

Interação electrão-muão (aprox. ao OPE)

A amplitude de difusão é:

$$|A|^2 \propto \sum_{\text{spins}} \left| J^\mu \frac{Q^2}{q^2} J_\mu \right|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_{\mu\nu}^{(e)} L_{\mu\nu}^{(\mu)}$$

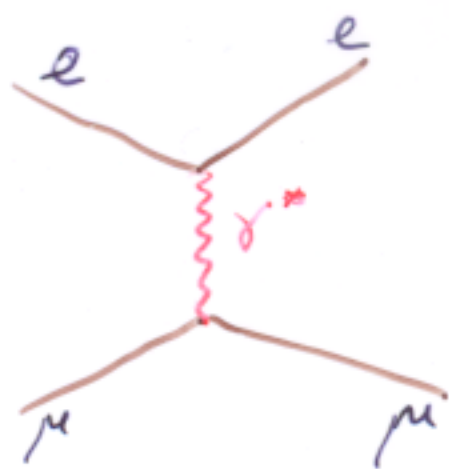
corrente
do electrão

corrente do
muão

propagador do
fotão

$$J_\mu = \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p)$$

$u, \bar{u}$: spinores
 γ_μ : matriz γ^μ
de Dirac



É o termo da secção eficaz que contém a **dinâmica** da interação.

Para feixes não polarizados faz-se uma média sobre **Spins** no canal de entrada; bem como uma soma sobre os **Spins** dos produtos finais.

Após laborioso cálculo vem, para um electrão de energia **E'** detectado segundo o ângulo sólido **$d\Omega$** :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] 2M \frac{d^3p_4}{2E_4} \delta^{(4)}(q+p-p_4)$$

No caso duma secção eficaz **inclusiva**, podemos integrar em **d^3p_4** (não observamos o muão):

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

Nota: $\delta^{(4)}(\underbrace{p_1}_{\sim} + \underbrace{p_2}_{\sim} - \underbrace{p_3}_{\sim} - \underbrace{p_4}_{\sim}) = \delta^{(4)}(\underbrace{p_2}_{\sim} + (\underbrace{p_1}_{\sim} - \underbrace{p_3}_{\sim}) - \underbrace{p_4}_{\sim}) = \delta^{(4)}(\underbrace{p}_{\sim} + \underbrace{q}_{\sim} - \underbrace{p_4}_{\sim}) =$
 $= \delta(2M\nu - Q^2) \cdot \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}_4)$

$$\Rightarrow \int \delta^3(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}_4) \cdot \delta(2M\nu - Q^2) \frac{d^3p_4}{2E_4} =$$

$$= \delta(2M\nu - Q^2) = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

Interação electrão - protão (OPE)

- Difusão elástica: $e p \rightarrow e p$

Tudo é equivalente no vértice superior (leptónico).

Em relação ao vértice hadrónico, a corrente e.m. do protão é ainda

$\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p)$, mas T_μ é mais geral que γ_μ (caso da corrente vectorial pontual)

A forma mais geral, que conserva a paridade é:

$$T_\mu = \bar{u}(p') \left[F_1(q^2) \gamma_\mu + \frac{K}{2M} F_2(q^2) i \sigma_{\mu\nu} q^\nu \right] u(p)$$

A causa é o protão não ser pontual: ter uma distribuição de carga eléctrica e uma componente magnética (mom. magn.: $(1+K)e/2M$; $K \rightarrow$ mom. anómalo)

Costumam definir-se os factores de forma eléctrico e magnético do protão como combinação linear dos $F_{1,2}(q^2)$:

$$\begin{cases} G_E \equiv F_1 - \frac{K Q^2}{4M^2} F_2 \\ G_M \equiv F_1 + K F_2 \end{cases}$$

Calculando $|A|^2 = (e^4/q^4) L_{\mu\nu}^{(e)} L_{\mu\nu}^{(p)}$, obtemos:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left\{ \frac{G_E^2 + (Q^2/4M^2) G_M^2}{1 + Q^2/4M^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

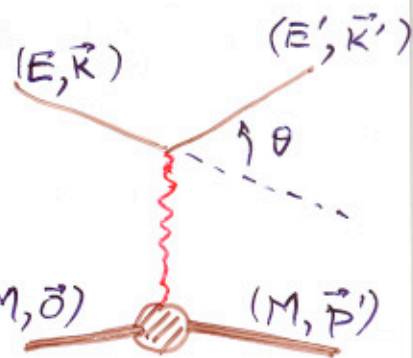
Se $G_E = G_M = 1$, que corresponde a fazer-se $F_1 = 1$, $F_2 = 0$, obtemos de novo a expressão da interacção pontual.

