COMPORTAMENTO UNIVERSAL DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

Laboratório de Física Experimental Avançada

3º ano do MEFT/IST

Paula Bordalo

Dinâmica Determinista e Caos

- Desde **Newton** e as suas leis do movimento (1687) que a órbita de um sistema pode ser determinada univocamente, dadas as condições iniciais.
  - ➔ **Sistema Determinista**

- **Pierre Simon Laplace, 1776**

"The present state of the system of nature is evidently a consequence of what it was in the preceding moment, and if we conceive of an intelligence which at a given instant comprehends all the relations of the entities of this universe, it could state the respective positions, motions, and general affects of all these entities at any time in the past or future."

"Physical astronomy, the branch of knowledge which does the greatest honor to the human mind, gives us an idea, albeit imperfect, of what such an intelligence would be. The simplicity of the law by which the celestial bodies move, and the relations of their masses and distances, permit analysis to follow their motions up to a certain point; and in order to **determine the state of the system of these great bodies in past or future centuries**. It suffices for the mathematician that their **position** and their **velocity** be **given by observation for any moment in time**. Man owes that advantage to the power of the instrument he employs, and to the small number of relations that it embraces in its calculations. But **ignorance of the different causes** involved in the production of events, as well as their **complexity**, taken together with the **imperfection of analysis**, prevents our reaching the same certainty about the vast majority of phenomena. **Thus, these things that are uncertain for us, things more or less probable, and we seek to compensate for the impossibility of knowing them by determining their different degrees of likelihood**. So it is that we owe to the weakness of the human mind one of the most delicate and ingenious of mathematical theories, **the Science of Chance or Probability**."

Dinâmica Determinista e Caos

- Desde **Newton** e as suas leis do movimento (1687) que a órbita de um sistema pode ser determinada univocamente, dadas as condições iniciais.

  → **Sistema Determinista**

- Em 1776, **Laplace** confirma o determinismo, mas introduz a **teoria das probabilidades**
- **Poincaré** em 1903 realça o problema da especificação **das condições iniciais**

- **Henri Poincaré, 1903**

- "A very small cause which escapes our notice determines a considerable effect that we cannot fail to see, and then we say that the effect is due to chance. If we **knew exactly the laws of nature and the situation of the universe at the initial moment**, we could **predict exactly** the situation of that same universe at a succeeding moment. But even if it were the case that the natural laws had no longer any secret for us, we could still only know the **initial situation approximately**, if that enabled us to predict the succeeding situation with **the same approximation**, that is all we require, and we should say that the phenomenon had been predicted, that is governed by laws.

  But it is not always so; it may happen that **small differences in the initial conditions produce very great ones in the final phenomena**. A small error in the former will produce an enormous error in the latter. **Prediction becomes impossible, and we have the fortuitous phenomenon**. "

➔ **Poincaré** foi pois o primeiro a perceber que o problema não estava na especificação das **leis do movimento**, que na realidade **são universais**, mas é sim devido à especificação das **condições iniciais**.

Dinâmica Determinista e Caos

- Desde **Newton** e as suas leis do movimento (1687) que a órbita de um sistema pode ser determinada univocamente, dadas as condições iniciais.

  ➔ **Sistema Determinista**

- Em 1776, **Laplace** confirma o determinismo, mas introduz a **teoria das probabilidades**
- **Poincaré** em 1903 realça o problema da especificação **das condições iniciais**
- **Sistemas estocásticos**, são sistemas completamente aleatórios, evoluindo ao acaso e que não se regem por leis
- **Sistemas caóticos,** apesar de serem regidos pelas leis de Newton, têm grande sensibilidade às condições iniciais ➔ não são previsíveis
- **Caos** foi posto em evidência por **Lorenz em 1961** através de cálculos sobre previsões meteorológicas

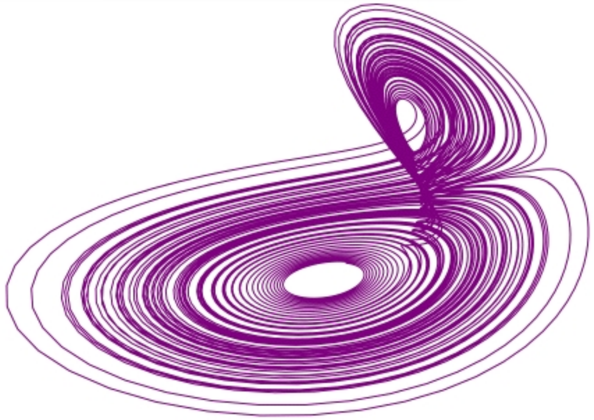
Lorenz e o Atractor Estranho

- O comportamento caótico de um sistema não-linear foi posto em evidência por **Edward Lorenz**, em 1961, quando estudava previsões meteorológicas.

- Os fenómenos meteorológicos obedecem a leis (de Newton, do fluxo hidrodinâmico e de convecção), mas **são bastante complexos**. Qualquer estudo da evolução do sistema implica resolução de várias equações diferenciais e cálculos muito laboriosos, os quais, mesmo com o auxílio dum computador que, naquela altura, necessitava de bastantes horas de cálculo.

- Por tal, para encurtar o tempo despendido nos cálculos, Lorenz resolveu diminuir a precisão nos dados introduzidos (de 10^{-6} para 10^{-3}) esperando que esta pequena variação na precisão dos dados iria induzir pequenas variações nos resultados.

mas os resultados finais foram **totalmente diferentes !!**



Quando **Lorenz** representou graficamente a solução do seu sistema de equações diferenciais viu aparecer os **atractores**.

A trajectória no espaço de fases de evolução de um sistema meteorológico foi comparada para dois conjuntos de valores iniciais muito próximos. **O resultado foi** :

✧ inicialmente **as trajectórias** pareciam idênticas mas, ao fim dum certo tempo, **começavam a divergir cada vez mais**.

✧ no final, as 2 curvas eram **idênticas**, não ponto a ponto, **mas no global !**

➢ **Este resultado era sempre obtido apesar de variar as condições iniciais**

Paula Bordalo

JOURNAL OF THE ATMOSPHERIC SCIENCES

Deterministic Nonperiodic Flow[1]

EDWARD N. LORENZ

Massachusetts Institute of Technology

(Manuscript received 18 November 1962, in revised form 7 January 1963)

ABSTRACT

Finite systems of deterministic ordinary nonlinear differential equations may be designed to represent forced dissipative hydrodynamic flow. Solutions of these equations can be identified with trajectories in phase space. For those systems with bounded solutions, it is found that nonperiodic solutions are ordinarily unstable with respect to small modifications, so that slightly differing initial states can evolve into considerably different states. Systems with bounded solutions are shown to possess bounded numerical solutions.

