

CAPÍTULO IV - INTRODUÇÃO À MECÂNICA QUÂNTICA RELATIVISTA

- partículas relativistas

- criação de partículas e antipartículas →

⇒ mecânica quântica relativista

1) EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Relação relativista energia-momento : $E^2 = p^2 + m^2$

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi}$$

em notação covariante :

$$\boxed{(\square^2 + m^2) \phi = 0}$$

$$\square^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} ; x^\mu \equiv (t, \vec{x})$$

Relação entre ρ e \vec{j} (densidade de fluxo de partículas)

A conservação da probabilidade implica:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} ds \quad (= \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau)$$

donde:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \text{ eq. de continuidade}$$

Da eq. de Schrödinger para a partícula livre tem-se:

$$\begin{cases} -i\psi^* \left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \right) = 0 \\ -i\psi \left(-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* \right) = 0 \end{cases}$$

Somando as equações obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - i \frac{\hbar}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = 0$$

donde:

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

Densidade de carga e corrente da partícula livre (carga $-e$):

$$j_{\mu} = (j, \vec{j}) = -ie(\phi^* \partial^{\mu} \phi - \phi \partial^{\mu} \phi^*)$$

Solução da eq. de Klein-Gordon:

$$\phi = N e^{i\vec{p}\cdot\vec{x} - iEt} \equiv N e^{-ip\cdot x}$$

substituindo na eq. de K-G resulta:

$$E = \pm (p^2 + m^2)^{1/2} \quad \text{soluções com } E \text{ negativo}$$

Densidade de carga e corrente:

$$j^{\mu}(e^-) = -2e |N|^2 (E, \vec{p})$$

→ Interpretação das soluções $E < 0$ (Feynman, Stückelberg)

Soluções com $E < 0$ denotam:

- partículas (com energia negativa) deslocando-se no sentido negativo do eixo dos tempos
- ou
- antipartículas (com energia positiva) deslocando-se no sentido positivo do eixo dos tempos.

de facto:

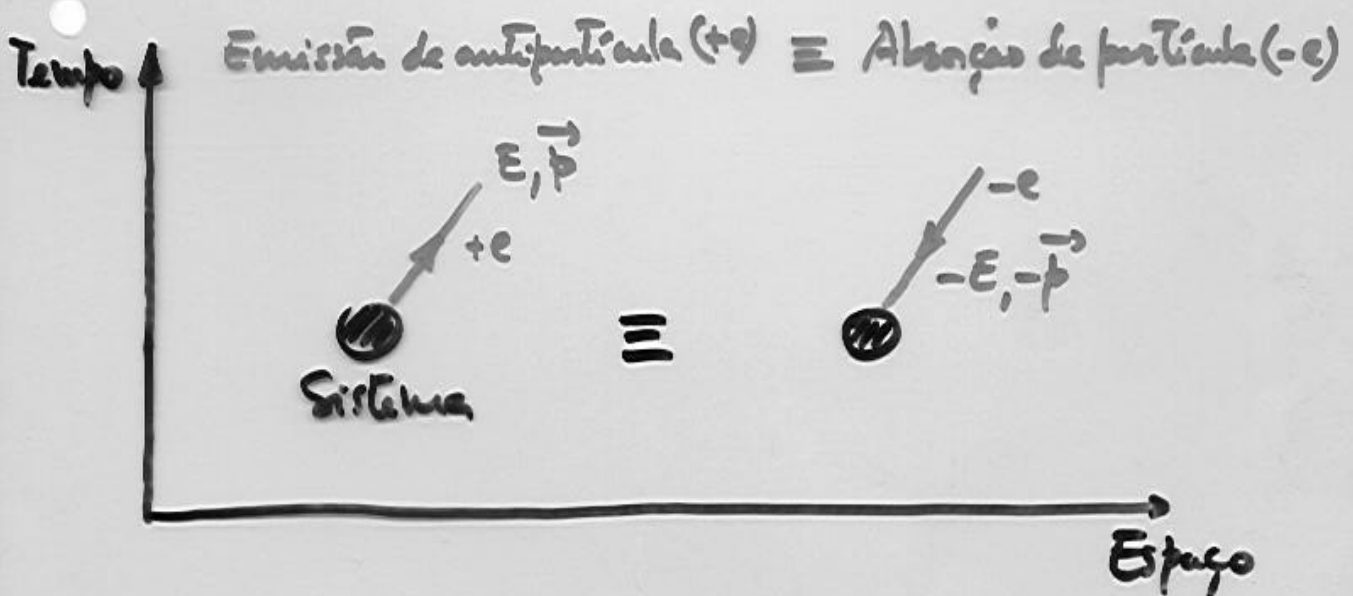
→ $\phi \sim e^{-iEt} \sim e^{-i(-E)(-t)} \Rightarrow$ soluções de energia negativa são equivalentes a soluções de energia positiva com o sentido do tempo invertido

