Lei do decaímento radioactivo

A probabilidade λ de decaímento de um núcleo é **constante** para cada nuclídeo.

Numa amostra de N núcleos (fonte radioactiva), a sua diminuição num intervalo de tempo Δt é:

$$-\Delta N = N\lambda\Delta t \, .$$

Num intervalo de tempo infinitesimal:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

$$\therefore \quad \frac{dN}{N} = -\lambda\, dt \qquad \int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln N(t) - \ln N_0 = -\lambda t \iff \ln \frac{N(t)}{N_0} = -\lambda t$$

$$\boxed{N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}}$$

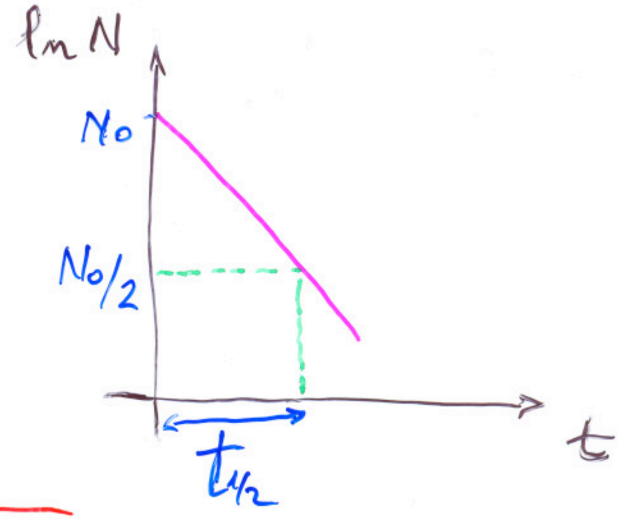
Quer dizer: $\underline{N(t)}$ é o número de núcleos sobreviventes no instante t numa fonte que possuía N_0 núcleos no instante inicial.

Semi-Vida

Período de tempo $t_{1/2}$ necessário para que o número de núcleos de uma fonte se reduza a metade:

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 \, e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Rightarrow \quad t_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 0{,}693 / \lambda$$

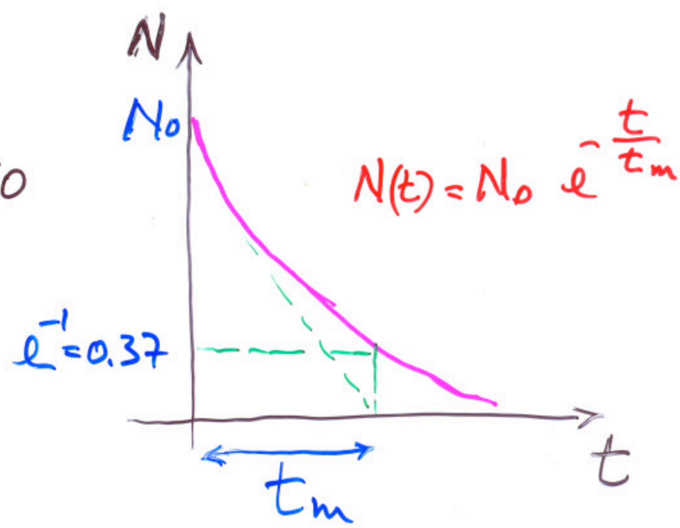


Tempo de vida médio

$$t_m = \frac{\int_0^\infty N(t)\, t\, dt}{\int_0^\infty N(t)\, dt} = \frac{1}{N_0} \int_0^\infty N_0 \, e^{-\lambda t} \, t \, dt$$

$$\Rightarrow \boxed{t_m = 1/\lambda}$$

A vida média é o inverso da probabilidade de decaimento λ.



A semi-vida é cerca de 70% da vida média:

$$\boxed{t_{1/2} = 0{,}693 \, t_m}$$

Actividade de uma fonte

É o número médio de desintegrações por segundo.

Sendo N o número de núcleos da fonte, e λ a probabilidade de decaimento de um núcleo, então:

$$A = \lambda N = \lambda N_0 \, e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad A = A_0 \, e^{-\lambda t}$$

- Unidade de medida "clássica": o Curie.

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ desintegrações/s}$$

É uma grande unidade, desajustada para o trabalho de hoje em Laboratório, onde são usadas fontes radioactivas da ordem dos μCi ou dos mCi.

- Unidade do Sistema Internacional: o Becquerel.