A simple system representing cellular convection is solved numerically. All of the solutions are found to be unstable, and almost all of them are nonperiodic.

The feasibility of very-long-range weather prediction is examined in the light of these results.

Paula Bordalo

Lorenz Results

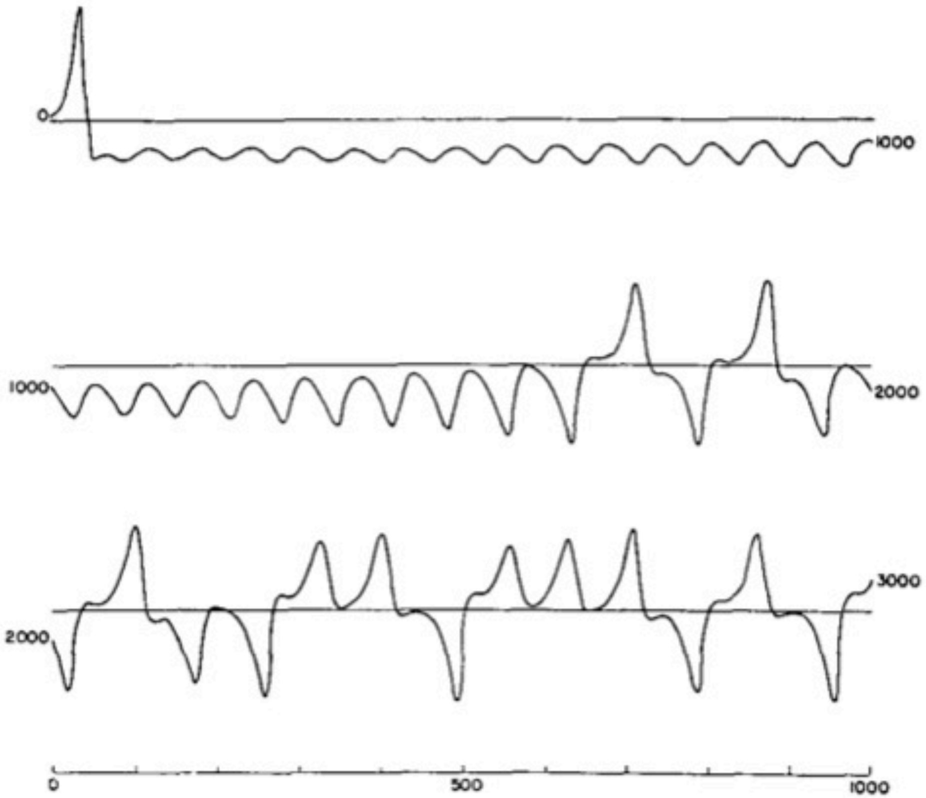


FIG. 1. Numerical solution of the convection equations. Graph of Y as a function of time for the first 1000 iterations (upper curve), second 1000 iterations (middle curve), and third 1000 iterations (lower curve).

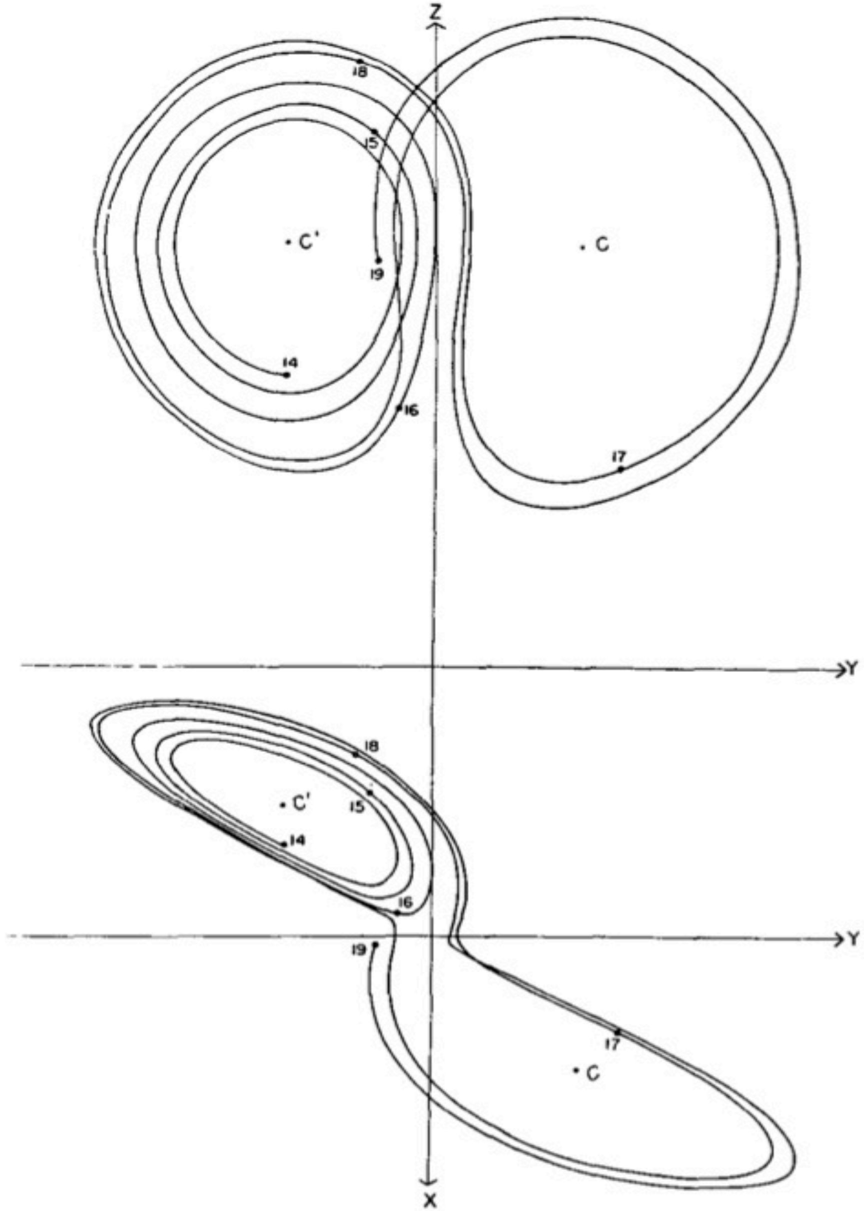


FIG. 2. Numerical solution of the convection equations. Projections on the X-Y-plane and the Y-Z-plane in phase space of the segment of the trajectory extending from iteration 1400 to iteration 1900. Numerals "14," "15," etc., denote positions at iterations 1400, 1500, etc. States of steady convection are denoted by C and C'.

