4) A EQUAÇÃO DE DIRAC (Introdução)

Motivação : equação linear em $\frac{\partial}{\partial t}$

$$H\,\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{P} + \beta m)\,\psi$$

ou seja:

$$i\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\,\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}\,\psi + m\beta\,\psi$$

→ α_i e β tais que

$$H^2\psi = (P^2 + m^2)\,\psi$$

Tem-se que :

$$H^2\psi = (\alpha_i P_i + \beta m)(\alpha_j P_j + \beta m)\,\psi$$

$$= \Big[\underset{\downarrow\,1}{\alpha_i^2}\,P_i^2 + \underbrace{(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i)}_{0}\,P_i P_j + \underbrace{(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)}_{0}\,P_i m + \underset{\downarrow\,1}{\beta^2}\,m^2\Big)\,\psi$$

– $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ anticomutam entre si

– $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1$

Representação de Dirac-Pauli:

Matrizes 4x4 : $\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$

σ_i - matrizes de Pauli

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

ψ : spinor de Dirac (matriz coluna de 4 componentes)

Forma covariante da equação de Dirac:

$$i\beta \frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\beta\alpha\cdot\nabla\psi + m\psi$$

$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0}$$

com $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\vec{\alpha})$ matrizes-γ de Dirac

$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

$\gamma_0^\dagger = \gamma^0$; $(\gamma^0)^2 = I$

$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

$\gamma_k^\dagger = -\gamma^k$; $(\gamma^k)^2 = -I$

Corrente conservada :

Tomando o hermítico conjugado da equação de Dirac e multiplicando à direita por γ^0, obtém-se :

$$i\,\partial_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0 \quad , \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$$

spinor adjunto

Da forma habitual obtém-se a equação de continuidade :

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

com

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi$$

Identificando j^μ com uma densidade de carga-corrente :

$$\boxed{j^\mu = -e\,\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi}$$

Spinores da partícula livre

Cada uma das 4 componentes de ψ obedece à equação de Klein-Gordon :

$$\psi = u(\vec{p})\, e^{-ip.x} \quad ; \quad u(\vec{p}) \text{ spinor independente de } x$$

Substituindo na equação de Dirac :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u(\vec{p}) = 0$$

ou $$\boxed{(\not{p} - m)\, u = 0} \qquad (\not{p} = \gamma^\mu p_\mu)$$

Esta equação têm <u>4 soluções</u> :

- 2 soluções com $E>0 \rightarrow$ partícula
- 2 soluções com $E<0 \rightarrow$ antipartícula

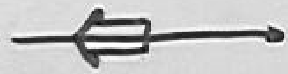
$E>0$ (partícula) $\qquad\qquad$ $E<0$ (antipartícula)

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \dfrac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E+m}\,\chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \dfrac{-\vec{\sigma}.\vec{p}}{|E|+m}\,\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \qquad s=1,2$$

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Helicidade: componente do spin segundo a direcção do movimento

$s=1$ estado próprio de helicidade $\lambda = 1/2$ 

$s=2$ estado próprio de helicidade $\lambda = -1/2$ 

Covariantes bilineares

quantidades da forma $\overline{\Psi}\,(4\times4)\,\Psi$

$\downarrow$

produto de matrizes-γ

Notação:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5 \; ; \; (\gamma^5)^2 = I \; ; \; \gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$$

		nº de comp.	Operação de paridade
Escalar	$\overline{\Psi}\psi$	1	+
Vector	$\overline{\Psi}\gamma^\mu\psi$	4	− (componentes espaciais)
Tensor	$\overline{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	
$\left(\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\right)$			
Vector axial	$\overline{\Psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$	4	+ (componentes espaciais)
Pseudoescalar	$\overline{\Psi}\gamma^5\psi$	1	−

Fermião de massa nula:

$$H\psi = (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\psi \quad \text{eq. de Dirac}$$

se $m=0$ → $H\psi = \vec{\alpha}\cdot\vec{p}\,\psi = E\psi$

é satisfeita por $\alpha_i = \sigma_i$ e $\alpha_i = -\sigma_i$ →

→ a equação pode-se decompor em duas equações <u>desacopladas</u> para os spinores de <u>2 componentes</u> $\chi(\vec{p})$ e $\phi(\vec{p})$

$$\left.\begin{array}{l} E\chi = -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\chi \\ E\phi = \vec{\sigma}\cdot\vec{p}\,\phi \end{array}\right\} \text{ cada equação tem duas soluções: } E>0 \text{ e } E<0$$

χ descreve ν_L e $\bar{\nu}_R$

ϕ descreve ν_R e $\bar{\nu}_L$

ν : neutrino, $m_\nu = 0$

R : helicidade $1/2$

L : helicidade $-1/2$

Mantendo a notação com 4 componentes:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})\,u = E\,u$$

com $u = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$ e $\alpha_i = \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix}$

$\downarrow$

representação de Weyl

Na representação de Weyl

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Tem-se que:

$$\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\,u_\nu = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou seja: $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ seleciona ν_L ou $\bar{\nu}_R$

Electrodinâmica das partículas de spin 1/2 (introdução)

Partícula carregada num campo electromagnético:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu \quad \text{(partícula de carga } -e\text{)}$$

donde:

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = \underbrace{\gamma^0 V}_{\hookrightarrow\, -e\gamma_\mu A^\mu} \psi$$

Amplitude de difusão de um electrão do estado $\psi_i \rightarrow \psi_f$ (1ª ordem):

$$T_{fi} = -i\int \psi_f^\dagger(x)\, V(x)\, \psi_i(x)\, d^4x$$

$$= ie\int \overline{\psi}_f\, \gamma_\mu A^\mu \psi_i\, d^4x$$

$$= -i\int j_\mu^{fi} A^\mu\, d^4x$$

onde:

$$j_\mu^{fi} = -e\,\overline{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i = -e\,\overline{u}_f \gamma_\mu u_i\, e^{i(p_f - p_i)\cdot x}$$

(spin 0: $j_\mu^{fi} = -e(p_f + p_i)_\mu\, e^{i(p_f - p_i)\cdot x}$

Processos não-polarizados (sem informação sobre os estados de spin):

- média sobre os spins das partículas incidentes
- soma sobre os spins das partículas no estado final

$$|\mathcal{M}|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} \equiv \frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)} \sum_{\substack{\text{todos os} \\ \text{estados de} \\ \text{spin}}} |\mathcal{M}|^2$$

s_A e s_B: spin das partículas incidentes