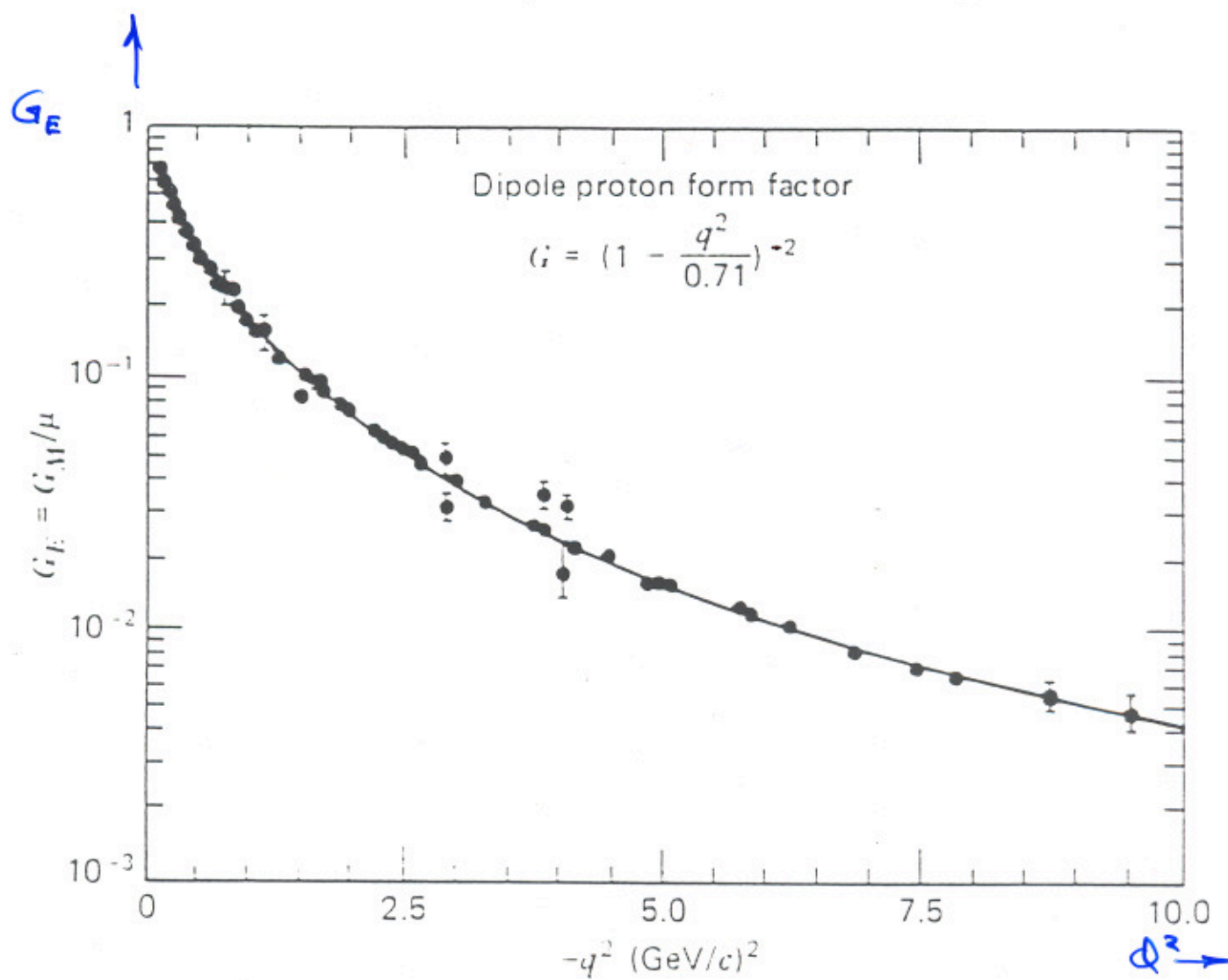
Os factores de forma são tais que

$$G_E(Q^2) \approx G_M(Q^2) \approx \frac{1}{\left[1 + \frac{Q^2}{0,71(\text{GeV}^2)}\right]^2}$$

(comportamento dipolar),

pelo que se tem $\frac{\sigma(e p \rightarrow e p)}{\sigma(e \mu \rightarrow e \mu)} \propto \frac{1}{(Q^2)^4}$





Nota sobre factores de forma

- $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{pontual}} \cdot |\mathbb{F}(q)|^2$

- Exemplo sobre $\mathbb{F}(q)$ - factor de forma :

- Distribuição de carga : $\int \rho(\vec{x}) d^3x = 1$

- Transformada de Fourier $\Rightarrow \mathbb{F}(\vec{q}) = \int \rho(\vec{x}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} d^3x$

- Após integração angular : $\mathbb{F}(q) = 2\pi \int \rho(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iqr} r^2 dr$

$\Rightarrow$ Se, p. ex.: $\rho(r) = e^{-mr}$, tem :

$$\mathbb{F}(|\vec{q}|) = \frac{1}{(1 - q^2/m^2)^2} \quad \underline{\text{dipolo}}$$

Examples of form factors of different spatial distributions are given in the table below (WILSON, 1969).