Sistemas Não-Lineares

- Muitos dos problemas da Física, Química, Engenharia, Biologia, etc, tais como a turbulência, o ruído electrónico, a meteorologia são difíceis por causa da sua complexidade – **são sistemas não-lineares**.

  Parece que para cada um deles terá de haver a sua análise específica.

- Nos anos 70 descobriu-se que afinal **há quantidades universais** comuns a todos estes problemas complexos de **sistemas não-lineares** que exibem **transições para o caos**.

  - **Feigenbaum** descobriu a universalidade em iterações a 1 dimensão em **1975**, generalizando-a a seguir para sistemas de várias dimensões

Artigo de Feigenbaum

Los Alamos Science, 1980

Universal Behavior in Nonlinear Systems

by Mitchell J. Feigenbaum

Universal numbers,
$\delta = 4.6692016...$
and
$\alpha = 2.502907875...,$
determine quantitatively the transition from smooth to turbulent or erratic behavior for a large class of nonlinear systems.

There exist in nature processes that can be described as complex or chaotic and processes that are simple or orderly. Technology attempts to create devices of the simple variety: an idea is to be implemented, and various parts executing orderly motions are assembled. For example, cars, airplanes, radios, and clocks are all constructed from a variety of elementary parts each of which, ideally, implements one ordered aspect of the device. Technology also tries to control or minimize the impact of seemingly disordered processes, such as the complex weather patterns of the atmosphere, the myriad whorls of turmoil in a turbulent fluid, the erratic noise in an electronic signal, and other such phenomena. It is the complex phenomena that interest us here.

given up asking for a precise causal prediction), so that the goal of a description is to determine what the probabilities are, and from this information to determine various behaviors of interest—for example, how air turbulence modifies the drag on an airplane.

We know that perfectly definite causal and *simple* rules can have statistical (or random) behaviors. Thus, modern computers possess "random number generators" that provide the statistical ingredient in a simulation of an erratic process. However, this generator does nothing more than shift the decimal point in a rational number whose repeating block is suitably long. Accordingly, it is possible to predict what the nth generated number will be. Yet, in a list of successive generated numbers there is such a seeming lack of order that

http://www.lip.pt/~sramos/ist/fmac/caosI.html

Paula Bordalo

Sistemas Não-Lineares

- Muitos dos problemas da Física, Química, Engenharia, Biologia, etc, tais como a turbulência, o ruído electrónico, a meteorologia são difíceis por causa da sua complexidade – **são sistemas não-lineares**.

  Parece que para cada um deles terá de haver a sua análise específica.

- Nos anos 70 descobriu-se que afinal **há quantidades universais** comuns a todos estes problemas complexos de **sistemas não-lineares** que exibem **transições para o caos**.

  – **Feigenbaum** descobriu a universalidade em iterações a 1 dimensão em **1975**, generalizando-a a seguir para sistemas de várias dimensões

  – **Exemplo** – **Experiência de turbulência** com hélio líquido de **Albert Libchaber e Jean Maurer**

http://www.lip.pt/~sramos/ist/lfea.html

A experiência de Albert Libchaber e Jean Maurer

Journal de Physique Colloque C3-41 (1980) 51

Le but de cet exposé est de montrer comment, à partir d'une expérience où un petit volume (5mm^3) d'Hélium liquide est mis en convection en le chauffant par le bas, se manifestent la plupart des phénomènes non linéaires familiers à d'autres domaines et en particulier en électronique. Cette expérience suggère que les instabilités convectives et la transition à la turbulence pourraient être simulées à partir de deux oscillateurs entretenus couplés non linéairement.

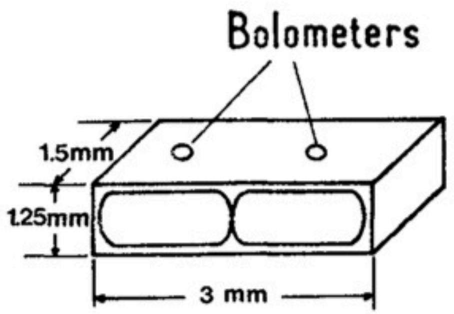
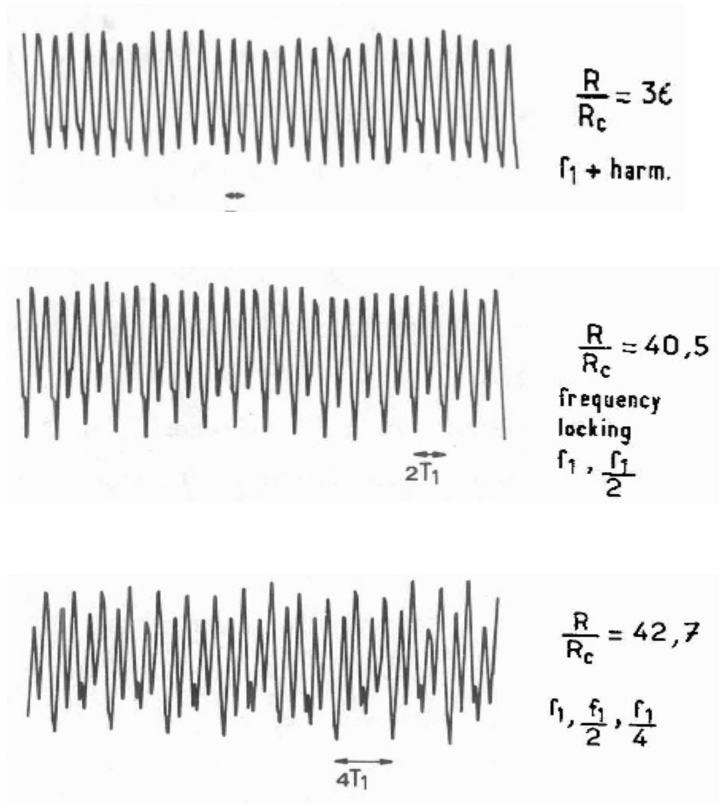


Figure I - Schéma de la cellule expérimentale avec position des bolomètres.

