CINEMÁTICA RELATIVISTA

‖ A VELOCIDADE DA LUZ É A MESMA EM TODOS OS REFERENCIAIS DE INÉRCIA ‖

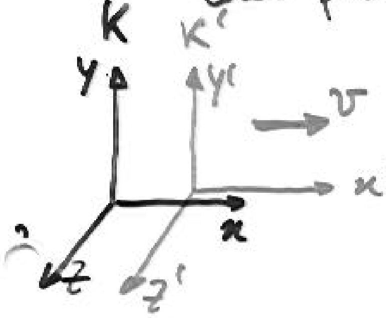
COORDENADAS ESPAÇO-TEMPO

$$\tilde{x} \equiv (ct, x, y, z)$$

TRANSFORMAÇÃO DE LORENTZ

$$x' = \Lambda x$$

Caso particular:



$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

INVARIANTES RELATIVISTAS

Acontecimentos P_1 e P_2:

$P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1, t_1)$ → Envio de sinal luminoso

$P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2, t_2)$ → Recepção do sinal luminoso

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2} = c\,(t_2 - t_1) \qquad K$$

$$(x'_2-x'_1)^2 + (y'_2-y'_1)^2 + (z'_2-z'_1)^2 = c^2\,(t'_2-t'_1)^2 \qquad K'$$

↓

c = constante em todos referenciais de inércia

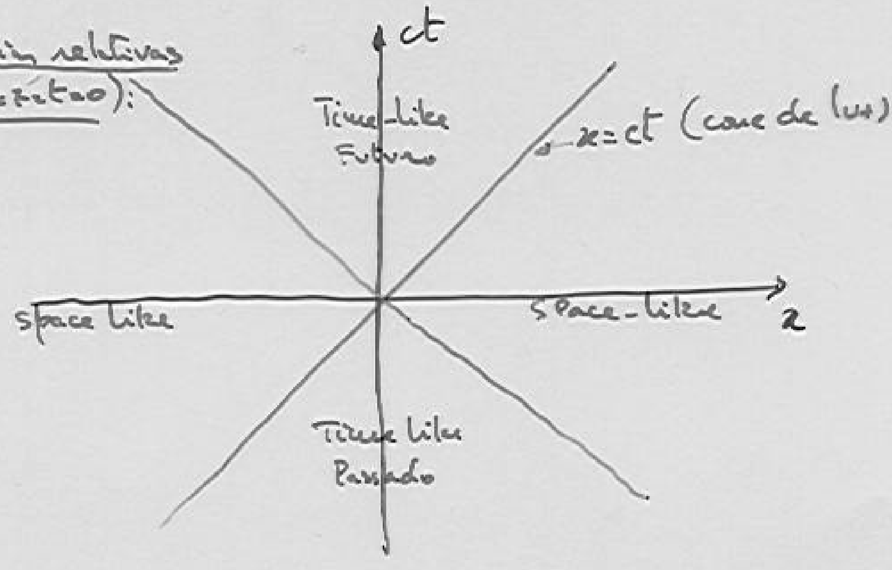
$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta s'^2 = 0$$

Generalização : $\Delta s^2 = \Delta s'^2$ INVARIANTE RELATIVISTA

- $\Delta s^2 < 0$ → distância 'space-like'
- $\Delta s^2 > 0$ → Distância 'time-like'
- $\Delta s^2 = 0$ → cone de luz

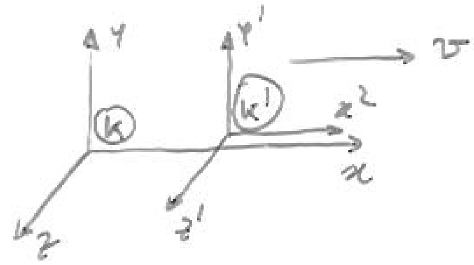
Distâncias relativas a $(x=y=z=t=0)$:



$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$$

TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ:

Referenciais K e K':