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ desintegração/s}$$

A actividade duma fonte é uma propriedade intrínseca que depende da massa. Não se deve confundir com a dose recebida por um objecto ou um ser vivo.

Decaimentos nucleares em cadeia

Produção e decaimento de um nuclídeo

A equação de balanço de uma espécie nuclear que é criada, p. ex: por bombardeamento de uma espécie estável, à taxa de Q núcleos/s e cuja probabilidade de decaimento é λ, tem 2 componentes:

$$\frac{dN}{dt} = Q - \lambda N,$$

que traduzem as taxas de criação e de destruição do nuclídeo. Reescrevendo-a:

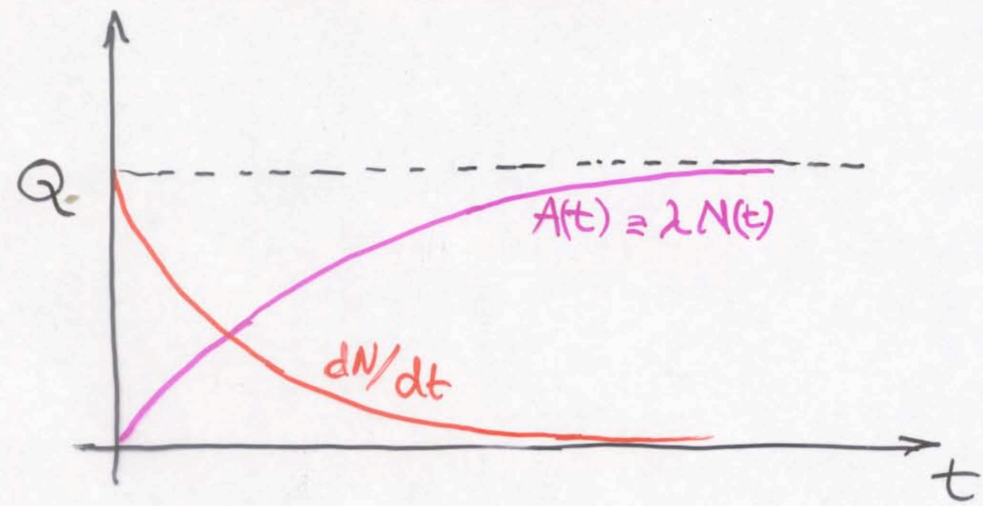
$$\frac{d(Q-\lambda N)}{Q-\lambda N} = -\lambda\, dt \qquad (Q = c^{te})$$

podemos fàcilmente integrá-la

$$\Big[\ln(Q-\lambda N)\Big]_{N_0}^{N(t)} = -\lambda t \Longleftrightarrow Q - \lambda N(t) = (Q - \lambda N_0)\, e^{-\lambda t}$$

donde:

$$\boxed{N(t) = \frac{Q}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{toma-se} \\ N_{t=0} = 0\end{array}\right)$$



Cadeias de decaimentos nucleares

Certos nuclídeos exibem uma família de decaimentos sucessivos do tipo

$$N_1 \xrightarrow{\lambda_1} N_2 \xrightarrow{\lambda_2} N_3 \longrightarrow \cdots$$

Considerando o caso em que N_3 é estável, temos:

- $\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$

$$\begin{cases} \frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\ \frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \end{cases}.$$

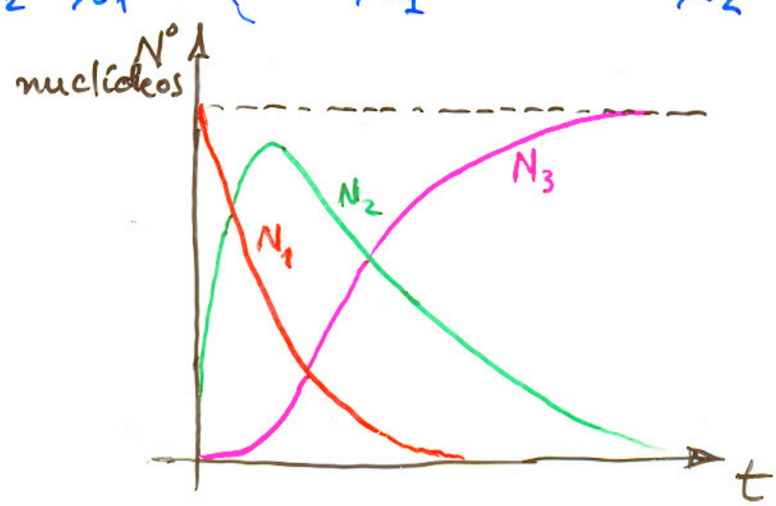
A 2ª equação pode tomar a forma:

$$\lambda_2 \frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 (A_1 - A_2) \Leftrightarrow \frac{dA_2}{dt} = \lambda_2 (A_1 - A_2),$$

que mostra que o máximo de actividade do nuclídeo-filho ocorre para $A_2 = A_1$.