- 3 séries de temperaturas medidas em tempo real num dado ponto durante o aquecimento



Paula Bordalo

Dinâmica no Intervalo

- Considerando uma iteração funcional, ie, composição sucessiva da função com ela própria:

$$f : [0 , 1] \;\; -> \;\; (0, 1)$$

sendo x_0 o ponto de partida da órbita:

$$= \{x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_m , x_{m+1} , \ldots \}$$

com $x_1 = f (x_0) , x_2 = f (x_1) , \ldots \quad X_m = f (x_{m-1})$

- Se a função **f** é **não-linear,** a órbita será complexa e não existe relação de recorrência

ex: $f (x) = a – x^2$

Numa função linear : $f (x) = a x$

a solução de recorrência é $x_{n+1} = a x_n$

e se $| a | < 1$, então $x_n -> 0$ quando $n -> \infty$

Paula Bordalo

Ponto fixo

- Considerando a função:

$$f\,(x) = 4\,\lambda\,x\,(\,1 - x)$$

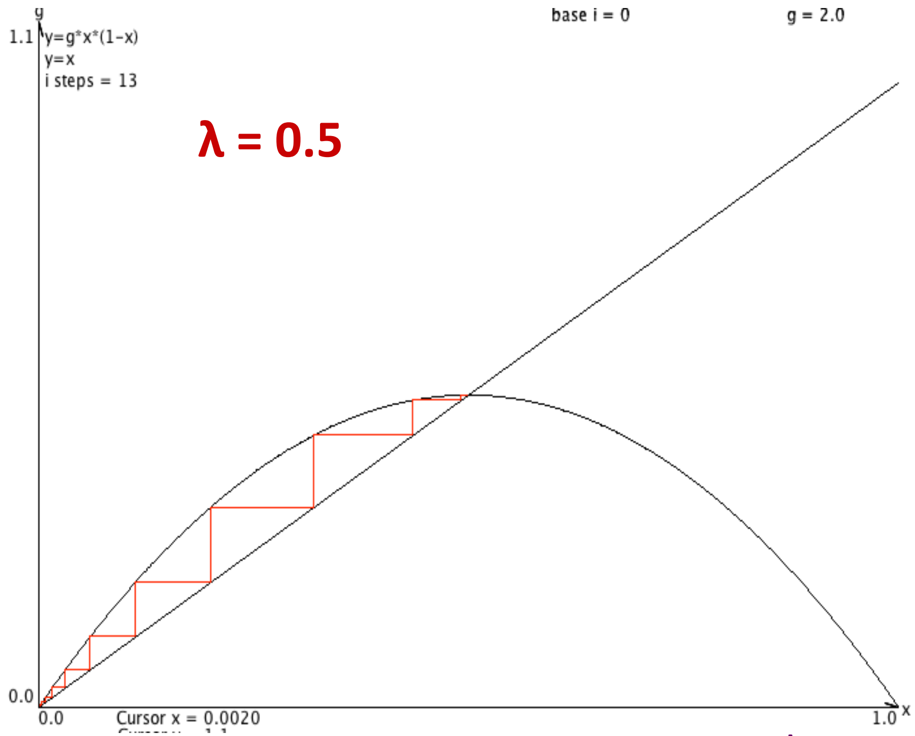
há pontos x_0 para os quais a iteração seguinte é sempre x_0 ➔ **pontos fixos**

e o comportamento é estático ou de período 1 :

$$x_0 = 4\,\lambda\,x_0\,(\,1 - x_0\,)$$

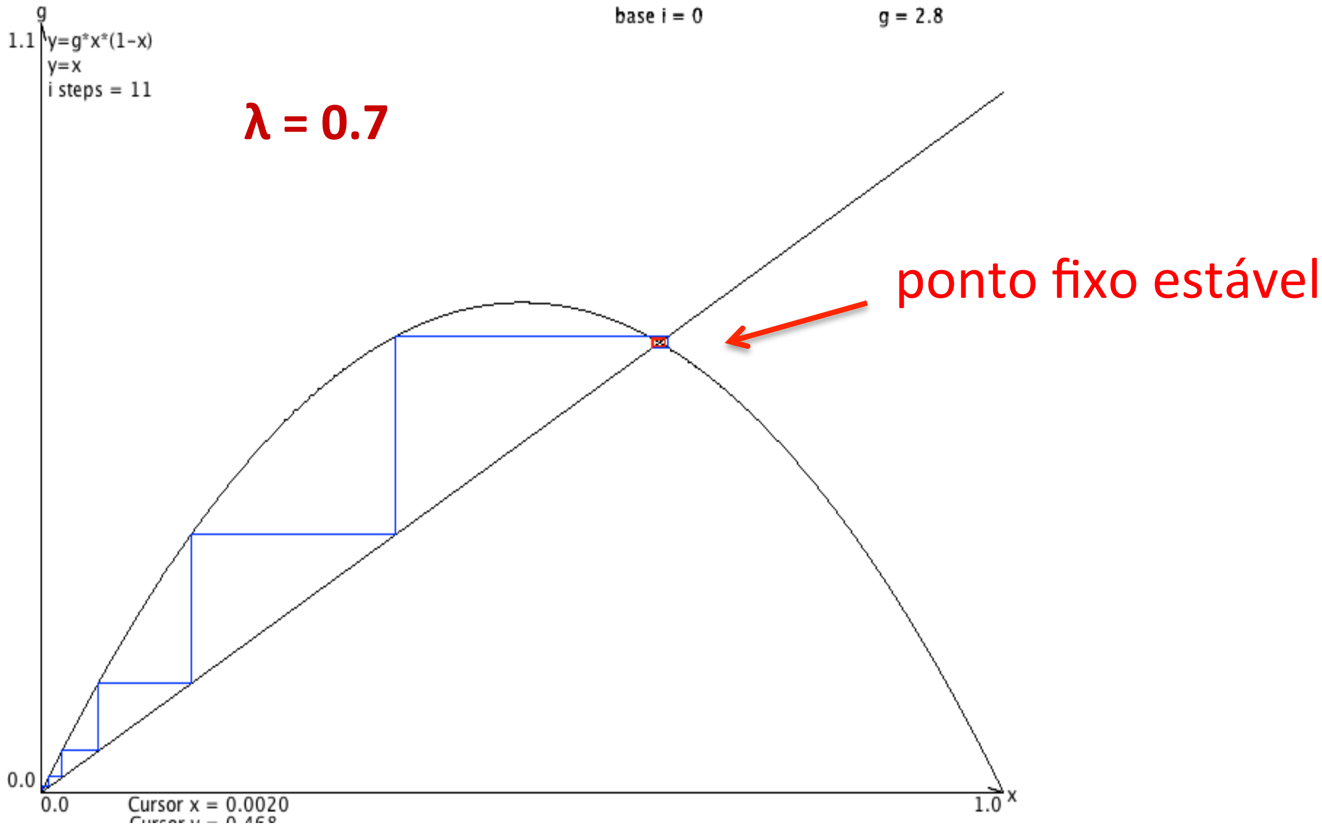
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 - \frac{1}{4}\,1/\lambda \end{cases}$$

