

Lei do decaimento radioactivo

A probabilidade λ de decaimento de um núcleo é constante para cada nuclídeo.

Numa amostra de N núcleos (fonte radioactiva), a sua diminuição num intervalo de tempo Δt é:

$$-\Delta N = N \lambda \Delta t.$$

Num intervalo de tempo infinitesimal:

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

$$\therefore \frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln N(t) - \ln N_0 = -\lambda t \Leftrightarrow \ln \frac{N(t)}{N_0} = -\lambda t$$

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$$

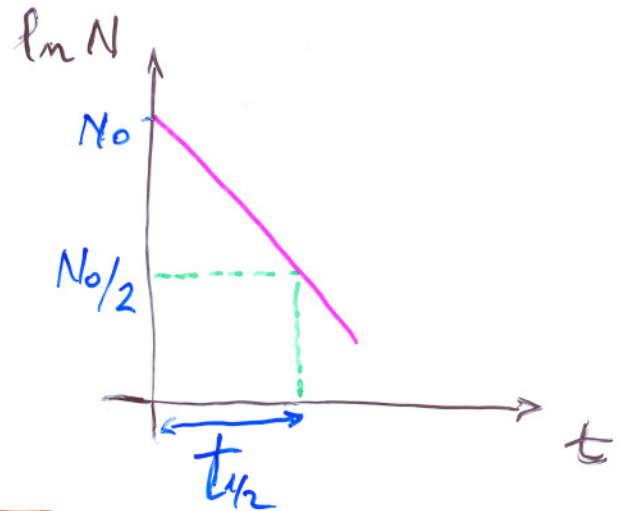
Quer dizer: $N(t)$ é o número de núcleos sobreviventes no instante t numa fonte que possuía N_0 núcleos no instante inicial.

Semi-Vida

Período de tempo $t_{1/2}$ necessário para que o número de núcleos de uma fonte se reduza a metade:

$$\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{-\lambda t_{1/2}}$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 0,693 / \lambda$$

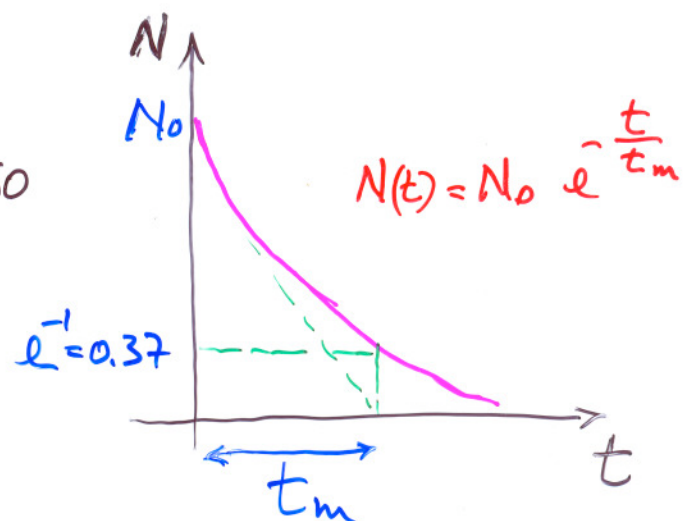


Tempo de vida médio

$$t_m = \frac{\int_0^{\infty} N(t) t dt}{\int_0^{\infty} N(t) dt} = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} N_0 e^{-\lambda t} t dt$$

$$\Rightarrow \boxed{t_m = 1/\lambda}$$

A vida média é o inverso da probabilidade de decaimento λ .



A semi-vida é cerca de 70% da vida média:

$$\boxed{t_{1/2} = 0,693 t_m}$$

Actividade de uma fonte

É o número médio de desintegrações por segundo.

Sendo N o número de núcleos da fonte, e λ a probabilidade de decaimento de um núcleo, então:

$$A = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow A = A_0 e^{-\lambda t}$$

- Unidade de medida "clássica": o Curie.

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ desintegrações/s}$$

É uma grande unidade, desajustada para o trabalho de hoje em Laboratório, onde são usadas fontes radioactivas da ordem dos μCi ou dos mCi .

- Unidade do Sistema Internacional: o Becquerel.

$$1 \text{ Bq} = 1 \text{ desintegração/s}$$

A actividade duma fonte é uma propriedade intrínseca que depende da massa. Não se deve confundir com a dose recebida por um objecto ou um ser vivo.