As soluções gerais para cada nuclídeo são:

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1^0 \, e^{-\lambda_1 t} \\ N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \\ N_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right) \end{cases}$$



Estudemos alguns casos típicos (ver figuras →):

- $\lambda_1 > \lambda_2$: Para $t \gg 1/\lambda_1$, a 1ª exponencial torna-se desprezável:

$$N_2(t) \simeq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_1^0 \, e^{-\lambda_2 t}$$

⇒ N_2 decairá com a sua própria constante λ_2.

- $\lambda_1 < \lambda_2$: Para $t \gg 1/\lambda_2$ é a 2ª exponencial que se pode desprezar:

$$N_2(t) \simeq \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 \, e^{-\lambda_1 t}$$

⇒ O nuclídeo-filho decai com a constante do pai, λ_1, pois ele decai ao ritmo a que é formado. E tem-se:

$$\boxed{A_2(t) \simeq \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} A_1(t)}$$

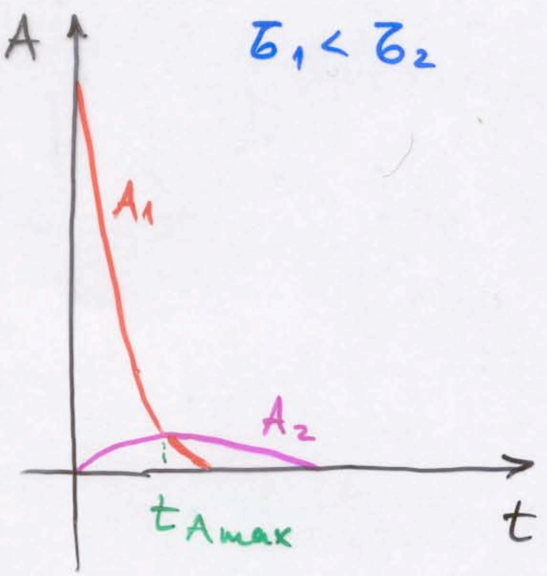
- $\lambda_1 \ll \lambda_2$: No limite temos $A_2(t) \simeq A_1(t)$. É o chamado equilíbrio transiente das actividades.

- $\lambda_1 \simeq 0$, $\lambda_1 \ll \lambda_2$: Dá-se o equilíbrio secular, em que, para $t \gg 1/\lambda_2$, vem:

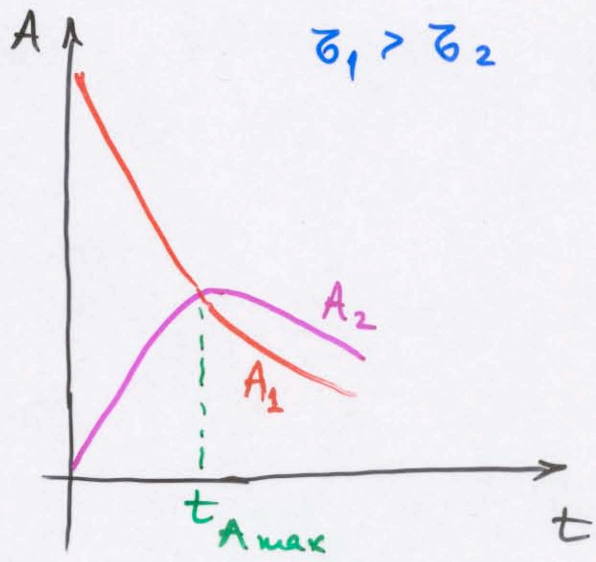
$$\left\| \begin{array}{l} N_1(t) = N_1^0 \\ N_2(t) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1^0 \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{array}{l} A_1(t) = A_1^0 \\ A_2(t) = A_1^0 \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) \end{array} \right.$$

Aqui, a condição de equilíbrio dá-se para $t \gg$, isto é, na saturação.

