SIMETRIAS DE GAUGE

Simetrias $\longleftrightarrow$ leis de conservação

Mecânica clássica:

equações do movimento obtêm-se do Lagrangeano:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad L \equiv T - V$$

Extensão do Lagrangeano para variáveis contínuas:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \rightarrow \mathcal{L}\left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}, x_\mu\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

1) $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$

$\rightarrow$ eq. Klein-Gordon $\qquad (\Box^2 + m^2)\phi = 0$

2) $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\psi\bar{\psi}$

$\rightarrow$ eq. de Dirac $\qquad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$

3) $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \qquad (F_{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$

$\rightarrow$ eq.s Maxwell $\quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

Equações de Maxwell

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho \qquad \nabla\times\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0$$

$$\nabla\cdot\vec{B}=0 \qquad \nabla\times\vec{B}-\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{j}$$

Quadrivector potencial $A^\mu=(\phi,\vec{A})$

$$\vec{E}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\phi \qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}$$

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ invariante sob a transformação:

$$A_\mu\rightarrow A_\mu+\partial_\mu\chi$$

Equações de Maxwell em termos de A^μ:

$$\Box^2A^\mu-\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)=j^\mu$$

condição de Lorentz $\partial_\nu A^\nu=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Box^2A^\mu=j^\mu$$

Tensor do campo $F^{\mu\nu}\equiv\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$

$$\equiv\begin{pmatrix}0 & E_1 & E_2 & E_3\\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2\\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1\\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0\end{pmatrix}$$

Eq. de Maxwell em termos de $F^{\mu\nu}$:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}=j^\nu$$

Fotão livre :

$$\Box^2 A_\mu = 0$$

tem solução $A^\mu = \underbrace{\varepsilon^\mu(q)}_{\text{vector de polarização do fotão}} e^{-iq.x}$

Invariância de gauge implica:

$$\varepsilon^0 = 0 \quad e \quad \vec{\varepsilon} \cdot \vec{q} = 0$$

$\Rightarrow$ o fotão tem <u>2</u> graus de liberdade de <u>polarização transversa</u>

Teorema de Noether : simetrias e leis de conservação

Consideremos o Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = -i\,\overline{\Psi}\,\gamma_\mu \partial^\mu \psi - m\,\overline{\Psi}\,\psi$$

invariante sob a transformação

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x) \qquad \alpha : c^{te} \text{ real}$$

de facto $\left|\begin{array}{l} \overline{\Psi} \to e^{-i\alpha}\psi \\ \partial_\mu \psi \to e^{i\alpha}\partial_\mu \psi \end{array}\right.$ grupo $U(1)$

Esta invariância implica uma corrente conservada:

transformação infinitesimal : $\psi \to (1+i\alpha)\psi$

$$0 = \delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\delta(\partial_\mu \psi) + (\psi \to \overline{\Psi})$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}(i\alpha\psi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}(i\alpha\,\partial_\mu \psi) + \cdots$$

$$= i\alpha \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\right)\right]}_{=0 \text{ eq. E-L}}\psi + i\alpha\,\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\psi\right) + \cdots$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)}\psi - \overline{\Psi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \overline{\Psi})}\right]}_{j^\mu = \overline{\Psi}\gamma^\mu\psi} = 0$$

$\partial_\mu j^\mu = 0 \longrightarrow Q = \int d^3x\, j^0$ é conservado, ou seja $\frac{dQ}{dt} = 0$

Simetria de gauge local :

Suponhamos que $\alpha = \alpha(x)$

$$\psi(x) \to \psi(x)\, e^{i\alpha(x)}$$

O Lagrangeano não é invariante pois :

$$\partial_\mu \psi \to e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \psi + \underbrace{i e^{i\alpha(x)} \psi\, \partial_\mu \alpha}_{\text{este termo quebra a invariância}}$$

Introduz-se a derivada covariante tal que :

$$D_\mu \psi \to e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi$$

solução :

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - i e A_\mu$$

tendo o campo A_μ a lei de transformação :