$\Delta y = \Delta y'$
$\Delta z = \Delta z'$

$\Delta S^2 = \Delta S'^2 \Rightarrow$ Invariância no plano $x-t$

$\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = -(\Delta x^2 + \Delta \tau^2)$; $\tau = ict$

Rotação no plano $x-\tau$ (ângulo α)

$x = x'\cos\alpha - \tau'\,\mathrm{sen}\,\alpha$
$\tau = x'\,\mathrm{sen}\,\alpha + \tau'\cos\alpha$

Caso particular: movimento da origem de K':

visto de K: x, τ
visto de K': $x'=0, \tau'$

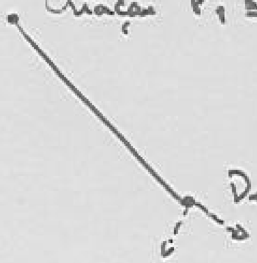
$\Rightarrow$ $x = -\tau'\,\mathrm{sen}\,\alpha$ $\rightarrow$ $\dfrac{x}{\tau} = -\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{v}{ic} \equiv -i\beta$
$\tau = \tau'\cos\alpha$

; $\beta = \dfrac{v}{c}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma$

$\mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} \equiv \dfrac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = i\beta\gamma$

DECAIMENTO :



Criação $P_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$

Decaimento $P_2 = (x_2\ y_2\ z_2\ t_2)$

No Laboratório : $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$

No ref. próprio : $\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2$

$$\Rightarrow c \Delta t'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{c^2 \Delta t^2}} = \Delta t \sqrt{1 - \beta^2} \quad ; \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$\rightarrow \Delta t = \Delta t' \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Delta t' \cdot \gamma$$

TEMPO PRÓPRIO:

Definição: $ds = c\,d\tau$

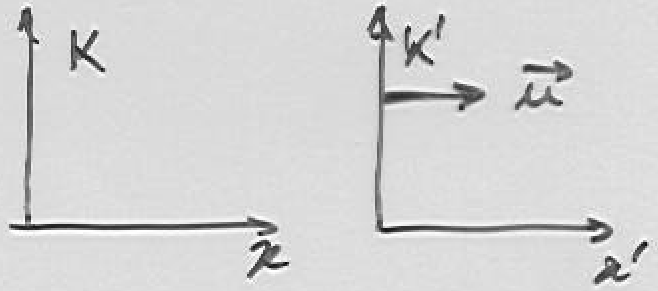
$$ds = \left(c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\right)^{1/2} =$$

$$= c\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt$$

$$= \frac{c}{\gamma}\, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{d\tau = \frac{dt}{\gamma}}$$

TRANSFORMAÇÕES DE VELOCIDADES:

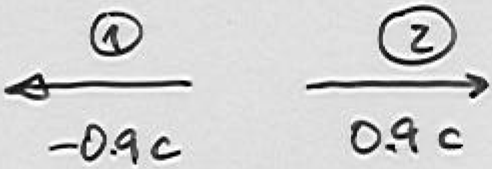


$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + u\, v'_x / c^2}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + u\, v'_x / c^2\right)}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + u\, v'_x / c^2\right)}$$

ex: Calcular a velocidade de 1 relativa a 2



QUADRIVECTORES

- Quadrivector espaço-tempo x^μ

$$x \to x^1 ,\ y \to x^2 ,\ z \to x^3 ,\ ct \to x^0$$

Invariante :

$$(x^0)^2 - \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2 \quad \text{ou} \quad \sum_{\nu=0}^{3} \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

sendo $g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ tensor da métrica

- Quadrivector a^μ :

Objecto que obedece às eq.s da transf. de Lorentz

Quadrado do quadrivector a^μ:

$$a^2 \equiv g_{\mu\nu} a^\mu a^\nu$$ invariante relativista

Produto interno de quadrivectores

$$a \cdot b \equiv g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$ invariante