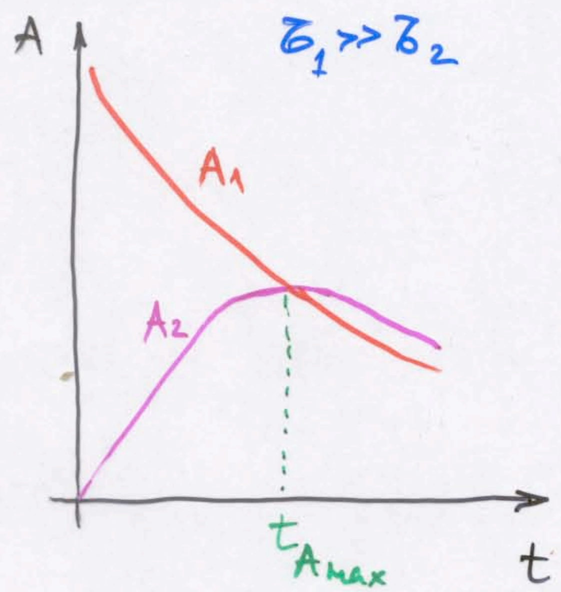
• caso $\lambda_1 > \lambda_2$



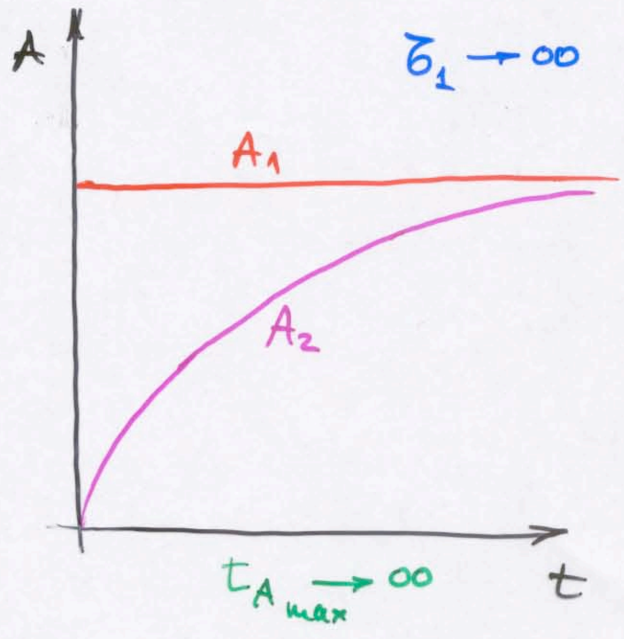
• caso $\lambda_1 < \lambda_2$



• caso $\lambda_1 \ll \lambda_2$



• caso $\lambda_1 \simeq 0$ (c/ $\lambda_1 \ll \lambda_2$)



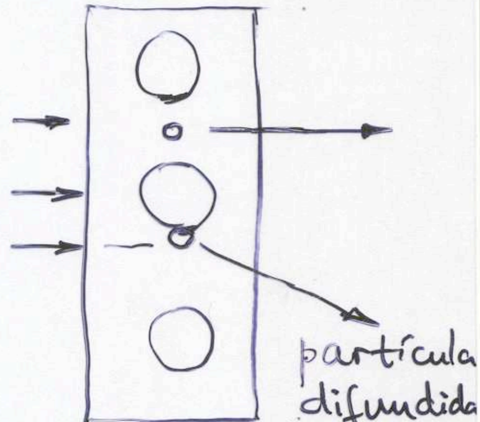
(Vida média $\tau = 1/\lambda$)

Secção eficaz

Consideremos que N_1 partículas incidentes de raio r_1 atravessam um plano de área unitária A, onde se encontram N_2 esferas de raio r_2.

A probabilidade de colisão geométrica entre uma partícula incidente e as partículas-alvo será

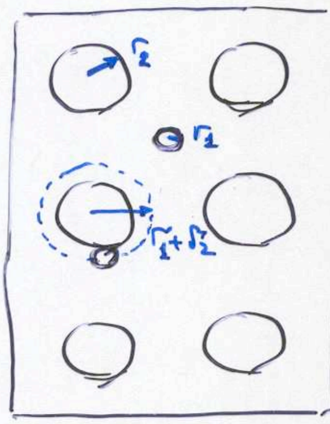
$$N_2 \frac{\pi(r_1 + r_2)^2}{A} .$$



O número total de colisões produzirá N_d partículas difundidas e será:

