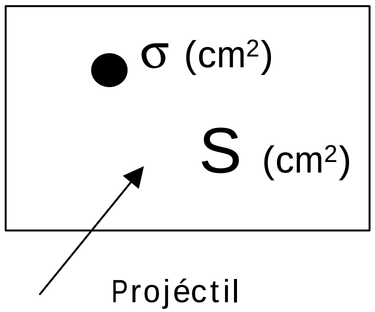
Interacções e Secção Eficaz (1)

Exemplo simples: uma partícula alvo



Probabilidade de atingir o alvo = σ / S

No colisões/seg = No projécteis/seg x σ / S

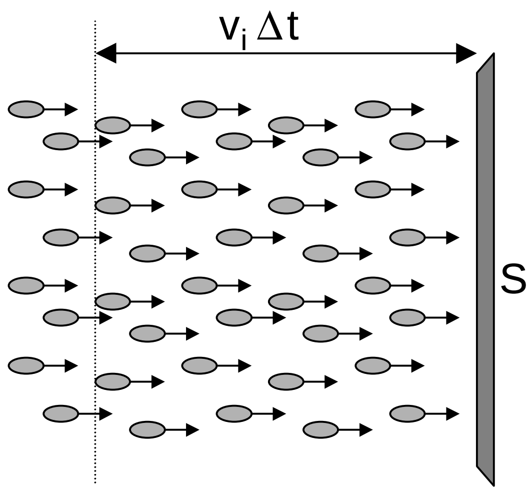
= No projécteis/seg/S x σ

$$N = \Phi \times \sigma \quad (s^{-1})$$

σ - secção eficaz (cm^2)

Φ - fluxo partículas incidentes ($s^{-1}\ cm^{-2}$)

Fluxo incidente



n_a = número de partículas incidentes por unidade volume

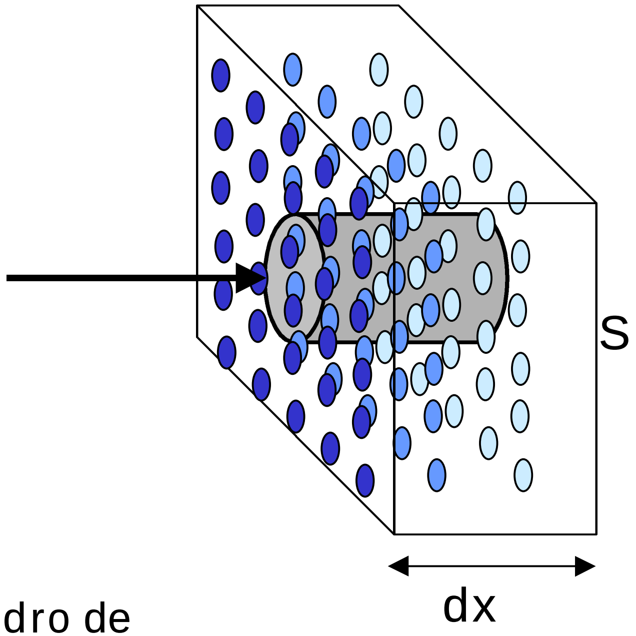
v_i = velocidade das partículas incidentes

Δt = intervalo de tempo

$$\Phi = n_a (S v_i \Delta t) / A \Delta t = n_a v_i$$

Interacções e Secção Eficaz (2)

Alvo com n_b partículas por unidade de volume



W = No colisões/sec/Area

$$= \frac{\Phi s}{S} \times (\text{No de partículas alvo})$$

$$= \frac{\Phi s}{S} \times (n_b.S.dx) = \Phi \;.\; \sigma \;.\; \underbrace{n_b.dx}$$

No partículas alvo no cilindro de comprimento dx e com uma unidade de área na base

Válido para alvos de espessura elementar dx

Interacções e Secção Eficaz (3)

