LABORATÓRIO DE FÍSICA EXPERIMENTAL AVANÇADA
Eng^{a} Física Tecnológica

GUIA DE TRABALHO

CAOS E DUPLICAÇÃO DE PERÍODO NUM CIRCUITO RCL NÃO LINEAR

Ano lectivo 2001/2002

1. Objectivo do Trabalho

Estudo qualitativo de um circuito não linear aplicando à teoria dos mapas de intervalo: observação dos padrões de resposta periódica.

Trata-se de um circuito RCL não linear forçado sujeito a uma excitação exterior da forma $b + a \cdot cos\ \omega t$.

A não linearidade é introduzida por um díodo ou *varicap*, cuja capacidade depende da tensão aos terminais.

A variável que se pretende estudar é a tensão aos terminais do díodo, e os parâmetros de que depende o seu comportamento são a frequência e a amplitude da sinusoide excitadora, bem como o *offset b* a esta adicionado. Este *offset* é somado à sinusoide por meio de um amplificador operacional e pode ser variado à mão, por meio de um potenciómetro introduzido na montagem ou, em regime periódico, somando uma função triangular à sinusoide.

ATENÇÃO

- As alimentações são a **primeira** coisa a ligar e a **última** a desligar.
- Verifique as alimentações antes de as ligar à montagem (+15,-15,+5,-5); assegure-se que as liga correctamente.
- Controle os valores das amplitudes da sinusoide e da triangular antes de as ligar à montagem.

2. Procedimento Experimental

1 Observação da tensão aos terminais do díodo

Gerador 1:
Função: Seno   Frequência: 500kHz   Amplitude: 2.8 Vpp
Canal 1 do osciloscópio

Saída (tensão aos terminais do díodo) : Canal 2

Trigger: Canal 2 do osciloscópio

Variando lentamente o potenciómetro da montagem, observe sucessivamente respostas de períodos 1, 2, 4, 8, caóticas, janelas de estabilidade 5,10 (ou 3,6), novamente respostas caóticas, e finalmente a repetição dos mesmos períodos por ordem inversa.

NOTA: Toma-se como unidade de período o do seno; assim, período n significa período (*n vezes período do seno*).

Para cada um destes períodos registe, por ordem de sucessão, a altura dos picos de tensão. Note que há picos de amplitude muito pequena. Numa folha de papel milimétrico, obtenha a função do intervalo para cada um dos casos representando V_{n+1} em função de V_n.

2 Diagrama de bifurcação

Para obter experimentalmente o diagrama de bifurcação, aplica-se uma tensão aos terminais do díodo em função do parâmetro *offset b*. Temos de fazer variar este parâmetro de forma repetitiva: em vez da tensão do potenciómetro, somaremos ao seno uma função triangular de baixa frequência, e utilizaremos apenas uma das rampas.

Gerador 1:
Função: seno   Frequência: 500 kHz   Amplitude: 8 Vpp

Gerador 2:
Função: triangular   Frequência: 50 Hz   Amplitude: máxima
Canal 3 do osciloscópio

Saída (tensão aos terminais do díodo): canal 1 do osciloscópio

Trigger: Canal 3 (onda triangular)

NOTA: Para obter um diagrama com boa definição, a frequência de varrimento da triangular deverá ser muito menor que a do seno, uma vez que o díodo emite aproximadamente um pico por cada período do seno. Assim, por exemplo para os valores indicados, o díodo terá emitido cerca de 10000 picos durante os 20ms de varrimento.

Obterá no osciloscópio um diagrama de bifurcações. De acordo com o observado em 3.1, a resposta do díodo começa por ter o mesmo período que o seno, apresentando picos todos da mesma altura. À medida que o parâmetro aumenta a resposta duplica sucessivamente de período até se tornar caótica, obtendo-se duas bandas no osciloscópio. Note que as bandas são ainda uma ”reminiscência” do período 2, visto que a altura do picos está alternadamente contida numa e noutra. A partir de um certo valor do parâmetro, as duas bandas caóticas fundem-se (ponto de Ruelle). O caos não é uniforme: para certos intervalos do parâmetro, a resposta é periódica. Encontram-se facilmente duas janelas de estabilidade (de períodos 5, 10 e, jogando também com a frequência, de período 3, 6, etc.). Note que a partir de certo valor do parâmetro o comportamento do díodo repete-se por ordem inversa (bifurcações inversas), o que é característico desta experiência.

Usando a base de tempo do osciloscópio, amplie a zona correspondente a cada período.

- Determine as primeiras razões de convergência da constante universal δ de Feigenbaum, δ_n, nas regiões de duplicação de período e nas de passagem do período a metade:

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n+1} - b_n} \quad .$$

- Proceda de modo idêntico para os primeiros α_n termos da constante universal α :

$$\alpha_n = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n+1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \quad .$$

3 Sugestões

1) Define-se trajectória de um ponto x como a sequência de números

$$[x, f(x), f^2(x), f^3(x)...]$$

em que $f^n(x)$ significa f ∘ f ∘ ... ∘ f (n vezes).

Dado um mapa do intervalo com um máximo no ponto $x = c$, define-se o itinerário de um ponto x como a sequência de símbolos

$$A_1 \;\; A_2 \;\; A_3 \;\; A_4 \;\; A_5 \;\; A_6 \;\; ...$$

em que

$A_n = R$ (right) se $f^n(x) > c$

$A_n = L$ (left) se $f^n(x) < c$

$A_n = C$ (center) se $f^n(x) = c$.

Ao itinerário do ponto $x = c$ chama-se "kneading sequence", significando aproximadamente "sequência de dobragem". Esta sequência simbólica dá informação sobre se as sucessivas iteradas se distribuem à esquerda ou à direita do máximo da função, e é designada por padrão da trajectória.

Com base nos dados obtidos em 3.1 e localizando aproximadamente o máximo da função, determine os padrões das respostas periódicas obsevadas.

2) A convergência lenta para o δ de Feigenbaum é típica dos mapas com bifurcações inversas. Determine o δ de Feigenbaum para uma das seguintes funções[1] e compare com os resultados experimentais obtidos:

a) $f(x) = 2Mx^2 + 1 - 2M \qquad x \in [-1, 1], \qquad M \in [0, 1]$

b) $f(x) = exp(-ax^2) + b \qquad a = 7, \qquad b \in [-1, 0]$

[1] Use o programa que desenvolveu para a cadeira de Técnicas Física Computacional