Charge distribution		Form factor	
point	$f(r) = \delta(r - r_0)$	$F(q^2) = 1$	unity
exponential	$f(r) = \frac{a^3}{8\pi} e^{-ar}$	$F(q^2) = \left[\frac{1}{1 + q^2/a^2} \right]^2$	dipole
Yukawa	$f(r) = \frac{a^2}{4\pi r} e^{-ar}$	$F(q^2) = \frac{1}{1 + q^2/a^2}$	pole
Gaussian	$f(r) = \left(\frac{a^2}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-(a^2 r^2/2)}$	$F(q^2) = e^{-(q^2/2a^2)}$	Gaussian

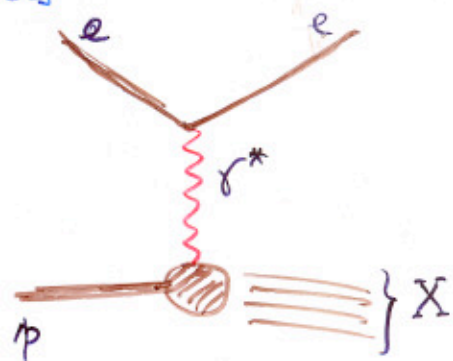
• **Difusão inelástica**: $e p \rightarrow e + \text{hadrões}$

No vértice do próton, tudo se complica devido à sua fragmentação em diversas partículas.

A amplitude de difusão é agora:

$$|A|^2 \propto L_{\mu\nu}^{(e)} W^{\mu\nu}, \text{ em que } W_{\mu\nu},$$

tensor hadrónico, possui 4 termos simétricos (que não violam a paridade) dos quais só 2 são independentes (após imposição de conservação da corrente no vértice)



A secção eficaz vem:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[W_2(\nu, q^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2 W_1(\nu, q^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]$$

• W_1 e W_2 são funções de estrutura do próton e são, no caso geral, funções de ν e Q^2 .

Estão relacionadas com o facto de o fóton ser virtual $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{polarização transversa } \lambda = \pm 1 \text{ (mesmo se } m_\gamma = 0) \\ \text{polarização longitudinal } \lambda = 0 \text{ (só se } m_\gamma \neq 0) \end{cases}$

Quer dizer, a **secção eficaz** possui 2 termos, representando a fotoabsorção de fótons "transversos" e "longitudinais":

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = T(\sigma_T + \epsilon \sigma_L), \quad T, \epsilon = \text{funções}(\nu, Q^2, \theta, \dots),$$

em que:

$$\begin{cases} \sigma_T \propto W_1(\nu, q^2) \\ \sigma_L \propto \left(1 - \frac{\nu^2}{q^2}\right) W_2(\nu, q^2) - W_1(\nu, q^2) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ A maior ou menor facilidade de absorção de fótons "T" ou "L" vai permitir o estudo do **spin** das partículas.

Interação e-p inelástica:

- Tensor hadrónico $W^{\mu\nu}$ tem 4 termos simétricos ($\bar{q}$ não violam paridade)

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} p^\mu p^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (p^\mu q^\nu + p^\nu q^\mu)$$

Nota: W_3 é guardado p/ f. estr.
q violação de paridade (γ -prod)

- Aplicando conservação de corrente no vértice hadrónico 4 termos passam a 2:

$$W_5 = - \frac{p \cdot q}{q^2} W_2$$

$$W_4 = \left(\frac{p \cdot q}{q^2} \right) W_2 + \frac{M^2}{q^2} W_1$$

$$\Rightarrow W^{\mu\nu} = W_1 \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + W_2 \cdot \frac{1}{M^2} \left(p^\mu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\mu \right) \left(p^\nu - \frac{p \cdot q}{q^2} q^\nu \right)$$

• As funções de estrutura, no caso elástico $e p \rightarrow e p$ têm a forma:

$$\begin{cases} W_1^{\text{el}}(\nu, Q^2) = \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2(Q^2) \delta(\nu - \frac{Q^2}{2M}) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0 \\ W_2^{\text{el}}(\nu, Q^2) = \frac{G_E^2(Q^2) + (Q^2/4M^2) G_M^2(Q^2)}{1 + Q^2/4M^2} \delta(\nu - \frac{Q^2}{2M}) \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

• No caso do acoplamento pontual, valem:

$$\begin{cases} W_1^{\text{pont}}(\nu, Q^2) = \frac{Q^2}{4M^2} \delta(\nu - \frac{Q^2}{2M}) \\ W_2^{\text{pont}}(\nu, Q^2) = \delta(\nu - \frac{Q^2}{2M}) \end{cases}$$