Absorção do feixe incidente no alvo

Diminuição do fluxo incidente devido às interacções na espessura dx:

$$d\Phi = -W = -\Phi\,\sigma\,n_b\,dx$$

integrando:

$$\boxed{\Phi(x) = \Phi_0 \cdot e^{-s n_b x} = \Phi_0 \cdot e^{-x/L_{abs}}}$$

Comprimento de absorção (ou livre percurso médio):

$$L_{abs} = (\sigma\, n_b)^{-1} \qquad \text{(cm)}$$

Coeficiente de absorção linear

$$\mu = 1/L_{abs} \qquad (\text{cm}^{-1})$$

Interacções e Secção Eficaz (4)

A espessura do alvo pode ser medida em $g.cm^{-2}$:

$X = \rho.\ L$, sendo L a espessura (cm) e ρ a densidade ($g.cm^{-3}$)

Coeficiente de absorção de massa:

$\mu_m = \mu / \rho \quad (cm^2\ g^{-1})$

Número de partículas difusoras:

caso da interacção com átomos ou núcleos na matéria

$n_b = \rho.N_A / A$

caso da interacção com electrões atómicos

$n_b = Z.\rho.N_A / A$

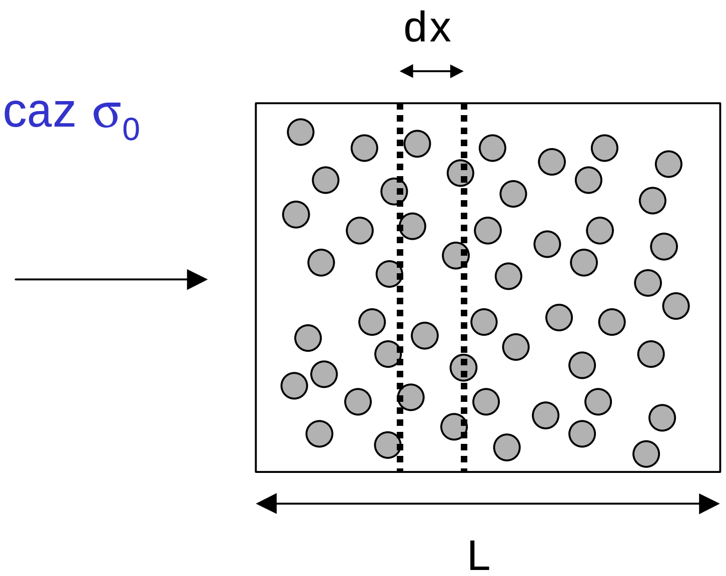
N_A - Número de Avogadro

A - Número de massa (g)

Z - Número atómico

Interacções e Secção Eficaz (5)

Taxa de produção de um mecanismo de secção eficaz σ_0 num alvo de espessura L



Colisões/area/seg no elemento dx:

$$dW = \Phi(x)\ \ \sigma_0 n_b\ dx$$

$$\boxed{W = \int_0^L \Phi(x)\cdot s_0 n_b \cdot dx = \Phi_0 \cdot s_0 n_b \cdot L_{eq}}$$

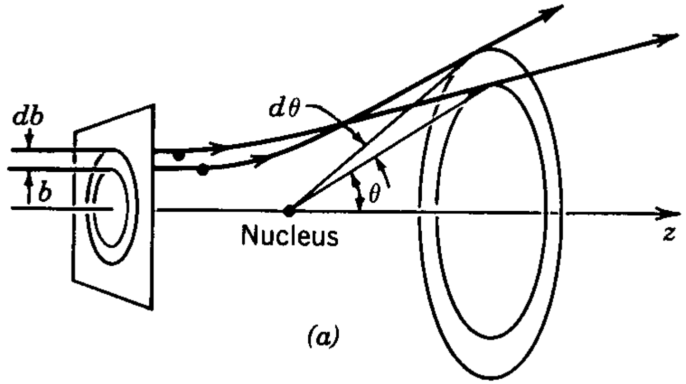
$$L_{eq} = L_{abs}\cdot\left(1 - e^{-L/L_{abs}}\right)$$ Comprimento equivalente do alvo