Se x_0 não é um ponto fixo ->



Paula Bordalo

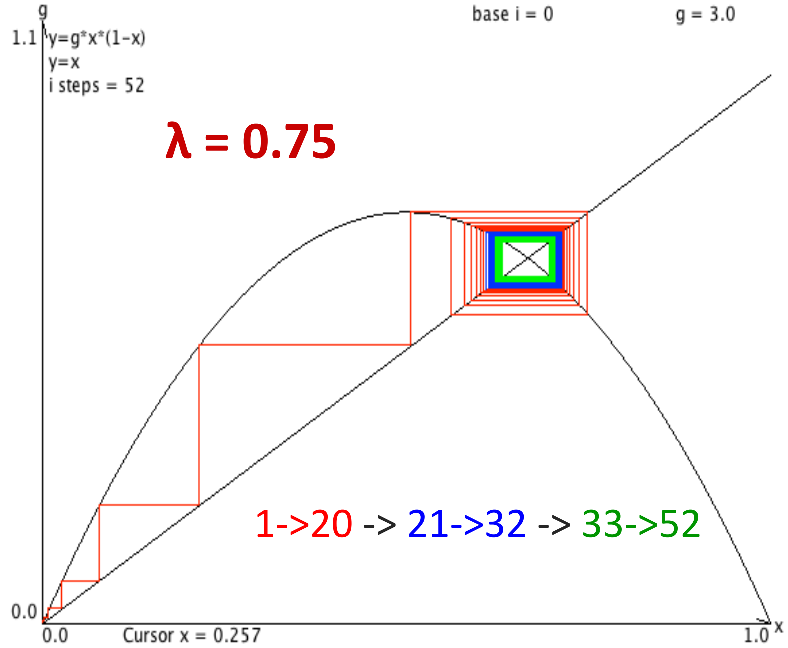
Ponto fixo estável

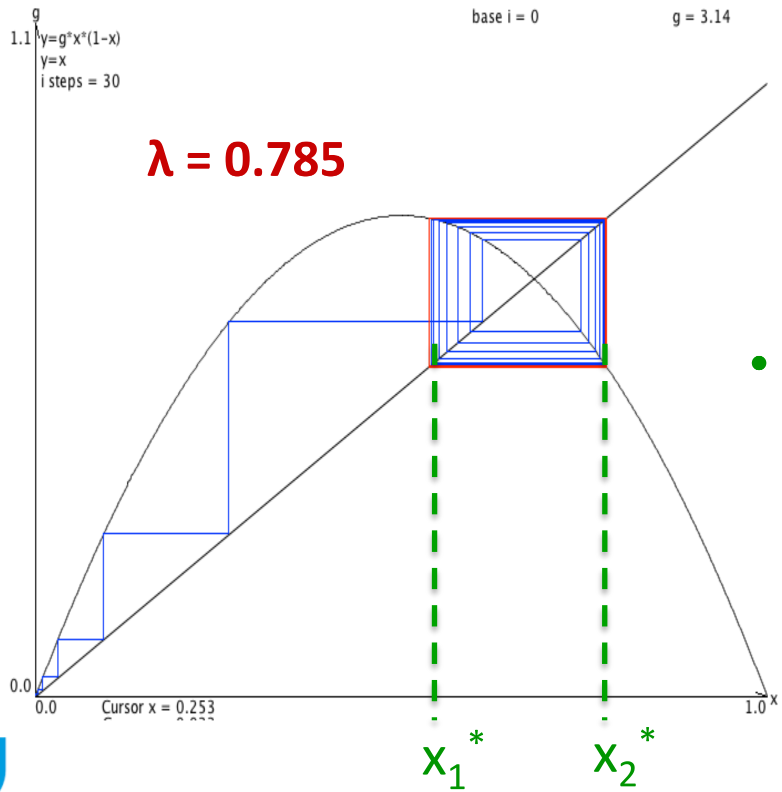


Sempre que existe uma órbita periódica estável, quase sempre todos os pontos do intervalo tendem para ela quando n -> ∞

Duplicação de Período

- Aumentando o valor do parâmetro λ obtêm-se outras órbitas que poderão ser periódicas ou não.





- Período 2 ➔ 2 pontos "fixos" :

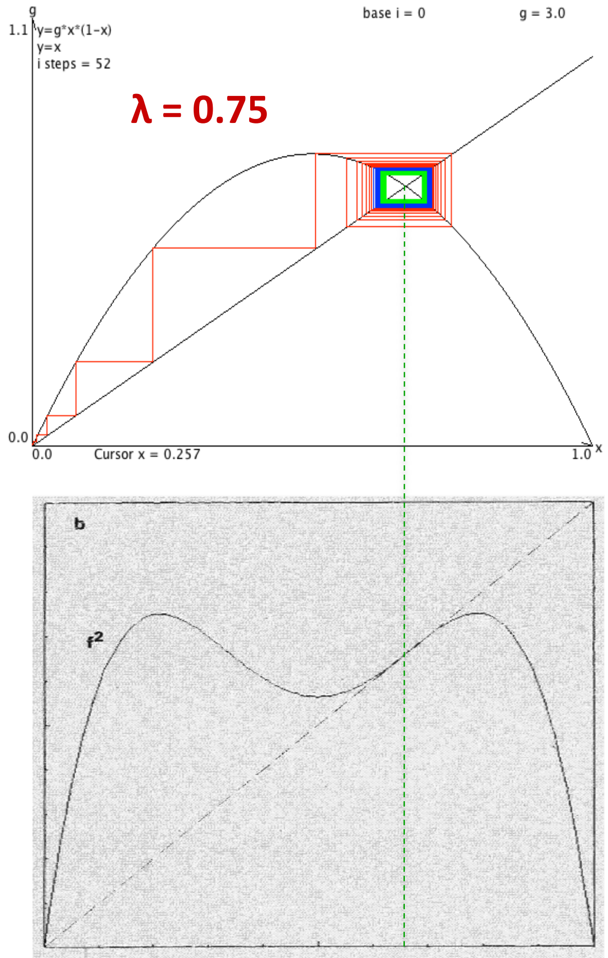
$$\begin{cases} x_1^* = f(x_2^*) \\ x_2^* = f(x_1^*) \end{cases}$$