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha$$

O Lagrangeano virá assim :

$$\mathcal{L} = i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi$$

$$= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \underbrace{\underbrace{e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi}_{J^\mu} A_\mu}_{\text{termo de interação !}}$$

Lagrangeano da QED:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \underbrace{- \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\substack{\text{invariante sob} \\ \text{transformações do campo } A_\mu}}$$

Um termo de massa (para o fotão) destroi a invariância do Lagrangeano:

O Lagrangeano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu + \underbrace{\frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu}_{\text{termo de massa}}$$

conduz à equação:

$$(\Box^2 + m^2) A^\mu = j^\mu$$

QUEBRA ESPONTANEA DE SIMETRIA

Lagrangeano de partículas escalares :

$$\mathcal{L} \equiv T - V = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4\right)}_{V}$$

$\lambda > 0$

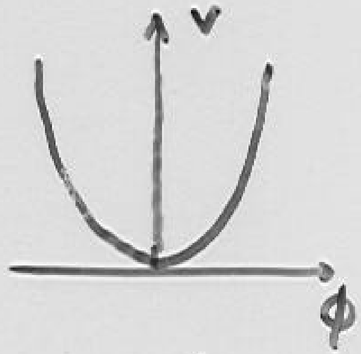
invariante sob $\phi \rightarrow -\phi$

a) $\mu^2 > 0$

$\rightarrow -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2$: termo de massa

$\rightarrow -\frac{1}{4}\lambda\phi^4$: termo de interacção

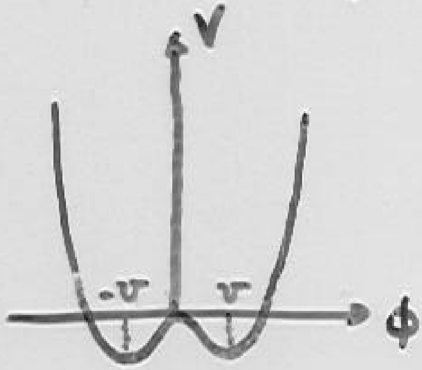
$\rightarrow$ mínimo do potencial : $\phi = 0$



b) $\mu^2 < 0$

$\rightarrow$ mínimos do potencial $\phi = \pm v$

$v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$



A teoria das perturbações é feita em torno de um mínimo!

Façamos $\phi(x) = v + \eta(x)$
$\hookrightarrow$ flutuação

obtem-se :

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 \underbrace{- \lambda v^2 \eta^2}_{m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}} \underbrace{- \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4}_{\text{termos de interacção}} + c^{te}$$

Quebra espontânea de uma simetria de gauge global

Campo escalar complexo : $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2$$

invariante sob $\phi \to e^{i\alpha}\phi$ (gauge global $U(1)$)

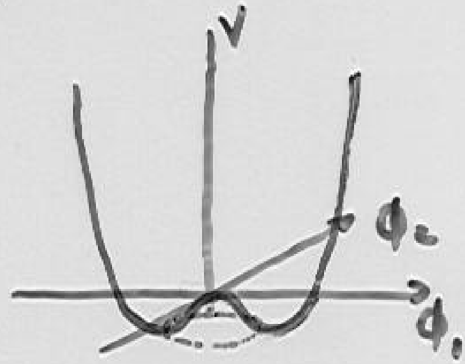
O Lagrangeano em termos de ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 \underbrace{- \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2}_{V}$$

Consideremos $\lambda > 0$ e $\mu^2 < 0$:

mínimo do potencial :

$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v$ c/ $v = -\dfrac{\mu^2}{\lambda}$



Escolhemos o mínimo $\phi_1 = v$, $\phi_2 = 0$,

e as perturbações $\eta(x)$ e $\xi(x)$:

$$\phi(x) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,[v + \eta(x) + i\,\xi(x)]$$

Obtemos-se:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \mu^2 \eta^2 + C^{te} + \text{termos cúbicos e quárticos em } \eta \text{ e } \xi$$

$m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$

$m_\xi = 0 \longrightarrow$ bosão de Goldstone

(indesejável !)

