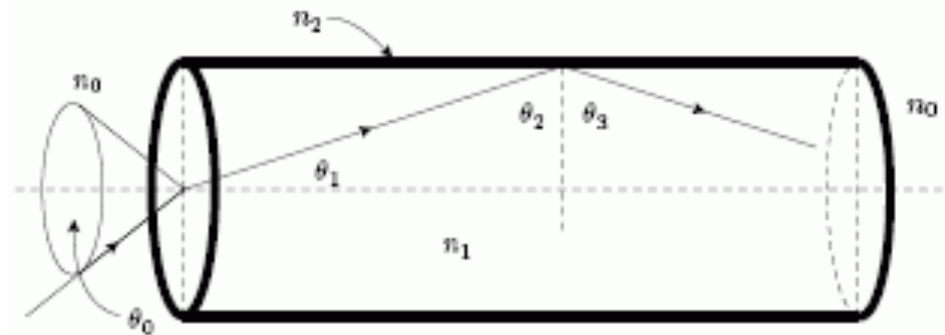
A intensidade da radiação solar na órbita da Terra é de aproximadamente $1,37 \text{ kW/m}^2$.

- a) Qual a potência total emitida pelo Sol, supondo que radia isotropicamente e que está à distância média de 149600000 km da Terra? [R: $3,85 \times 10^{26} \text{ W}$]
- b) Qual a potência total recebida pela Terra? [R: $1,75 \times 10^{17} \text{ W}$]

2. Transmissão e propagação em fibra óptica

Uma fibra óptica é constituída por um núcleo central de índice de refração n_1 , revestido por uma bainha de índice de refração $n_2 < n_1$, e está imersa num meio de índice de refração n_0 .

© Prof. Jorge Romão



- a) Designa-se por cone de aceitação duma fibra óptica, como o cone de semi-abertura angular A^{\max}_i com eixo coincidente com o eixo da fibra, tal que toda luz incidente na superfície de entrada da fibra dentro desse cone angular, permanece dentro da fibra e é por isso transmitido ao longo da fibra com um mínimo de perdas. Determine A^{\max}_i em função de n_0 , n_1 e n_2 .
[R: $A^{\max}_i = \theta_0^{\max} = \arcsen((n_1^2 - n_2^2)^{0,5} / n_0)$]
- b) Usando os valores de 1,0; 1,5; 1,4 respectivamente para os índices de refração dos meios incidente (ar), da parte central da fibra e da bainha, calcule o valor de A^{\max}_i . Suponha que agora se faz incidir luz com ângulo igual a esse valor, mas em que se insere tudo dentro de água (com $n=1,33$). Que acontece? Justifique.
[R: $32^\circ, 58'$; o cone de abertura é bastante mais pequeno, e portanto há luz transmitida para a coroa exterior; o ângulo com que incide na parede exterior

desta coroa (para a água) é inferior ao ângulo de reflexão total nessa transição da coroa para a água, e portanto a luz vai-se perdendo para fora da fibra.]

- c) Para se poder dar uma característica da fibra óptica independente do meio exterior, define-se **Abertura Numérica AN** por

$$AN = n_i \sin A_i^{\max}$$

Determine AN e mostre que só depende de n_1 e de n_2 . [R: $AN=(n_1^2-n_2^2)^{0,5}$]

- d) Considere luz no ar que incide na entrada desta fibra óptica com ângulo de incidência de 20° , e que está polarizada linearmente e perpendicular ao plano de incidência. Calcule a percentagem de energia transmitida por unidade de tempo através da fibra óptica, estando no ar, totalmente imersa na água, ou parcialmente imersa na água (por exemplo, imersa apenas na ponta de saída).
[R: 90,8%; 99,1%; 94,9%]

3. Ângulo de Reflexão Total, ângulo de Brewster e Fórmulas de Fresnel

Na superfície plana de um prisma com índice de refração $n = 2,07846$, faz-se incidir luz monocromática com a seguinte expressão para o campo eléctrico:

$$\begin{aligned} E_x &= +\frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \sin\left(5 \times 10^5 t - (x + y\sqrt{3}) \times 10^{-3}\right) \\ E_y &= -\frac{1}{2} E_0 \sin\left(5 \times 10^5 t - (x + y\sqrt{3}) \times 10^{-3}\right) \\ E_z &= 0 \end{aligned}$$

onde $E_0 = 10^{-9}$ V/m, \mathbf{e}_x é o versor segundo a normal à superfície com o sentido de fora para dentro, \mathbf{e}_y é o versor paralelo à superfície, no plano de incidência, com o sentido em que se afasta do vector de onda \mathbf{k}_i , e \mathbf{e}_z é o versor perpendicular ao plano de incidência com o sentido dado pelo produto externo $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$.

- a) Determine o índice de refração do meio contendo a onda incidente. [R: 1,2]
b) Calcule o ângulo de refração e o ângulo de reflexão, respectivamente para a onda transmitida e para a onda reflectida (se houver alguma destas). [R: $t=30^\circ$; não há onda reflectida ($i=60^\circ$ =ângulo de Brewster, e $E_z=0$)]
c) Determine a intensidade das ondas transmitida e reflectida (se houver alguma destas). [R: $9,19 \times 10^{-22}$ W/m²; não existe onda reflectida]
d) Determine as expressões para o campo eléctrico das ondas transmitida e reflectida (se houver alguma destas).
[R: não existe onda reflectida, e a onda transmitida é:

$$\begin{cases} E_x = \frac{1}{2} E_{0t} \sin \left(5 \times 10^5 t - \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} \right) 3 \times 10^{-3} \right) \\ E_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} E_{0t} \sin \left(5 \times 10^5 t - \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} \right) 3 \times 10^{-3} \right) \\ E_z = 0 \end{cases}$$

com $E_{0t} = 5,8 \times 10^{-10} \text{ V/m}$

- e) Repita a alínea b) para um novo valor do ângulo de incidência $A = 35^\circ, 2644$, para o caso em que a onda incide no prisma de fora para dentro, e para o caso em que a onda viaja no prisma e incide na superfície de dentro para fora.
[R: $t = 19^\circ, 47$ e $r = 35^\circ, 2644$; não existe onda transmitida e $r = 35^\circ, 2644$.]
- f) Repita a alínea c) para incidência normal.
[R: reflectida: $1,14 \times 10^{-22} \text{ W/m}^2$; transmitida: $1,476 \times 10^{-21} \text{ W/m}^2$.]