→ a densidade de carga-corrente da antipartícula (e^+):

$$j^\mu(e^+) = 2e |N|^2 (E, \vec{p}) = -2e |N|^2 (-E, -\vec{p})$$

• é equivalente à densidade de carga-corrente da partícula (e^-) com energia-impulsão $(-E, -\vec{p})$

A emissão de uma antipartícula com energia E e momento \vec{p} é equivalente à absorção de uma partícula de energia $-E$ e momento $-\vec{p}$



2) TEORIA DAS PERTURBAÇÕES

Conhecem-se as soluções da eq. de Schrödinger para a partícula livre:

$$H_0 \phi_n = E_n \phi_n \quad \text{com} \quad \int_V \phi_m^* \phi_n d^3x = \delta_{mn}$$

Partícula em presença de um potencial de interação:

$$[H_0 + V(\vec{x}, t)] \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1)$$

as soluções são da forma:

$$\psi = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{x}) e^{-iE_n t} \quad (2)$$

Determinação dos coeficientes $a_n(t)$:

substituindo (2) em (1), multiplicando por ϕ_f^* e integrando no volume V obtêm-se

$$\frac{da_f}{dt} = -i \sum_n a_n(t) \underbrace{\int_V \phi_f^* V \phi_n d^3x}_{V_{fn}} e^{i(E_f - E_n)t}$$

Condições iniciais (antes da interação com V):

$$a_i(-T/2) = 1$$

$$a_n(-T/2) = 0 \quad \text{para } n \neq i$$

$$\text{e } \frac{da_f}{dt} = -i \int d^3x \phi_f^* V \phi_i e^{i(\epsilon_f - \epsilon_i)t}$$

Se V pequeno e transitório considera-se que em primeira aproximação estas condições permanecem válidas para todos os tempos:

$$a_f(t) = -i \int_{-T/2}^t dt' \int d^3x \phi_f^* V \phi_i e^{i(\epsilon_f - \epsilon_i)t'}$$

desde que $a_f(t) \ll 1$

Após a interação ter cessado ($t = T/2$):

$$T_{fi} \equiv a_f(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3x [\phi_f^*(\vec{x}) e^{-i\epsilon_f t}] V(\vec{x}, t) [\phi_i(\vec{x}) e^{-i\epsilon_i t}]$$

$$\boxed{T_{fi} \equiv -i \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x)} \quad \downarrow$$

forma covariante

Quando V é independente de t :

$$T_{fi} = -i V_{fi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(E_f - E_i)t} =$$

$$= -2\pi i V_{fi} \underbrace{\delta(E_f - E_i)}$$

↑ conservação de energia
na transição $i \rightarrow f$

Probabilidade de transição $i \rightarrow f$ por unidade de tempo:

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$$

Integrando sobre os estados finais:

$$W_{fi} = 2\pi \int dE_f \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$$

ou $W_{fi} = 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i)$ regra de ouro de Fermi

