Interacção com electrões atómicos (cinemática)

Colisão de partícula pesada **não-relativista** com um electrão:

$$\frac{1}{2}Mv_i^2 - \frac{1}{2}Mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_e^2$$

$$M\vec{v}_i = M\vec{v}_f + m\vec{v}_e$$

$$M >> m$$

Conservação de energia-momento

Transferência máxima de energia quando v_i, v_f e v_e são paralelos:

$$v_i - v_f = \frac{m}{M}v_e$$

M>>m implica $v_i \approx v_f$, donde $\quad v_i + v_f \approx 2v_i$

Substituindo em $\quad \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{1}{2}M(v_i - v_f)(v_i + v_f)$

Resulta

$$\boxed{\begin{array}{l} v_e \approx 2v_i \\ E_e \approx \dfrac{4mE_i}{M} \end{array}}$$

A energia máxima transferida ao electrão é uma pequena fracção da energia incidente

Exemplo: Partícula a de energia 1 MeV

M_α=3800 MeV

m_e=0.511 MeV

$\Rightarrow$ E_e^{max}=540 eV $\Rightarrow$ E_e/E_i = 4m/M= 1/2000

Em cada colisão a partícula α perde no máximo 1/2000 da sua energia.

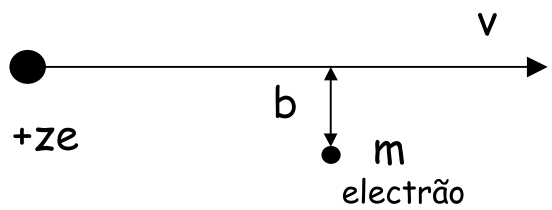
A partícula colide com os electrões atómicos um grande número de vezes antes de parar.

E_e > Energia de ionização implica **criação de pares ião-electrão**

(e.g. Argon, energia de ligação do electrão exterior = 16 eV)

Perda de Energia por Colisão com os Electrões Atómicos (1)

Estimação da energia depositada por unidade de comprimento dE/dx, por um projéctil de energia E ao atravessar um material



Impulsão aplicada a um electrão situado à distância b da trajectória:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F \cdot dt \qquad (kg.m/s)$$

F - força electrostática exercida no electrão

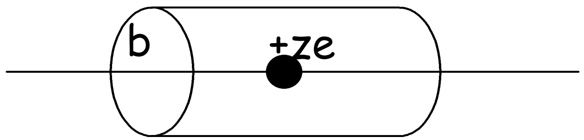
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (-eE) \cdot (dx/v)$$

E - campo eléctrico; assume-se v constante

$$I_{\perp} = -\frac{e}{v} \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp} dx$$

A componente longitudinal anula-se na integração

No referencial da partícula incidente a lei de Gauss diz:



$$\int_S E_{\perp} dA = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\perp}(2\pi b) dx = \frac{ze}{\varepsilon_0} \qquad (N.m^2/C)$$

Integral no cilindro de raio b e comprimento infinito

ε_0 - permissividade do espaço livre

8.85×10^{-12} no S.I. ; dimensões: $T^2Q^2M^{-1}L^{-3}$

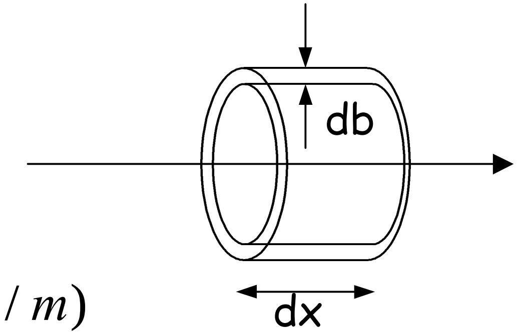
Donde: $$I_{\perp} = -\frac{ze^2}{2\pi b v \varepsilon_0}$$, igual ao momento adquirido pelo electrão

Energia adquirida pelo electrão

$$E_e = p_{\perp}^2 / 2m = \frac{z^2 e^4}{8\pi^2 b^2 v^2 \varepsilon_0^2 m} \qquad (J)$$