$$N_d = N_1 N_2 \sigma$$

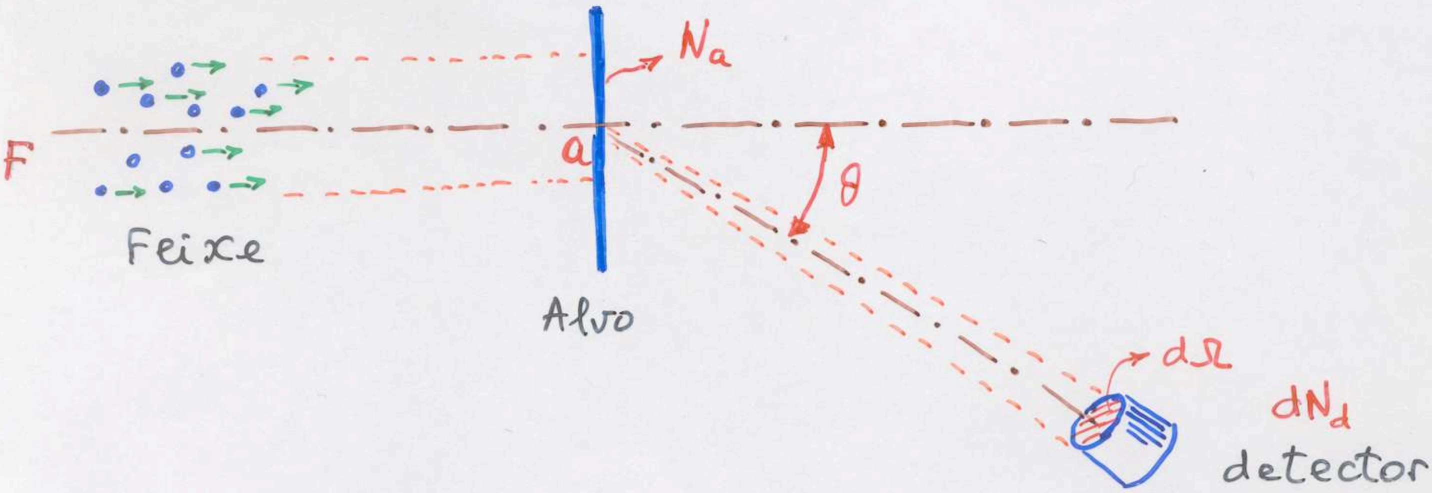
em que $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$ (cm²) é a secção eficaz, isto é, a área transversa apresentada à colisão pela partícula-alvo.



Em colisões nucleares a área geométrica das partículas envolvidas não corresponde necessàriamente à secção eficaz. Mas dá uma ordem de grandeza:

$$\text{Área transversa do núcleo} \sim (10^{-12})^2 \ \text{cm}^2 = 10^{-24} \text{cm}^2 \equiv 1 \ \text{barn}$$

Secção eficaz diferencial



$$dN_d = F \cdot N_a \, \sigma(\theta, \varphi) \, d\Omega$$

- $F \equiv$ fluxo incidente:
  número de partículas incidentes que atravessam uma unidade de área perpendicular ao feixe, numa unidade de tempo.

- $N_a \equiv$ número de partículas-alvo intersectadas pelo feixe

- $dN_d \equiv$ número de partículas secundárias detectadas, i.e., contadas no detector, por unidade de tempo.

- $d\sigma = \sigma(\theta, \varphi) \, d\Omega \implies \underline{\sigma(\theta, \varphi)} = \dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ é a secção eficaz diferencial

- $\sigma_{tot} = \int \sigma(\theta, \varphi) \, d\Omega$ é a secção eficaz total

Absorção de um feixe de partículas na matéria

Seja I a intensidade, i.e., o número de partículas incidentes que atravessa no plano x a unidade de área por unidade de tempo.

A sua diminuição ao atravessar a fatia Δx de matéria é proporcional a:

- σ - probabilidade de interacção, ou secção eficaz $[cm^2]$
- I - número de partículas incidentes
- N_v - nº de centros difusores por unidade de volume do material $[cm^{-3}]$