$\rho(E_f)$ densidade de estados finais

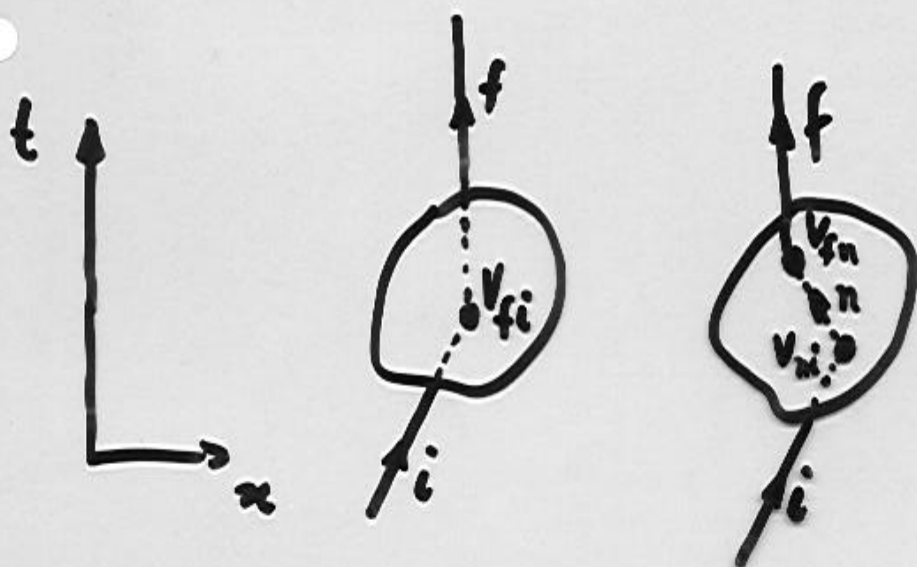
$\rho(E_f) dE_f$: número de estados finais no
intervalo de energia $E_f, E_f + dE_f$

Correcção de 2ª ordem

$$V_{fi} \rightarrow V_{fi} + \underbrace{\sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni}}_{2^{\text{ª}} \text{ ordem}} + \dots$$

série perturbativa

↑
1ª ordem ↑
2ª ordem



V_{fn}, V_{ni} factores de vértice da interacção

$\frac{1}{(E_i - E_n)}$ factor do propagador dos estados intermédios.

3) ELECTRODINÂMICA DE PARTÍCULAS SEM SPIN

A equação de Klein-Gordon descreve partículas e antipartículas de spin 0 : objectos fictícios

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0$$

Electrodinâmica clássica : o movimento de uma partícula de carga $-e$ num potencial electro-magnético $A_\mu = (A^0, \vec{A})$ é obtido fazendo a substituição :

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + e A^\mu$$

Em mecânica quântica :

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + e A^\mu \quad \text{relação funda-} \\ \text{mental em QED}$$

A equação de Klein-Gordon transforma-se em :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = -V \phi$$

sendo V a perturbação electromagnética

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - \underbrace{e^2 A^2}$$

↓ despreze-se em
1ª aproximação

Amplitude de difusão :

$$T_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) \quad (1^{\text{a}} \text{ ordem})$$

$$= i \int d^4x \phi_f^* ie(A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \phi_i$$

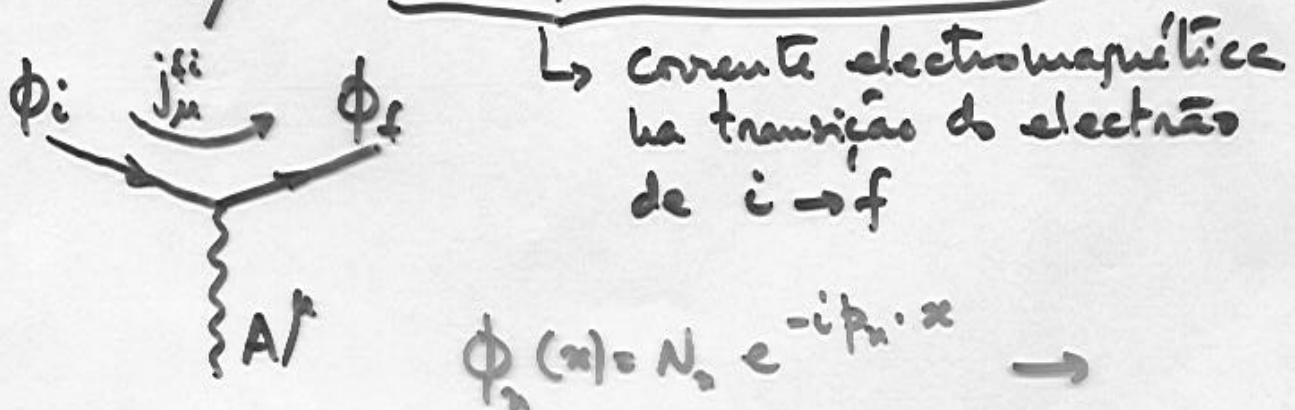
$$= -e \int d^4x \phi_f^* \partial_\mu (A^\mu \phi_i) - e \int d^4x \phi_f^* A^\mu \partial_\mu \phi_i$$