Perda de Energia por Colisão com os Electrões Atómicos (2)

Energia perdida pelo projéctil devido a colisões com os electrões numa camada cilindrica de espessura db e de comprimento dx



$$dE = -E_e \cdot dN_e = -(\frac{z^2 e^4}{8p^2 b^2 v^2 e_0^2 m}) \cdot n_e \cdot 2pb \cdot db \cdot dx$$

n_e - densidade de electrões

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{z^2 e^4 n_e}{4p\ v^2 e_0^2 m} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \frac{db}{b} = -\frac{z^2 e^4 n_e}{4p\ v^2 e_0^2 m} \ln(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}) \qquad (J/m)$$

Limite b_{max}: Tempo de interacção τ < Periodo das órbitas atómicas externas 1/f

$$t \approx \frac{b}{v}(1-b^2)^{1/2}$$

O factor $(1-\beta^2)^{1/2}$ resulta da contracção relativista da distância b (β=v/c)

$$b_{\max} \approx \frac{v}{f}(1-b^2)^{-1/2} \qquad (m)$$

Limite b_{min}: b > $\lambda/2\pi$

λ - comprimento de onda de Broglie do electrão no ref da partícula incidente

$$l = h/p = (h/mv)(1-b^2)^{1/2}$$

,usando expressão relativista do momento

$$b_{\min} \approx \frac{\hbar\sqrt{1-b^2}}{mv}$$

Perda de Energia por Colisão com os Electrões Atómicos (3)

Resultado anterior:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{z^2 e^4 n_e}{4 p v^2 e_0^2 m} \ln \frac{m v^2}{\hbar f (1 - b^2)} \qquad (J/m)$$

- dependência numa única variável cinemática: velocida v
- tempo de interacção implica factor $1/v^2$
- efeito relativista: crescimento logarítmico com v

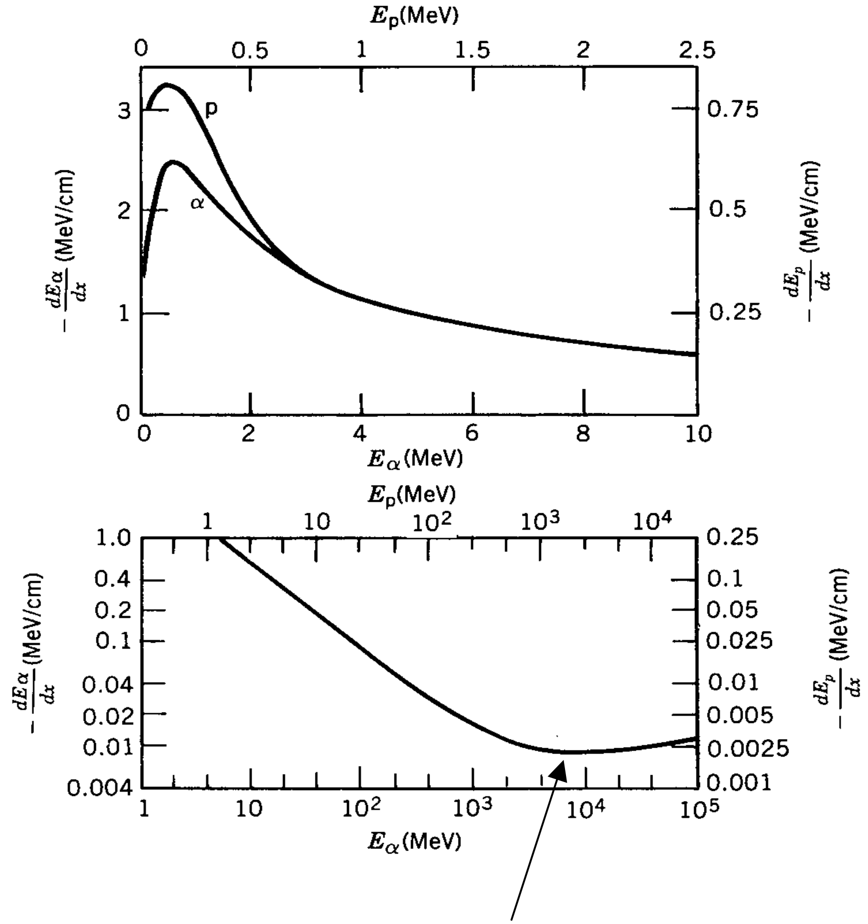
Fórmula de Bethe:

(Não é válida a baixas energias)

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{z^2 e^4 n_e}{4 p v^2 e_0^2 m} \left\{ \ln \left[\frac{2 m v^2}{I (1 - b^2)} \right] - b^2 \right\}$$

I - potencial de ionização

Perda de energia de protões e alfas no ar



mínimo de ionização

Alcance de Partículas Carregadas na Matéria

Alcance - distância percorrida na matéria (valor médio)

$$R_0(E) = \int_0^E dx = \int_0^E \frac{dE'}{-(dE'/dx)}$$

Flutuações implicam distribuição Gaussiana para a probabilidade de R:

$$p(R) = \frac{a}{p^{1/2}} \exp\left[-a^2 (R - R_0)^2\right]$$

α - parâmetro de "straggling"

Particle	Energy (MeV)	Range (cm) in Air	H_2O	Al	Fe	Pb
Proton	0.1	0.13	—	—	—	—
	0.2	0.3	—	—	—	—
	0.5	0.8	0.001	—	—	—
	1.0	2.3	0.003	0.001	—	—
	2.0	7.14	0.006	0.004	0.002	0.003
	5	34.0	0.03	0.019	0.009	0.012
α-Particle	0.1	0.097	—	—	—	—
	0.2	0.16	—	—	—	—
	0.5	0.30	—	—	—	—
	1.0	0.50	—	—	—	—
	2	1.0	0.001	—	—	—
	5	3.51	0.0032	0.0024	0.0012	0.0015

Colisão elástica com o núcleo

Interacção electromagnética com o campo de Coulomb do núcleo

Relação entre parâmetro de impacto e ângulo de difusão:

$$b = \frac{kzZe^2}{mv_0^2}\cot\frac{q}{2}$$

Secção eficaz diferencial:

$$\frac{ds}{d\Omega} = \left(\frac{kzZe^2}{2mv_0^2}\right)^2 sen^{-4}\frac{q}{2}$$

Difusão a grandes ângulos é muito menos provável que a pequenos ângulos. Por exemplo:

$$d\sigma/d\Omega\ (\theta=180^0) = 10^{-5}\ d\sigma/d\Omega\ (\theta=6^0)$$

A variação máxima de energia é obtida na retrodifusão ($\theta=180^0$):

$$\frac{E_f}{E_i} = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2$$

m - massa partícula incidente

M - massa partícula alvo

Quando **m<<M** tem-se

$$E_f \approx E_i$$

Partículas β e α colidindo com núcleos modificam a direcção mas não perdem energia

Radiação Bremsstrahlung

Deflecção no campo coulombiano dos núcleos implica aceleração da partícula.

Energia radiada por uma de carga z com acelaração a :

$$\frac{2z^2e^2}{3c^3}a^2 \qquad (\beta \ll 1)$$

No referencial da partícula incidente:

- aceleração máxima:

$$a_{\max} = \frac{F}{m}\cdot\gamma = \frac{zZe^2}{mb^2}\cdot\gamma$$

- intervalo de tempo de colisão:

$$t = \frac{2b}{bc}\cdot\gamma^{-1}$$

- Energia radiada:

$$Q = \frac{2z^2e^2}{3c^3}a_{\max}^2\cdot t = \frac{2z^4Z^2e^6}{m^2bc^4}\cdot\gamma\cdot\frac{1}{b^3}$$

Comparação entre partículas α e β

$$\frac{Q_b}{Q_a} = \frac{z_b^4}{z_a^4}\cdot\frac{m_a^2}{m_b^2} = \frac{1}{16}\times 5.4\times 10^7 = 3\times 10^6$$

A radiacção de bremsstrahlung é importante para os electrões