Secção eficaz

Consideremos que N_1 partículas incidentes de raio r_1 atravessam um plano de área unitária A , onde se encontram N_2 esferas de raio r_2 .

A probabilidade de colisão geométrica entre uma partícula incidente e as partículas-alvo será
$$N_2 \frac{\pi(r_1 + r_2)^2}{A}.$$

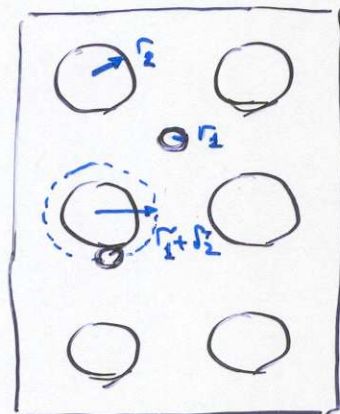
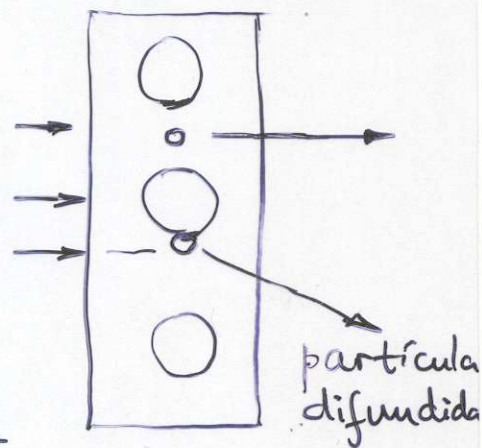
O número total de colisões produzirá N_d partículas difundidas e será:

$$N_d = N_1 N_2 \sigma$$

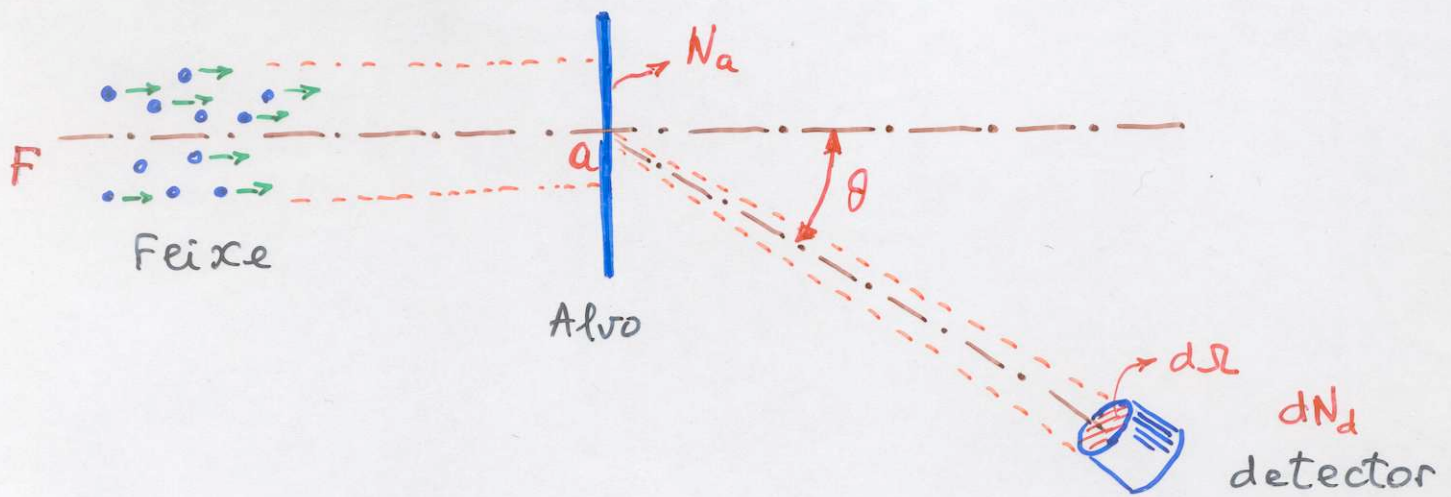
em que $\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2$ (cm^2) é a secção eficaz, isto é, a área transversa apresentada à colisão pela partícula-alvo.