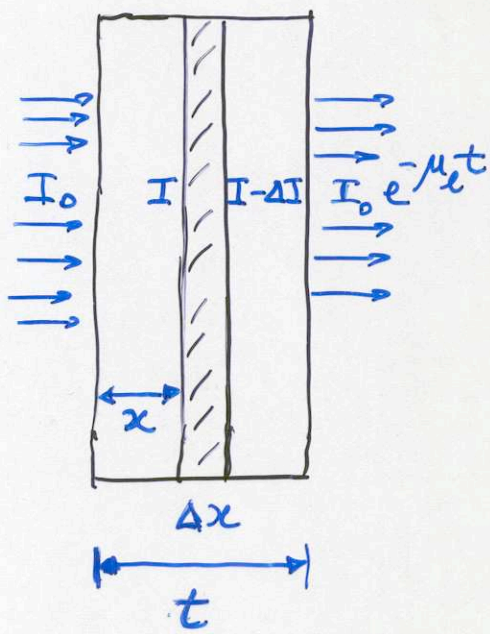
Ou seja: $-\Delta I = I \sigma N_v . \Delta x$

Integrando: $\frac{\Delta I}{I} = -\sigma N_v \Delta x$

$$I = I_0 e^{-\sigma N_v x}$$

ou: $$\boxed{I = I_0 e^{-\mu_\ell x}} ,$$

sendo $\mu_\ell = \sigma N_v$ o coeficiente de absorção linear ($[\mu] = cm^{-1}$).



O número de partículas difusoras por unidade de volume N_v pode exprimir-se como:

$$N_v = \frac{\rho}{m} \begin{cases} = \dfrac{\rho}{A/N_a} = \rho \dfrac{N_a}{A} & \text{caso do núcleo atómico} \\ = \dfrac{\rho}{A/ZN_a} = \rho \dfrac{ZN_a}{A} & \text{caso do electrão difusor} \end{cases}$$

- ρ massa específica do material (g/cm^3)
- m massa de cada partícula difusora (g)
- N_A nº de Avogadro $(= 6{,}022 \cdot 10^{23}$ partículas/mole$)$
- A peso atómico $(g/mole)$

Como a secção eficaz σ de interacção é muito baixa, é usual exprimir-se a espessura de matéria atravessada em g/cm^2, como se todos os centros difusores estivessem distribuídos no mesmo plano:

$$d_m = x\,\rho \qquad [d_m] = g/cm^2$$

$$\mu_m = \mu_\ell / \rho \qquad [\mu_m] = cm^2/g$$

Então:

$$\boxed{I = I_0\, e^{-\mu_m d_m}} ,$$

μ_m sendo o coeficiente de absorção de massa.

O coeficiente de absorção linear, μ_ℓ, é tanto maior quanto mais centros difusores por unidade de volume N_v houver, e quanto maior for a secção eficaz σ:

$$\mu_\ell = \sigma N_v$$

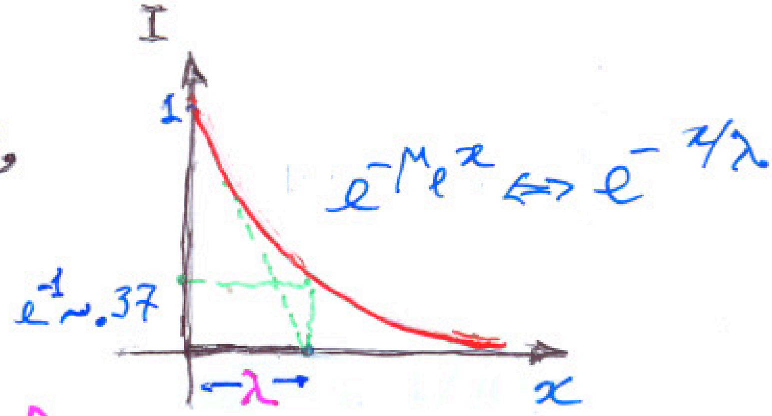
Para o coeficiente de absorsão de massa μ_m temos, no caso de núcleos difusores

$$\mu_m = \mu_\ell / \rho = \sigma N_v / \rho = \sigma \rho \frac{N_A}{A} / \rho = \frac{\sigma N_A}{A}$$

(ou $\mu_m = \sigma \frac{Z N_A}{A}$ para electrões)

Quer dizer: μ_m não depende de ρ, logo é independente do estado físico do material.

Tal como para os processos de desintegração, define-se:



- livre percurso médio

$$\bar{d} \equiv 1/\mu_\ell = 1/\sigma N_v \equiv \lambda$$

distância média percorrida pela partícula incidente entre duas colisões

ou: $\bar{d}_m \equiv \rho/\mu_\ell = \rho/\sigma N_v \equiv \lambda_m$

- semi-espessura

$d_{1/2} = 0{,}693/\mu_\ell$ espessura que reduz a metade a intensidade das partículas incidentes.