Ora, definindo-as como funções sem dimensões:

$$\begin{cases} 2M W_1^{\text{pont}} = \frac{Q^2}{2M\nu} \delta(\frac{Q^2}{2M\nu} - 1) \\ \nu W_2^{\text{pont}} = \delta(\frac{Q^2}{2M\nu} - 1) \end{cases}$$

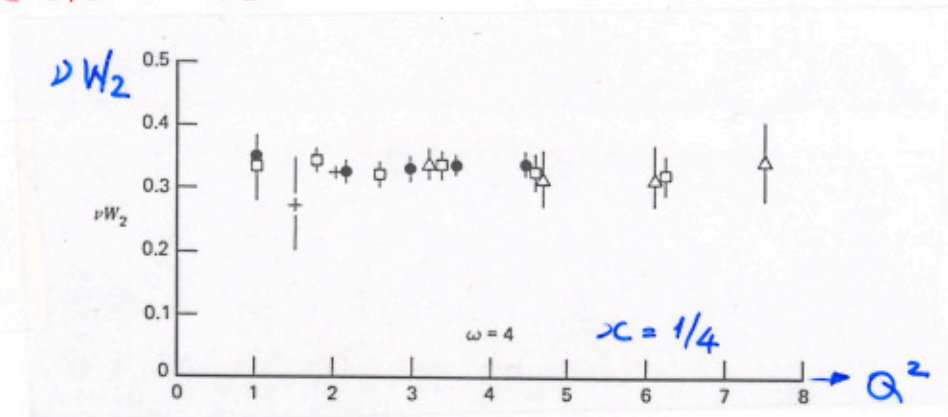
verificamos que são apenas funções da variável adimensional $x = \frac{Q^2}{2M\nu}$.

Quer dizer:

$$\begin{aligned} 2M W_1(\nu, Q^2) &\xrightarrow{\nu, Q^2 \rightarrow \infty} 2 F_1(x) \\ \nu W_2(\nu, Q^2) &\xrightarrow{x \text{ fixo}} F_2(x) \end{aligned}$$

Invariância de escala de Bjorken

Experimentalmente, descobriu-se que a difusão inelástica profunda em núcleos revela esta ausência de escala de massa.



conclusão: A grande Q^2 , a difusão inelástica $e-N$ torna-se difusão elástica electrão-partão.

Modelo dos partões

No caso partônico, temos ($m = \xi M$):

$$\begin{cases} W_1^{\text{pont}}(\nu, Q^2) = \frac{Q^2}{4m^2} \delta(\nu - \frac{Q^2}{2m}) = \frac{Q^2}{4\xi^2 M^2 \nu} \delta(1 - \frac{Q^2}{2\xi M \nu}) \\ W_2^{\text{pont}}(\nu, Q^2) = \delta(\nu - \frac{Q^2}{2m}) = \frac{1}{\nu} \cdot \delta(1 - \frac{Q^2}{2\xi M \nu}) \end{cases}$$

Como a interação global $e-N$ se pode considerar como uma sobreposição de interações pontuais:



obtemos, para as funções de estrutura do nucleão:

$$\begin{aligned} 2M W_1(\nu, Q^2) &\longrightarrow 2F_1(x) = \sum_i e_i^2 \int_0^1 f_i(\xi) \frac{x}{\xi^2} \delta(1 - \frac{x}{\xi}) d\xi \\ \nu W_2(\nu, Q^2) &\longrightarrow F_2(x) = \sum_i e_i^2 \int_0^1 f_i(\xi) \delta(1 - \frac{x}{\xi}) d\xi \end{aligned}$$

Integrando para todos os valores de ξ ($0 \leq \xi \leq 1$):