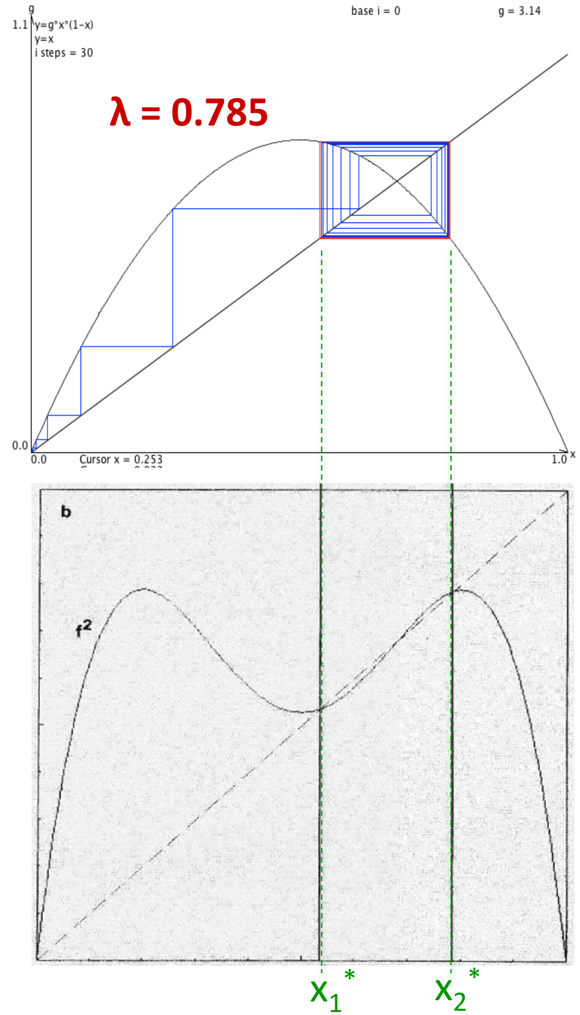
Paula Bordalo

Função Iterada

- A função iterada obtém-se aplicando a função **f** duas vezes :

$$x_2 = f^2\,(x_0)\ ,\ \ \text{com}\ \ x_1 = f\,(x_0)\ \ \text{e}\ \ x_2 = f\,(x_1) \qquad (\ f^2 = f \circ f\ )$$





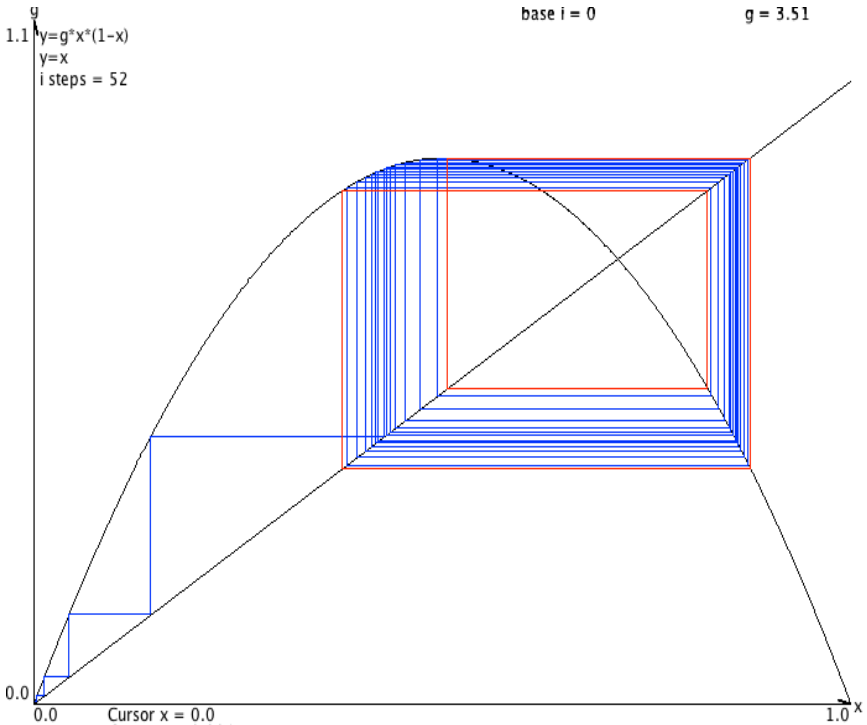
O que determina o comportamento de duplicação de período de **f** , à medida que **λ** aumenta, é a relação do declive de f^2 com o declive de **f**