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 a \cdot b + b^2$$

$(a+b)^2, a^2, b^2$ invariantes $\Rightarrow$ $a \cdot b$ invariante

Notação : $a^0 = a_0$; $a^i = -a_i$ $\Rightarrow$ $a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu$

QUADRIVECTORES $(c=1)$

- ENERGIA - MOMENTO

$$p = \{E, \vec{p}\} \qquad p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$$

m - massa invariante

- DENSIDADE DE CORRENTE

$$J = \{\rho, \rho\vec{v}\} \qquad J^2 = \rho_0^2$$

ρ_0 - densidade de carga no referencial próprio

- QUADRIVECTOR VELOCIDADE

$$v = \{\gamma c, \gamma\vec{v}\} \qquad v^2 = c^2$$

DINÂMICA RELATIVISTA :

Quadri-vector velocidade :

definição $\longrightarrow$ $$\underset{\sim}{v} = \frac{d\underset{\sim}{x}}{d\tau}$$ τ - tempo próprio

$$\underset{\sim}{v} = \frac{d}{d\tau}(ct, \vec{r}) = \gamma \frac{d}{dt}(ct, \vec{r}) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

$$\underset{\sim}{v}^2 = c^2$$

Quadri-vector energia-impulsão :

definição: $$\underset{\sim}{p} = m\underset{\sim}{v} = (\gamma mc, \gamma m\vec{v})$$

$$\underset{\sim}{p}^2 = m^2c^2$$

para $v \ll c$:

$$\gamma mc = mc(1-\beta^2)^{-1/2} \simeq mc\left(1+\frac{\beta^2}{2}\right) = mc + \frac{mv^2}{2c}$$

$$= \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right)$$

$\hookrightarrow$ energia cinética

$$\Rightarrow \gamma mc = \frac{E}{c}$$

$$\underset{\sim}{p} = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$$

Em dinâmica relativista :

- $$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{c/} \quad \vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

[$\vec{F}$ e $\vec{a}$ não são colineares

$$\sum \vec{F} = \gamma m \vec{a} + m \vec{v} \frac{d\gamma}{dt}$$]

- $$\underbrace{\sum \vec{F} \cdot \vec{v}}_{\text{potência}} = \vec{v} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m c^2) \quad *$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \gamma m c^2}$$

Energia cinética : $E_c = E - mc^2 = (\gamma - 1) mc^2$

Energia própria : $E_p = mc^2$

$$* \quad \underset{\sim}{p}^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 c^2$$

$$\gamma m c \, d(\gamma m c) - \vec{p} \cdot d\vec{p} = 0$$

$$d(\gamma m c^2) = \vec{v} \cdot d\vec{p}$$

REFERENCIAL DO CENTRO DE MASSA

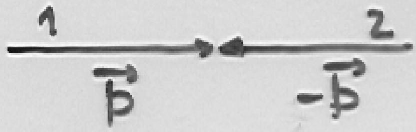
Descrição da colisão de partículas

- Referencial do Laboratório

  $P_1=\{E_1,\vec{p}_1\}$, $P_2=\{E_2,\vec{p}_2\}$

- Referencial do Centro de Massa

  $P_1^*=\{E_1^*,\vec{p}^*\}$, $P_2^*=\{E_2^*,-\vec{p}^*\}$



Quadrivector do sistema 1-2 no Centro de Massa:

- $P^*_{1-2}=P_1^*+P_2^*=\{E_1^*+E_2^*, 0\}=\{E^*,0\}$

  $E^*=E_1^*+E_2^*$: Energia da colisão no Centro de Massa (CM)

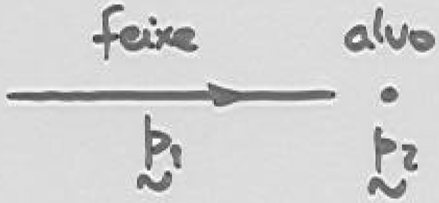
- $(P^*_{1-2})^2={E^*}^2=s$ → o quadrado da energia no CM é o quadrado do quadrivector P^*_{1-2}

- Invariância : $(P^*_{1-2})^2=P_{1-2}^2=(P_1+P_2)^2=(E_1+E_2)^2-(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2=M^2$

O SISTEMA DE DUAS PARTÍCULAS P_1 E P_2 É EQUIVALENTE A UMA PARTÍCULA DE QUADRIMOMENTO P_{1-2} E MASSA M.