$$= e \int d^4x \partial_\mu (\phi_f^*) A^\mu \phi_i - e \int d^4x \phi_f^* A^\mu \partial_\mu \phi_i$$

$$= e \int d^4x [(\partial_\mu \phi_f^*) \phi_i - \phi_f^* \partial_\mu \phi_i] A^\mu$$

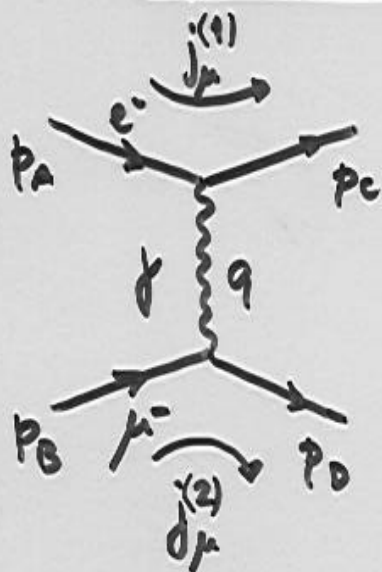
$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu^{fi} A^\mu$$

com $j_\mu^{fi}(x) = -ie(\phi_f^* \partial_\mu \phi_i - (\partial_\mu \phi_f^*) \phi_i)$



$$\rightarrow j_\mu^{fi} = -e N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x}$$

Difusão electrão-muão (partículas sem spin)



Relação entre A_μ e a sua fonte (o muão):

$$\square^2 A^\mu = j^{(2)\mu} \rightarrow \text{eq. de Maxwell}$$

$$\text{com } j^{(2)\mu} = -e N_B N_D (p_D + p_B)^\mu e^{i(p_D - p_B) \cdot x}$$

- Como $\square^2 e^{iq \cdot x} = -q^2 e^{iq \cdot x}$ a solução das equações de Maxwell será:

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j^{(2)\mu} \quad \text{com } q = p_D - p_B$$

donde:

$$T_{fi} = -i \int j^{(1)\mu}(x) \left(-\frac{1}{q^2}\right) j^{(2)\mu} d^4x$$

integrando em x :

$$T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(E_f - E_i)t} = 2\pi \delta(E_f - E_i) \right)$$

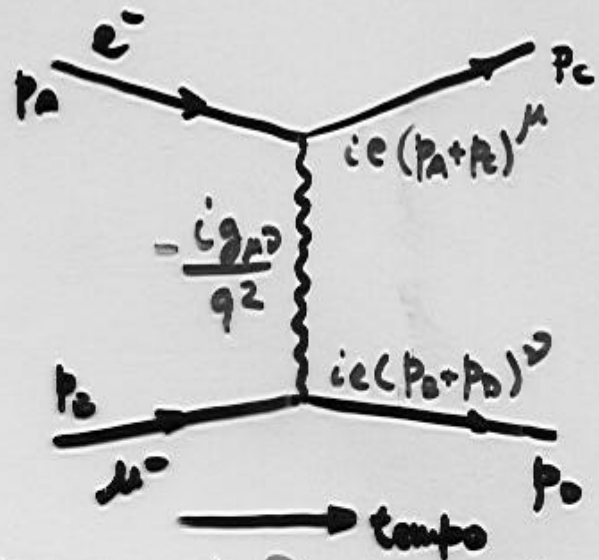
$$-i \mathcal{M} = [ie(p_A + p_C)^\mu] \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) [ie(p_B + p_D)^\nu]$$