MECANISMO DE HIGGS

Transformação de gauge local $U(1)$:

$$\phi \to e^{i\alpha(x)}\,\phi$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

$$A_\mu \to A_\mu + ie\,\partial_\mu \alpha$$

Lagrangeano invariante de gauge:

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu + ieA^\mu)\phi^*(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi - \mu^2\phi^*\phi$$
$$- \lambda(\phi^*\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Fazendo a translação de ϕ para um estado fundamental com flutuações η e ξ:

$$\mathcal{L}' = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2}_{m_\xi = 0} + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \underbrace{v^2\lambda\eta^2}_{m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2}} + \underbrace{\frac{1}{2}e^2v^2A_\mu A^\mu}_{m_{A_\mu} = ev}$$

$$- ev\,A_\mu\,\partial^\mu\xi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{termos de interação}$$

$m_{A_\mu} \neq 0 \Rightarrow$ um grau de liberdade de polarização a mais!

Eliminar o grau de liberdade superfluo:

Notando que:

$$\phi = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(v + \eta + i\xi)$$

$$\simeq \sqrt{\frac{1}{2}}\,(v + \eta)\, e^{i\xi/v} \qquad (1^a \text{ ordem})$$

Consideramos os campos h, θ e A_μ tal que:

$$\phi \to \sqrt{\frac{1}{2}}\,(v + h(x))\, e^{i\theta(x)/v}$$

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{ev}\,\partial_\mu \theta$$

$\Rightarrow$ o campo θ é eliminado (invariância de gauge local)

Resulta que:

$$\mathcal{L}'' = \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 - \lambda v^2 h^2}_{\text{HIGGS}} + \underbrace{\frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu^2}_{\text{Campo } A_\mu \text{ massivo}} - \lambda v h^3$$

$$- \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{1}{2} e^2 A_\mu^2 h^2 + v e^2 A_\mu^2 h - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

QUEBRA ESPONTÂNEA DA SIMETRIA LOCAL SU(2)

Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$$

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\,\phi_2 \\ \phi_3 + i\,\phi_4 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}$ é invariante face a transformações globais:

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha_a \tau_a/2}\, \phi \quad ; \ \tau_a \text{ matriz. de Pauli}$$

Simetria Local $\alpha_a(x)$:

→ derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau_a}{2} W_\mu^a$

3 campos de gauge $W_\mu^a(x)$, $a = 1,2,3$

→ transformação dos campos de gauge:

$$\vec{W}_\mu \rightarrow \vec{W}_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \vec{\alpha} - \vec{\alpha} \times \vec{W}_\mu$$

→ lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \left(\partial_\mu \phi + ig\tfrac{1}{2}\tau \cdot W_\mu \phi\right)^\dagger \left(\partial^\mu \phi + ig\tfrac{1}{2}\tau \cdot W^\mu \phi\right) - V(\phi) - \frac{1}{4} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}$$

com $V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - g\, W_\mu \times W_\nu$$

Caso $\mu^2 < 0$ e $\lambda > 0$:

Mínimo de $V(\phi)$

$$\phi^\dagger \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$$

Escolha de um mínimo:

$$\phi_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \qquad v^2 \equiv -\frac{\mu^2}{\lambda}$$

Perturbações em torno do mínimo:

$$\phi(x) = e^{i\tau \cdot \theta(x)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Os campos θ_1, θ_2 e θ_3 são eliminados por invariância de gauge;

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}$$

campo de Higgs

Substituindo no Lagrangeano:

termo de massa do bosões de gauge

$$\left(ig\frac{1}{2}\tau \cdot W_\mu \phi\right)^\dagger \left(ig\frac{1}{2}\tau \cdot W_\mu \phi\right) =$$

$$= \frac{g^2 v^2}{8}\left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + (W_\mu^3)^2\right]$$

$$\Rightarrow M_W = \frac{1}{2} g v$$