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x)$$

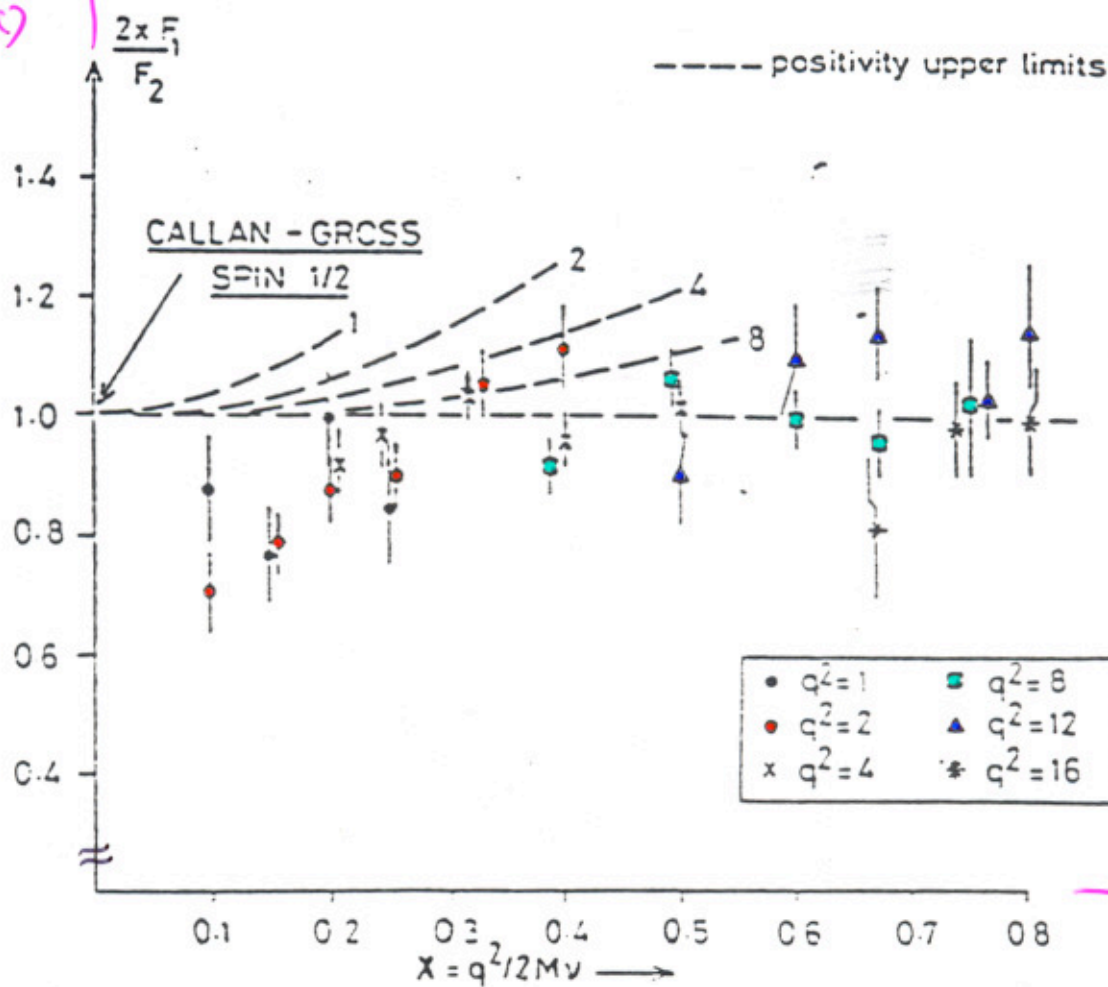
E, no caso de os partões terem $\text{spin} = 1/2$ (podem então absorver fótons transversos: $\lambda = \pm 1$), como

$W_1 \propto \sigma_T \neq 0$, vem:

$$2x F_1(x) = F_2(x)$$

Relação de Callan-Gross

$$\frac{2x F_A(x)}{F_2(x)}$$



x

Note-se que a fração ξ do momento do nucleão, P , transportada pelo partão que vai interagir com o fóton virtual é, pela conservação da energia-impulsão, igual ao invariante adimensional x do γ^* , "responsável" pela invariância de escala das funções de estrutura.

Ou seja, $x = \xi$ (ou x_F).

de Bjorken de Feynman

Hipóteses do modelo dos partões

- Interação do fóton (com $Q^2 \rightarrow \infty$ e $x = \frac{Q^2}{2M_N \nu}$ finito) com objectos pontuais quase-livres, os partões.

Justificação a posteriori: liberdade assintótica em QCD perturbativa.

- Interações dos partões, no estado final (fragmentação em hadrões), só a parecem numa escala de tempo

$$\tau_{\text{fragm}} \sim \frac{R}{c} \gamma = \frac{10^{-15} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \times (1-10) \sim 10^{-23} \text{ s} \gg$$

$$\gg \tau_{\text{pnt}} \sim \frac{\hbar}{\sqrt{Q^2}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{Q^2} c} \sim \frac{0,2 \text{ fm} \cdot \text{GeV}}{5 \text{ GeV} \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} \approx \frac{1}{100} \times 10^{-15} \times 10^{-8} = 10^{-25} \text{ s}$$

- ausência de momento transversal intrínseco (K_T) dos partões (movimento de Fermi).