Se $L \ll L_{abs} \Rightarrow L_{eq}\quad L$

Secção Eficaz Diferencial

Partículas com parâmetro de impacto entre b e b+db têm ângulos de difusão entre θ e θ+dθ

A função θ= θ(b) depende da lei de interacção



Secção eficaz diferencial:

dσ=2πb.db (área da coroa circular de raio b e espessura db)

Angulo sólido (steradianos-sr)

dΩ=senθ.dθ.dϕ

Usando a função θ= θ(b):

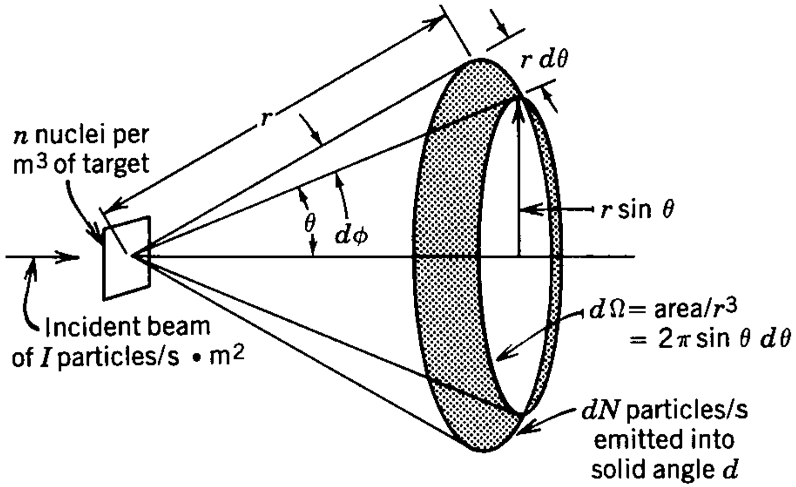
$$ds = 2pb\left|\frac{db}{dq}\right|dq$$

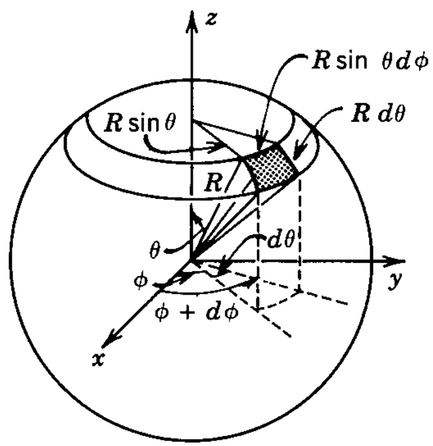
Integrando em ϕ

dΩ=2 π senθ.dθ

Donde

$$\boxed{\frac{ds}{d\Omega} = \frac{b(q)}{senq}\left|\frac{db}{dq}\right|}$$





TRANSFORMAÇÃO DE SECÇÕES EFICAZES DIFERENCIAIS; JACOBIANOS

Dois conjuntos de coordenadas num espaço n-dimensional:

$$x_1 \cdots x_n \quad e \quad y_1 \cdots y_n$$

Transformações:

$$x_i = x_i(y_1 \cdots y_n)$$

$$y_k = y_k(x_1 \cdots x_n)$$

Tem-se:

$$\int_{R_x}\!\!\cdots\!\int f[x_1 \cdots x_n]\, dx_1 \cdots dx_n = \int_{R_y}\!\!\cdots\!\int f[x_1(y_1 \cdots y_n) \ldots x_n(y_1 \cdots y_n)] \times$$

$$\times \frac{\partial(x_1 \cdots \partial x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)}\, dy_1 \cdots dy_n$$

com:

$$\frac{\partial(x_1 \cdots x_n)}{\partial(y_1 \cdots y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_n} & \cdots & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \rightarrow \text{Jacobiano (determinante)}$$

O Jacobiano exprime a diferença entre o elemento de volume $dy_1 \cdots dy_n$ e o elemento $dx_1 \cdots dx_n$

Secções eficazes diferenciais:

$\frac{\partial^3 \sigma}{\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3} dp_1\, dp_2\, dp_3$: (Proporcional ao) número de partículas (de dado tipo) produzidas no elemento de volume $dp_1\, dp_2\, dp_3$ do espaço dos momentos (por colisão).