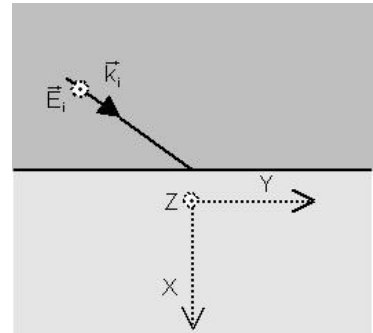
4. Propagação e Fórmulas de Fresnel

Uma onda electromagnética propaga-se com velocidade $v = 2c/3$ num meio com permeabilidade magnética $\mu = \mu_0$ e constante dielétrica ϵ , sendo o campo eléctrico (unidades em V/m) em função do tempo e do espaço dado pelas expressões (no sistema de eixos da figura):

$$E_x = 0$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = 10^{-6} \cos \left(2,9224 \times 10^{15} \cdot t - K \left(\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) \right)$$



- a) Calcule o vector de onda (K_x, K_y, K_z)_i e o índice de refacção n_1 do meio onde a onda se propaga (*sug.: comece por calcular o módulo do vector de onda, K*).
[R: $K = 1,462 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, $\mathbf{K} = K(0.5, 0.866, 0)$, $n_1 = 1,5$.]
- b) Suponha que esta onda atinge a superfície de separação (plano ZY) para um meio gasoso com índice de refacção $n_2 = 1,2$ no ponto $X=Y=Z=0$ (origem dos eixos).
- Determine o ângulo de incidência da onda nessa superfície. [R: $i = 60^\circ$]
 - Determine o ângulo de reflexão total e o ângulo de Brewster (ou de polarização). [R: $i_{RT} = 53^\circ, 13$; $i_B = 38^\circ, 66$]
 - Existe onda refractada e/ou reflectida? Para o(s) caso(s) em que exista, determine o(s) respectivo ângulo(s) de propagação (ângulo de refacção ou ângulo de reflexão), o(s) vector(es) de onda (k_x, k_y, k_z), e o valor(es)

máximo(s) do(s) vector(es) de Poynting para essa(s) onda(s).

[R: Não existe onda refractada. Para a onda reflectida, $r=60^\circ$, $\mathbf{k}=1,462 \times 10^7$
 $(-0,5\mathbf{e}_x+0,866\mathbf{e}_y)\text{m}^{-1}$, $\Sigma_{\text{MAX}}=3,98 \times 10^{-15} \text{ W/m}^2$]

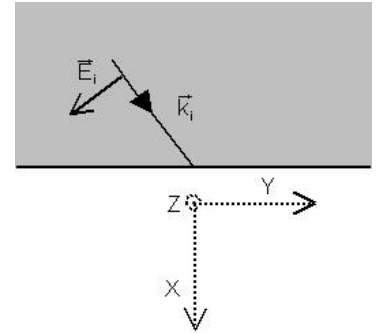
5. Propagação e Fórmulas de Fresnel

Uma onda electromagnética propaga-se num meio com permeabilidade magnética $\mu=\mu_0$ e constante dieléctrica ϵ , sendo o campo eléctrico (unidades de V/m) em função do tempo e do espaço dado pelas expressões:

$$E_x = 6 \times 10^{-8} \cos(2,3562 \times 10^{15} \cdot t - 1,0472 \times 10^7 \cdot (0,8x + 0,6y))$$

$$E_y = 8 \times 10^{-8} \cos(2,3562 \times 10^{15} \cdot t - 1,0472 \times 10^7 \cdot (0,8x + 0,6y) + \pi)$$

$$E_z = 0$$



- a) Calcule o vector de onda $(k_x, k_y, k_z)_i$, a velocidade de propagação da onda e o índice de refração do meio onde a onda se propaga.

[R: $\mathbf{k}=1,0472 \times 10^7 (0,8\mathbf{e}_x+0,6\mathbf{e}_y) [\text{m}^{-1}]$, $v=0,75c$, $n_i=n_l=1,3(3)$]

- b) Suponha que esta onda atinge a superfície de separação para o ar (com índice de refração $n \cong 1$), no ponto $X=Y=Z=0$ (origem dos eixos) e no instante $t=0$ s, sendo a superfície de separação o plano YZ (ver figura).

- Determine o ângulo de incidência. [R: $36^\circ, 87$]
- Existe onda refractada? Em caso afirmativo, determine o ângulo de refração e o vector de onda $(k_x, k_y, k_z)_t$. [R: Sim, $t=53^\circ 13$, $\mathbf{k}=7854000(0,6\mathbf{e}_x+0,8\mathbf{e}_y)\text{m}^{-1}$]
- Existe onda reflectida? Em caso afirmativo, determine o ângulo de reflexão e o vector de onda $(k_x, k_y, k_z)_r$. [R: Não].