$\Rightarrow$ Consequência principal: invariância de escala:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = f(x) \quad (\neq f(Q^2))$$

Os partões como quarks

Spin dos partões

Tivemos visto que, para o fóton virtual

Polarização transversa ($\lambda = \pm 1$): $\sigma_T \propto W_1$

Polarização longitudinal ($\lambda = 0$): $\sigma_L \propto (1 - \frac{v^2}{q^2}) W_2 - W_1$

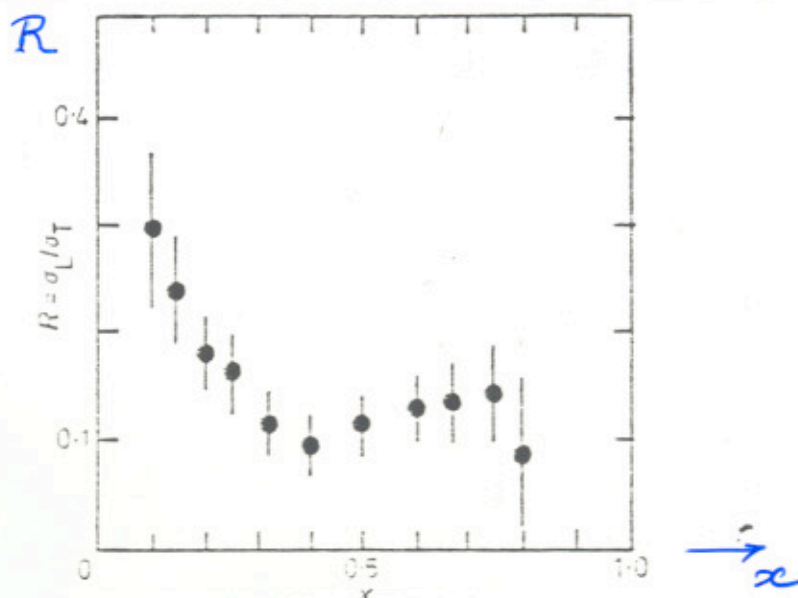
Então se os partões têm

	Antes	Depois	Conservação da helicidade
Spin $\frac{1}{2}$	$(+\frac{1}{2}) \rightarrow$ $(\lambda=1)$ $(+\frac{1}{2}) \rightarrow$ $(\lambda=0)$	$(-\frac{1}{2}) \leftarrow$	Sim $\sigma_T \neq 0$ Não $\sigma_L = 0$
Spin 0	$(\lambda=1)$ $(\lambda=0)$	$\leftarrow$	Não $\sigma_T = 0$ Sim $\sigma_L \neq 0$

Definindo a relação $R = \frac{\sigma_L}{\sigma_T}$ vem que

$$R = \begin{cases} \rightarrow 0 & \text{se partão tem spin } \frac{1}{2} \\ \rightarrow \infty & \text{se partão tem spin } 0 \end{cases}$$

De facto, por um lado, o modelo de quarks pressupõe que os quarks são férmions de spin $\frac{1}{2}$.
 Por outro lado, experimentalmente obtém-se:



- Carga elétrica

Temos visto que

$$2 \times F_1(x) = f_2(x) = \sum_i e_i^2 \times f_i(x)$$

Ora, no modelo de quarks

$$p \equiv \begin{pmatrix} u \\ u \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} +2/3 \\ +2/3 \\ -1/3 \end{matrix}$$

$$\Downarrow \\ \text{carga} = 1$$

$$n \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} +2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{matrix}$$

$$\Downarrow \\ \text{carga} = 0$$

fazendo $f_i(x) = u(x)$ ou $f_j(x) = d(x)$, vem:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} f_2^{ep} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 [s + \bar{s}] \\ \frac{1}{x} f_2^{en} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \dots \end{cases}$$

Ora, o neutrão e o próton formam um **doblete** no espaço do **isospin** do nucleão:

$$N \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \begin{matrix} +1/2 \\ -1/2 \end{matrix} \quad I_3$$

simetria introduzida para explicar as invariâncias

$$\sigma_{pp} = \sigma_{pn} = \sigma_{nn}$$

Então, os constituintes do nucleão também são tais que

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} +1/2 \\ -1/2 \end{matrix} \quad I_3$$

Quer dizer, a probabilidade de encontrarmos

$$u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x)$$

$$d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x)$$

$$s^p(x) = s^n(x) \equiv s(x)$$

Logo, podemos escrever:

$$\frac{1}{x} f_2^{ep} = \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)]$$

$$\frac{1}{x} f_2^{en} = \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)]$$

Estas expressões devem ter **restrições** devidas a: **estranheza** global do nucleão, **carga**, **isospin** e **momento** totais. São as chamadas **Regras de soma**.

• **Regras de soma (do próton)**

Estranheza $\int [(-1) s(x) + \bar{s}(x)] dx = 0$

Carga eléctrica $Q \equiv \sum_i \int e_i f_i(x) dx = 1$

$$\Rightarrow \int \left\{ \frac{2}{3} [u(x) - \bar{u}(x)] - \frac{1}{3} [d(x) - \bar{d}(x)] \right\} dx = 1$$

Isospin $I_3 = \sum_i \int I_{3i} f_i(x) dx = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \int \left\{ \frac{1}{2} [u(x) - \bar{u}(x)] - \frac{1}{2} [d(x) - \bar{d}(x)] \right\} dx = \frac{1}{2}$$

Então:

$$\bullet \quad 3 \times Q - 2 \times I_3 \Rightarrow \int [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2$$

$$\bullet \quad 3 \times Q - 4 \times I_3 \Rightarrow \int [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1$$

Quer dizer, o modelo dos partões dá-nos 2 partões u e 1 partão d líquidos, isto é, "acima" dum "mar" de pares $\bar{q}$ e q .