6) Energia no centro de massa da colisão partícula - alvo fixo

$\underset{\sim}{p}_1 = \{ \varepsilon_1 , \vec{p}_1 \}$



$\underset{\sim}{p}_2 = \{ m_2 , 0 \}$

$$E_{CM}^2 = \underline{\underline{s}} = (\underset{\sim}{p}_1 + \underset{\sim}{p}_2)^2 = \{ \varepsilon_1 + m_2 , \vec{p}_1 \}^2$$

$$= (\varepsilon_1 + m_2)^2 - p_1^2 \qquad \varepsilon_1^2 = p_1^2 + m_1^2$$

$$= m_1^2 + m_2^2 + 2 \varepsilon_1 m_2$$

se $m_1, m_2 \ll \varepsilon_1$ então $\boxed{s \simeq 2 p_1 m_2}$

Exemplo:

SPS CERN : protões de 450 GeV contra hidrogénio

colisão pp $\sqrt{s} = \sqrt{2 \times 450 \times m_p} \simeq 29$ GeV

equivalente a anel de colisão 2×14.5 GeV

Relações importantes:

→ Qualquer quadrimomento pode escrever-se na forma ($c=1$):

$$\vec{p} = m\vec{\beta}\gamma \qquad \text{c/} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ , \ \beta = \frac{v}{c}$$
$$\mathcal{E} = m\gamma$$

donde:

$$\beta = \frac{p}{m\gamma} = \frac{p}{E}$$

$$\gamma = \frac{E}{m}$$

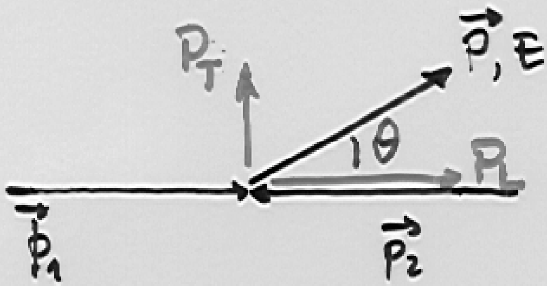
→ Velocidade do CM visto do laboratório:

$$\vec{\beta}_{CM} = \frac{\vec{P}}{E} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}$$

γ correspondente:

$$\gamma_{CM} = \frac{\mathcal{E}}{M} = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{\sqrt{(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)^2 - (\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2}}$$

VARIÁVEIS USADAS NA DESCRIÇÃO DE COLISÕES:



(Centro de Massa)

Reacções inelásticas

variáveis usadas na caracterização das partículas produzidas

p_T momento transverso

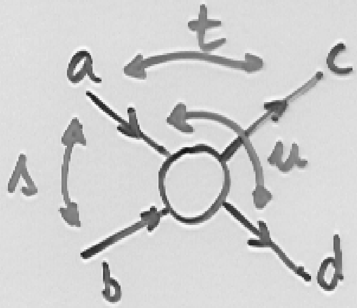
$y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_L}{E - p_L}$ rapidez

$\eta = -\ln \operatorname{tg} \theta/2$ pseudo rapidez

$x_F = p_L / p_{L\,\text{maximo}} \simeq \frac{2\, p_L}{\sqrt{s}}$ x_F: Feynman

descrevem a componente longitudinal p_L.

PROCESSOS A DOIS CORPOS



$s = (p_a + p_b)^2 = E_{cm}^2$

$t = (p_a - p_b)^2 \xrightarrow{\text{elástico}} \simeq -(p\,\theta)^2$

$u = (p_a - p_d)^2 \quad \leq 0$

$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$