REPRESENTAÇÕES

→ Os elementos (operações) de um grupo A_i podem ser **representados** por matrizes M_i

$$A_i A_j = A_k \implies M_i M_j = M_k$$

ROTAÇÕES A 2 DIMENSÕES

$$\begin{pmatrix} V'_x \\ V'_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}$$

R^T : matriz transposta $\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\implies R^T . R = R . R^T = I$$

$$\implies R^{-1} = R^T \quad : \text{matrizes } \underline{\text{ortogonais}}$$

O(2): Grupo das matrizes 2x2 ortogonais

Matrizes R têm determinante 1

Matrizes 2x2 ortogonais c/ determinante 1 formam o grupo SO(2) = grupo das rotações 2-D

- Nova base: $V_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x \pm i V_y)$

$$\begin{pmatrix} V'_+ \\ V'_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_+ \\ V_- \end{pmatrix}$$

forma reduzida

Representações irredutíveis: não podem ser reduzidas à forma diagonal.

Representação redutível dum grupo:

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_i M_j = \begin{pmatrix} a_i a_j & 0 \\ 0 & b_i b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ 0 & b_k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ as sub-matrizes a e b são igualmente representações do grupo

$\Rightarrow$ $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$ são representações irredutíveis do grupo das rotações 2-D

<u>Rotações 2-D de tensores de 2ª ordem</u>:

$\vec{V}, \vec{W} \rightarrow$ tensor $T_{ij} = V_i W_j$ $\quad (T_{11} = V_x W_x$, etc.$)$

- rotação $\theta \rightarrow T'_{11} = V'_x W'_y = (\cos\theta\, V_x - \operatorname{sen}\theta\, V_y)(\cos\theta\, W_x - \operatorname{sen}\theta\, W_y)$
- mudança de base:

$T_{++} = V_+ W_+$; $T_{+-} = V_+ W_-$; $T_{-+} = V_- W_+$; $T_{--} = V_- W_-$

$$\begin{bmatrix} T'_{++} \\ T'_{+-} \\ T'_{-+} \\ T'_{--} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{++} \\ T_{+-} \\ T_{-+} \\ T_{--} \end{bmatrix}$$

- de uma forma geral, $e^{\pm in\theta}$ (matrizes 1×1 unitárias) são representações irredutíveis das rotações 2-D

$\Rightarrow$ grupo $U(1)$

$\Rightarrow$ os grupos $SO(2)$ e $U(1)$ são isomórficos

Rotações 3-D

$R_1 \times R_2 \neq R_2 \times R_1$ grupo NÃO-ABELIANO

Matrizes ortogonais $R^T R = R R^T = I$

$\det(RR^T) = \det I = 1$
$\det(RR^T) = (\det R)^2 = 1$ $\Rightarrow \det R = \pm 1$ + rotações − reflecções

$\Rightarrow$ Grupo das rotações 3-D : $SO(3)$

Matrizes 3×3 : representação irredutível irep (3)
rotações de vectores

Tensores:

vectores $\vec{V}, \vec{W} \Rightarrow$ 9 produtos $V_i W_j \Rightarrow$ Matrizes 9×9

representação 9-dimens. do grupo das rotações

Procura de representações irredutíveis:

$\vec{V}\cdot\vec{W}$ 1 $T_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(V_1 W_1 + V_2 W_2 + V_3 W_3)$ produto interno (invariante)

$\vec{V}\times\vec{W}$

$T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{V}\times\vec{V})_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_2 W_3 - V_3 W_2)$

3 $T_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{V}\times\vec{W})_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_3 W_1 - V_1 W_3)$

$T_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{V}\times\vec{V})_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 W_2 - V_2 W_1)$

vector T_2, T_3, T_4 misturam-se nas rotações

$T_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_2 W_3 + V_3 W_2)$

$T_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_3 W_1 + V_1 W_3)$

5 $T_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 W_2 + V_2 W_1)$

$T_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_1 W_1 - V_2 W_2)$

$T_9 = \frac{1}{\sqrt{6}}(V_1 W_1 + V_2 W_2 - 2 V_3 W_3)$

- Sob rotações:

vector ≡ objecto $\ell=1$ matrizes $2\ell+1 = 3$

"five" ≡ objecto $\ell=2$ matrizes $2\ell+1 = 5$

- A combinação de duas representações irredutíveis 3 origina irrep 1 + irep 3 + irep 5:

$$3 \times 3 = 1 + 3 + 5$$

equivalente a:

$$(\ell=1)\times(\ell=1) = (\ell=0) + (\ell=1) + (\ell=2)$$

SPIN

rotações de spinor ($j=1/2$) → matrizes 2×2 $e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}}$, $\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$

$\vec{\sigma}$: Pauli matrices

segundo z: $e^{iJ_z\theta} = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$ det $= 1$

Matrizes 2×2 unitárias, det$=1$, → $SU(2)$

→ Uma rotação corresponde a duas matrizes $\pm R(\theta)$

$SU(2)$ e $SO(3)$ são homomórficos

• <u>Geradores</u> do grupo $SU(2)$: J_x, J_y, J_z

sob rotações, J_x, J_y e J_z transformam-se tal como as componentes de um vector