Donde a separação:

$$q(x) = q_{\text{val}}(x) + q_{\text{mar}}(x)$$

e as hipóteses:

$$s_{\text{val}}(x) = \bar{s}_{\text{val}}(x) = \bar{u}_{\text{val}}(x) = \bar{d}_{\text{val}}(x) = 0$$

$$u_{\text{mar}}(x) = \bar{u}_{\text{mar}}(x) = d_{\text{mar}}(x) = \bar{d}_{\text{mar}}(x) = s_{\text{mar}}(x) = \bar{s}_{\text{mar}}(x) = K$$

Estava feita a identificação

partões de valência $\longleftrightarrow$ quarks de $SU(3)_{\text{flavour}} \otimes SU(2)_{\text{spin}}$

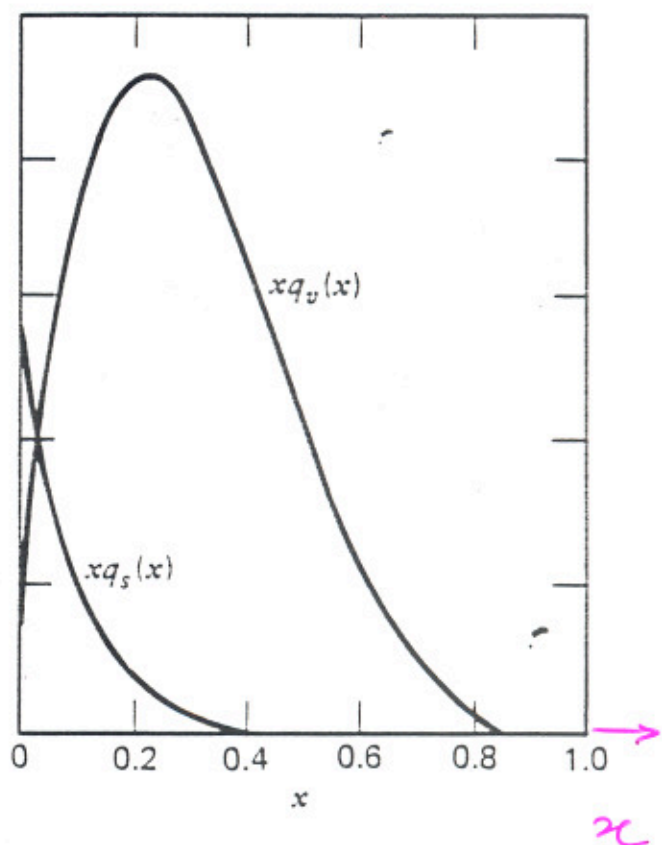
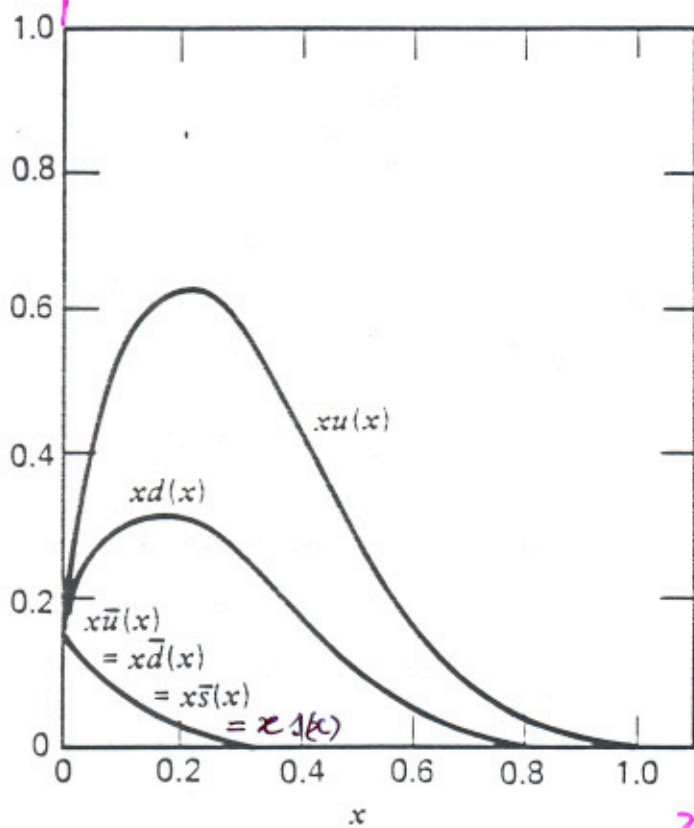
Desta unificação, e das ideias de Teoria Quântica do Campo sobre mediador de interação, resultou a concepção de que cada quark de valência (grande x) pode radiar (bremsstrahlung) glúões que produzem pares $q, \bar{q}$ (lentos, baixo x), que formam o mar.