↑ amplitude invariante

$\delta^{(4)}$: conservação de energia-impulsão

$$-iM = [ie(p_A + p_C)^\mu] \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2}\right) [ie(p_B + p_D)^\nu]$$

Factor de vértice e
propagadores :



(Diagrama de Feynman de
1.^a ordem)

→ $q = p_D - p_B$ determinado por conservação
do quadrimomento nos vértices

→ $q^2 \neq 0$: fóton virtual

Secção eficaz em termos da amplitude invariante:

Fixar a normalização da função de onda

$$\phi = N e^{-i p \cdot x}$$

Obter-se $p = 2E|N|^2$; $p d^3x$ invariante

Trabalhando num volume V :

$$\int_V p dV = \int_V 2E|N|^2 dV = 2E \underbrace{|N|^2 V}_{=1 \text{ (arbitrário)}}$$

$$\rightarrow N = 1/\sqrt{V}$$

Taxa de transição $A+B \rightarrow C+D$ por unidade de volume

$$W_{fi} = \frac{|T_{fi}|^2}{TV} = (2\pi)^4 \frac{\delta^{(4)}(p_c + p_d - p_a - p_b) |M|^2}{V^4}$$

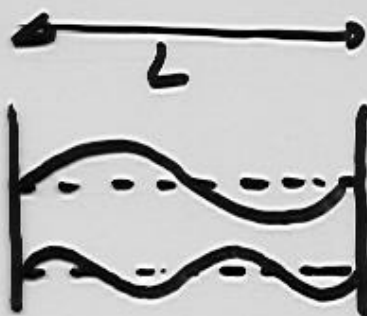
Secção eficaz (probabilidade intrínseca de difusão):

$$\sigma = \frac{W_{fi}}{\text{fluxo inicial}} \times \text{número de estados finais}$$

Nº de estados finais no volume V (1 partícula)

$$L = n \cdot \lambda =$$

$$= n \frac{2\pi}{p} \quad (h=1)$$



$$n = \frac{pL}{2\pi} \rightarrow dn = \frac{L}{2\pi} dp$$

a 3ª dimensão:

$$dn_x dn_y dn_z = \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3p = \frac{V d^3p}{(2\pi)^3}$$

Normalização $\rightarrow 2E$ partículas no volume V

$$\rightarrow \frac{V d^3p}{(2\pi)^3 2E}$$

Fluxo inicial :

(no ref. do laboratório)

$$|v_x| \frac{2E_A}{V}$$

feixe por unidade
de área e de tempo

$$\frac{2E_B}{V}$$

partícula alvo por
unidade de volume

donde :

$$d\sigma = \frac{v^2}{|\vec{v}_A| 2E_A 2E_B} \frac{1}{v^4} |m|^2 \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \delta^{(4)}(k+p_0 - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{2E_C} \frac{d^3 p_D}{2E_D} v^2$$

Simbolicamente

$$d\sigma = \frac{|m|^2}{F} dQ$$

dQ : factor de espacio de fases (invariante)

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_C + p_D - p_A - p_B) \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3 2E_D}$$

F : factor de flujo

no Laboratorio: $F = |\vec{v}_A| 2E_A 2E_B$ con $v_A = p_A/E_A$

En general : $F = |\vec{v}_A - \vec{v}_B| \cdot 2E_A 2E_B$
(Colisión colineales)

$$= 4(|p_A|E_B + |p_B|E_A)$$

$$= 4 \left((p_A - p_B)^2 - m_A^2 m_B^2 \right)^{1/2}$$

invariante

⇒ Sección eficaz : invariante de Lorentz.

Taxa de decaimento em termos de M :

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_A} |M|^2 \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \dots \frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_A - p_1 - \dots - p_n)$$

$$\Gamma = \int d\Gamma$$

vide média $Z = \Gamma^{-1}$