Paula Bordalo

Período 4 e Período 8

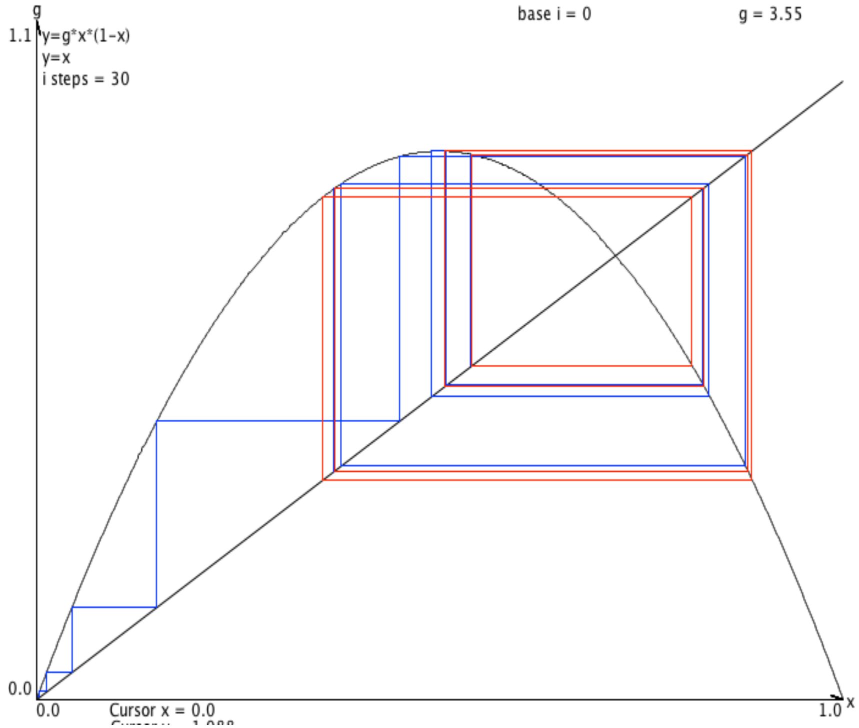
- Há tantos pontos fixos estáveis quanto o grau de período da órbita estável

Período 4 :



Iterações: 1 -> 34 -> 35 -> 52

Período 8 :



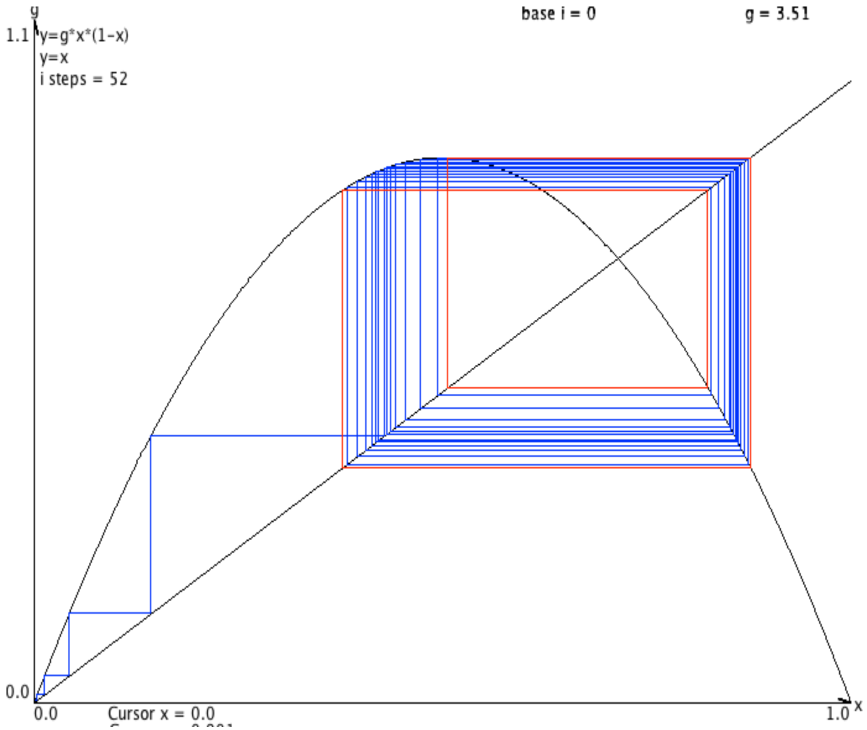
1 -> 22 -> 23 -> 30

Paula Bordalo

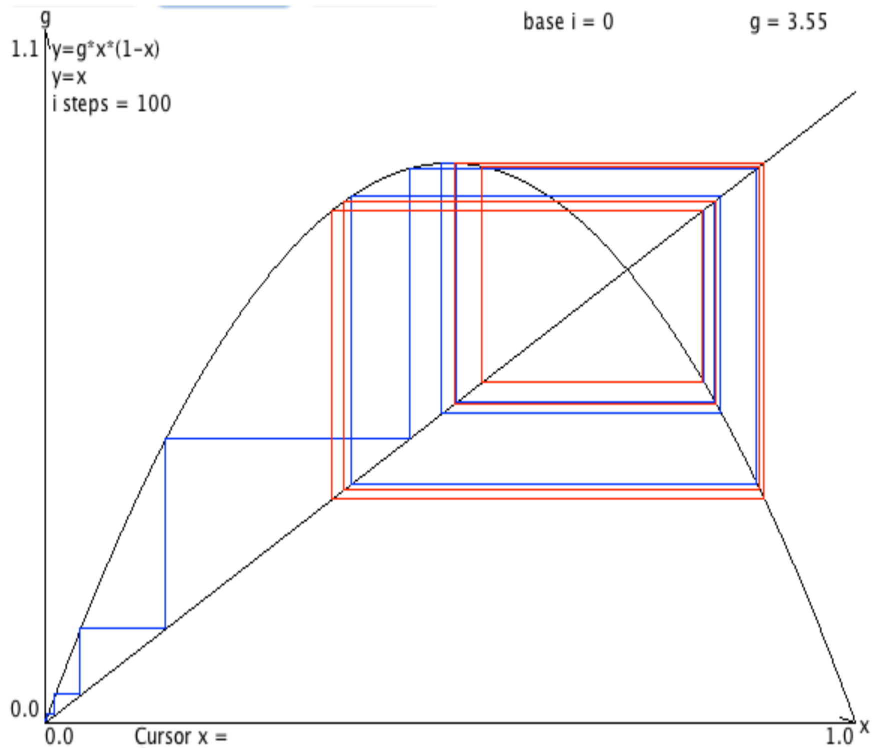
Período 4 e Período 8

- Há tantos pontos fixos estáveis quanto o grau de período da órbita estável

Período 4 :



Período 8 :