Ora, a probabilidade de um quark radiar um glúão com grande momento ($\sim x_{q_{\text{val}}}$) tende para zero; e a de radiar glúões com momento $\sim$ nulo $\rightarrow \infty$. Ou seja

$$P_{\text{glúão}}(x) \sim \frac{1}{x}$$

Experimentalmente, tem-se:

$x f(x)$



Substituindo aquelas hipóteses em F_2^{en} e F_2^{ep} vem:

$$\frac{1}{x} F_2^{en} = \frac{1}{9} [u_{val} + 4 d_{val}] + \frac{1}{9} [4 d_{mar} + 4 \bar{d}_{mar} + u_{mar} + \bar{u}_{mar} + s_{mar} + \bar{s}_{mar}]$$

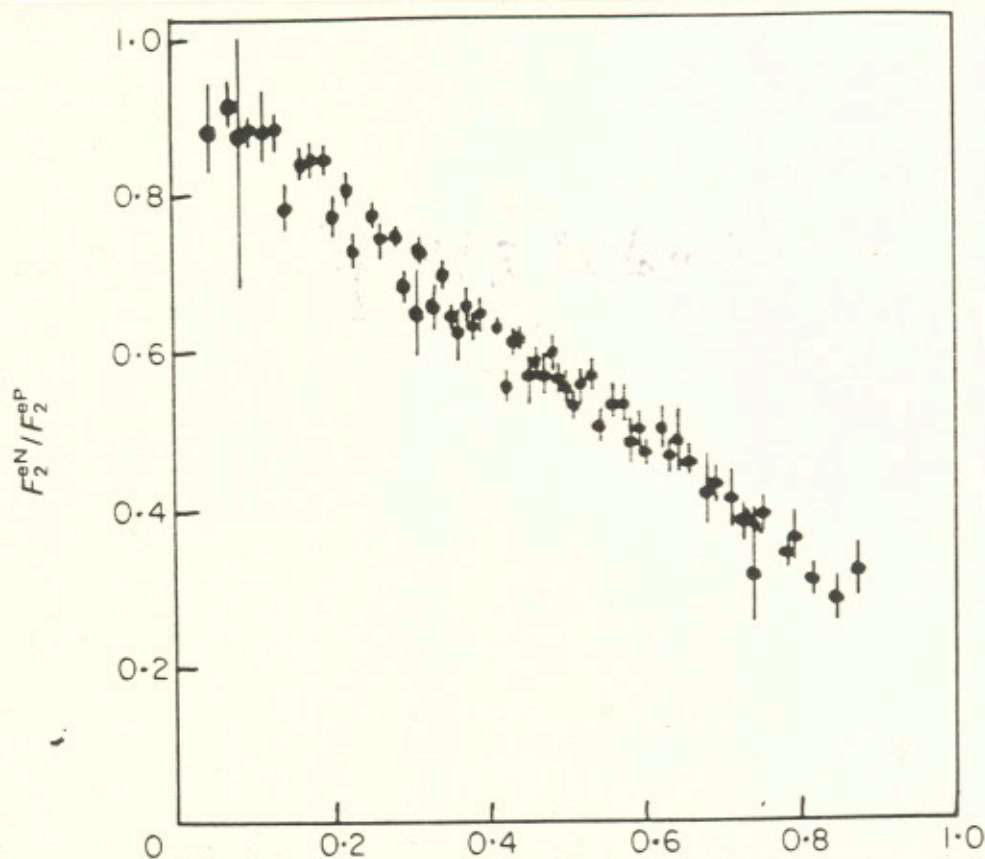
$$= \frac{1}{9} [u_{val} + 4 d_{val}] + \frac{12}{9} K$$

$$\frac{1}{x} F_2^{ep} = \frac{1}{9} [d_{val} + 4 u_{val}] + \frac{12}{9} K$$

- Então, se $K(x)$ é dominante

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Ora, experimentalmente, basta sondar partões com baixo x para que a interacção só se produza com os partões do mar:



- Se tomarmos o outro limite:

$$\frac{F_2^{en}(x)}{F_2^{ep}(x)} \longrightarrow \frac{u_{val} + 4 d_{val}}{4 u_{val} + d_{val}} \longrightarrow \frac{1}{4}, \text{ se } u_{val} \gg d_{val}$$

como é sugerido experimentalmente.