Exprimir a secção eficaz em termos de $\underline{p}$ e $\underline{\Omega}$ (ângulo sólido)

$$dp_1\, dp_2\, dp_3 = p^2 \operatorname{sen}\theta \; dp\, d\theta\, d\varphi$$

$$\frac{\partial(p_1 p_2 p_3)}{\partial(p\,\theta\,\varphi)} = p^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{d^3\sigma}{\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3} dp_1\, dp_2\, dp_3 = \frac{\partial^3\sigma(p_1(p\theta\varphi), \cdots)}{\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3} \frac{\partial(p_1 p_2 p_3)}{\partial(p\,\theta\,\varphi)} dp\, d\theta\, d\varphi$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\frac{\partial^3\sigma}{\partial p_1 \partial p_2 \partial p_3} p^2}_{\frac{\partial^2\sigma(p,\theta,\varphi)}{\partial p\, \partial\Omega}} \underbrace{\operatorname{sen}\theta \; dp\, d\theta\, d\varphi}_{dp\, d\Omega}$$

Transformação de secções eficazes de $K' \rightarrow K$

K, K' movendo-se ao longo de z:

$$p_3 = \gamma\left[p'_3 + \beta E'\right] \qquad p'_3 = \gamma\left[p_3 - \beta E\right]$$

$$E = \gamma\left[E' + \beta p'_3\right] \qquad E' = \gamma\left[E - \beta p_3\right]$$

A física não depende do referencial:

$$\frac{\partial^2\sigma(p,\theta,\varphi)}{\partial p\,\partial\Omega}\,dp\,d\Omega = \frac{\partial^2\sigma'(p'\theta'\varphi')}{\partial p'\,\partial\Omega'}\,dp'\,d\Omega'$$

$$\frac{\partial^2\sigma'(p'\theta'\varphi')}{\partial p'\,\partial\Omega'} = \frac{\partial^2\sigma(p\,\theta\,\varphi)}{\partial p\,\partial\Omega}\,\frac{\partial(p\,\Omega)}{\partial(p'\Omega')}$$

Cálculo de $\dfrac{\partial(p\Omega)}{\partial(p'\Omega')}$:

$$p\Omega \rightarrow p\theta\varphi \rightarrow p_1 p_2 p_3 \rightarrow p'_1 p'_2 p'_3 \rightarrow p'\theta'\varphi' \rightarrow p'\Omega'$$

$$\underbrace{\frac{\partial(p\Omega)}{\partial(p\theta\varphi)}}_{\operatorname{sen}\theta}\cdot\underbrace{\frac{\partial(p\theta\varphi)}{\partial(p_1p_2p_3)}}_{\frac{1}{p^2\operatorname{sen}\theta}}\cdot\frac{\partial(p_1p_2p_3)}{\partial(p'_1p'_2p'_3)}\cdot\underbrace{\frac{\partial(p'_1p'_2p'_3)}{\partial(p'\theta'\varphi')}}_{p'^2\operatorname{sen}\theta'}\cdot\underbrace{\frac{\partial(p'\theta'\varphi')}{\partial(p'\Omega')}}_{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta'}} = \frac{\partial(p\Omega)}{\partial(p'\Omega')}$$

$$\frac{\partial(p_1p_2p_3)}{\partial(p'_1p'_2p'_3)} = \frac{\partial p_3}{\partial p'_3} = \gamma + \gamma\beta\frac{\partial E'}{\partial p'_3} = \gamma + \gamma\beta\frac{p'_3}{E'} = \frac{E}{E'}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(p\Omega)}{\partial(p'\Omega')} = \frac{p'^2\,E}{p^2\,E'}$$