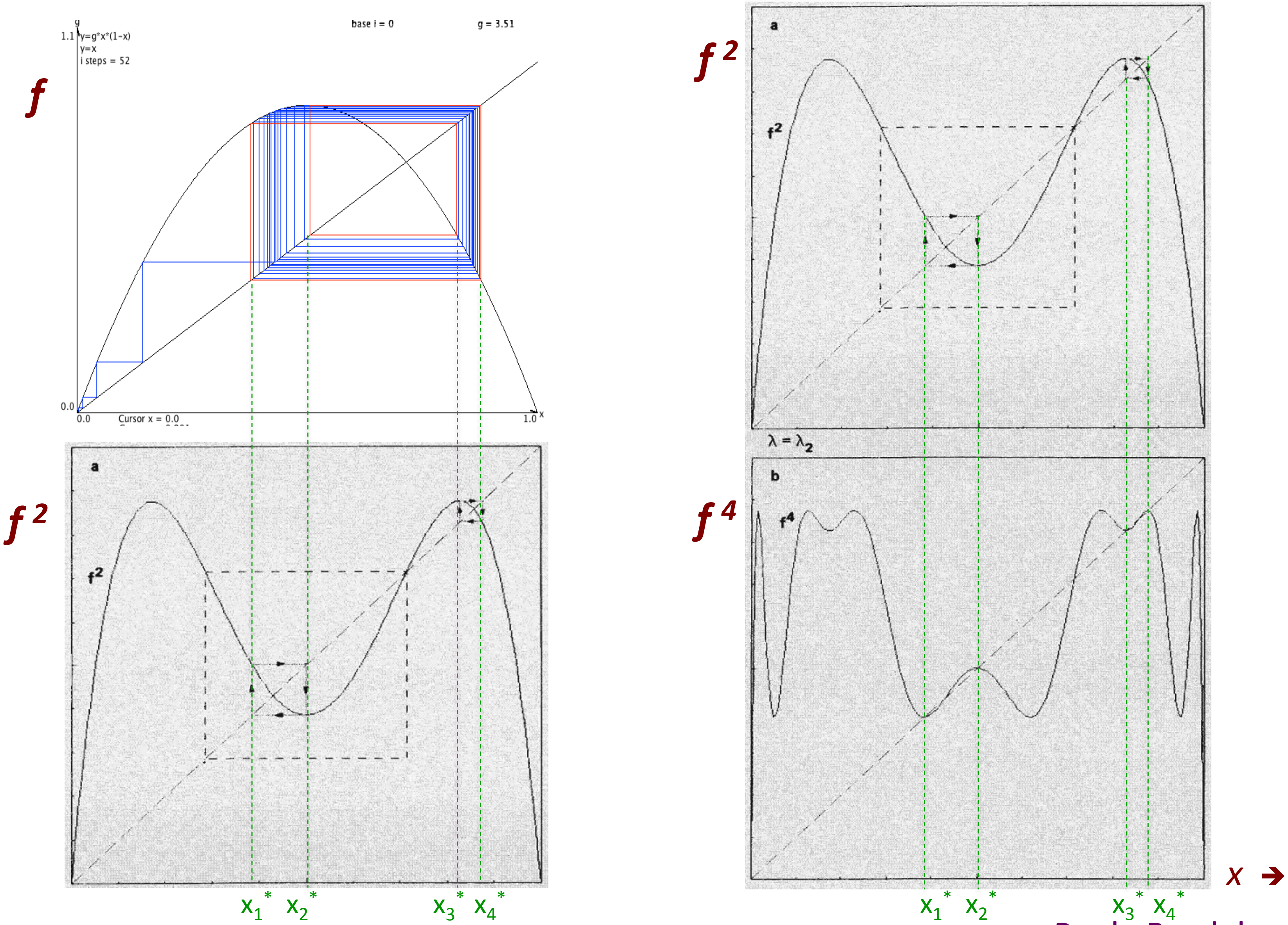
Iterações: 1 -> 34 -> 35 -> 52

1 -> 58 -> 59 -> 100

Paula Bordalo

Período 4 e a sua iterada f^4

- No período 4 há 4 pontos fixos estáveis que se obtêm através da função iterada aplicada 4 vezes



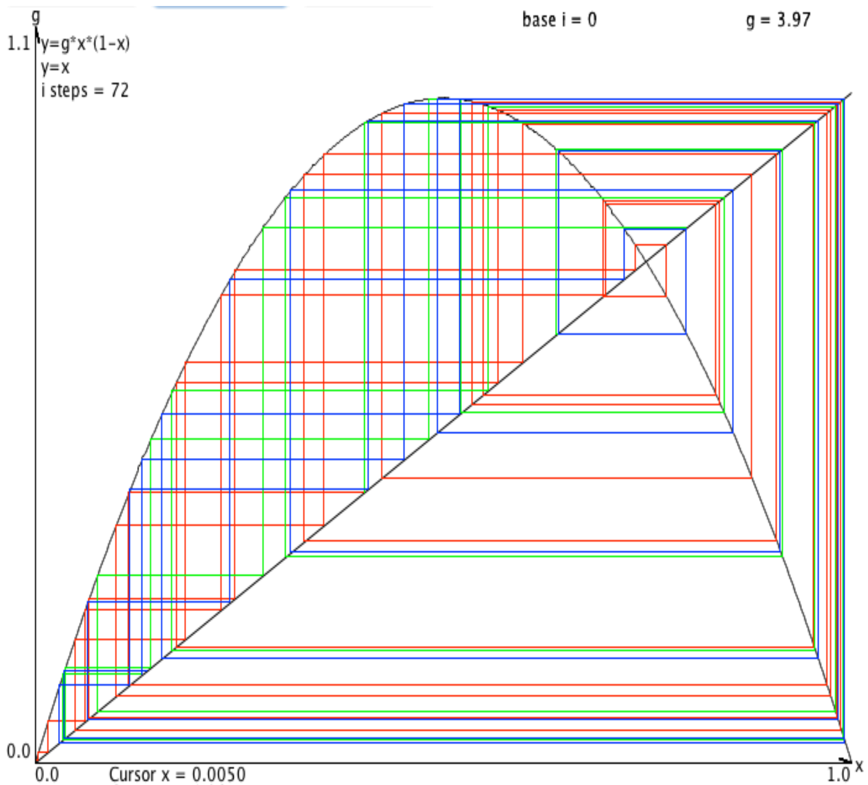
Paula Bordalo

Caos

- Não existindo órbita periódica (ou pontos fixos estáveis) ➔ **regimes aperiódicos** e sensibilidade às condições iniciais.

- Certos regimes aperiódicos são ergódicos.

  A órbita de um ponto percorre densamente todo o intervalo quando n -> ∞ , sem tender para nenhuma órbita estável.



Iterações: 1->27 -> 28->54 -> 55->72

Paula Bordalo