Em colisões nucleares a área geométrica das partículas envolvidas não corresponde necessariamente à secção eficaz. Mas dá uma ordem de grandeza:

$$\text{Área transversa do núcleo} \sim (10^{-12})^2 \text{ cm}^2 = 10^{-24} \text{ cm}^2 \equiv 1 \text{ barn}$$



Secção eficaz diferencial



$$dN_d = F \cdot N_a \sigma(\theta, \varphi) d\Omega$$

- $F \equiv$ **fluxo incidente**:
número de partículas incidentes que atravessam uma unidade de área perpendicular ao feixe, numa unidade de tempo.
- $N_a \equiv$ número de partículas-alvo intersectadas pelo feixe
- $dN_d \equiv$ número de partículas secundárias detectadas, i.e., contadas no detector, por unidade de tempo.
- $d\sigma = \sigma(\theta, \varphi) d\Omega \Rightarrow \underline{\sigma(\theta, \varphi)} = \frac{d\sigma}{d\Omega}$ é a **secção eficaz diferencial**
- $\sigma_{\text{tot}} = \int \sigma(\theta, \varphi) d\Omega$ é a **secção eficaz total**

Absorção de um feixe de partículas na matéria

Seja I a intensidade, i.e., o número de partículas incidentes que atravessam o plano x a unidade de área por unidade de tempo.

A sua diminuição ao atravessar a fatia Δx de matéria é proporcional a:

- σ - probabilidade de interação, ou secção eficaz [cm^2]
- I - número de partículas incidentes
- N_v - nº de centros difusores por unidade de volume do material [cm^{-3}]

Ou seja: $-\Delta I = I \sigma N_v \cdot \Delta x$

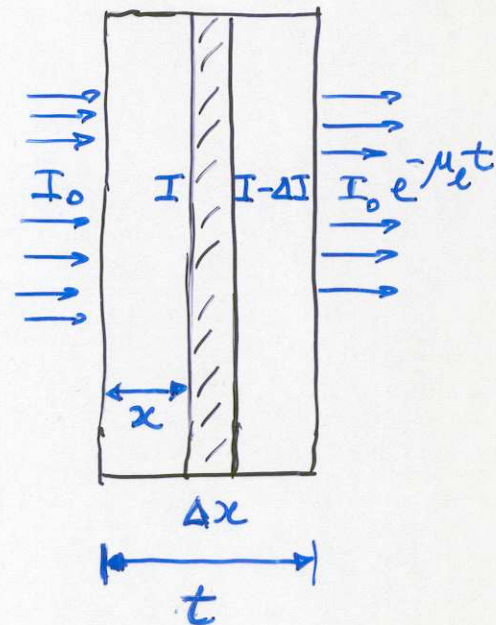
Integrando: $\frac{\Delta I}{I} = -\sigma N_v \Delta x$

$$I = I_0 e^{-\sigma N_v x}$$

ou:

$$I = I_0 e^{-\mu_l x}$$

sendo $\mu_l = \sigma N_v$ o coeficiente de absorção linear ($[\mu] = \text{cm}^{-1}$).



O número de partículas difusoras por unidade de volume N_v pode exprimir-se como:

$$N_v = \frac{\rho}{m} \begin{cases} = \frac{\rho}{A/N_A} = \rho \frac{N_A}{A} & \text{caso do núcleo atómico} \\ = \frac{\rho}{A/ZN_A} = \rho \frac{ZN_A}{A} & \text{caso do electrão difusor} \end{cases}$$

- ρ massa específica do material (g/cm^3)
- m massa de cada partícula difusora (g)
- N_A n.º de Avogadro ($= 6,022 \cdot 10^{23}$ partículas/mole)
- A peso atómico (g/mole)

Como a secção eficaz σ de interacção é muito baixa, é usual exprimir-se a espessura de matéria atravessada em g/cm^2 , como se todos os centros difusores estivessem distribuídos no mesmo plano:

$$d_m = x \rho \quad [d_m] = \text{g/cm}^2$$

$$\mu_m = \mu_x / \rho \quad [\mu_m] = \text{cm}^2/\text{g}$$

Então:

$$I = I_0 e^{-\mu_m d_m},$$

μ_m sendo o coeficiente de absorção de massa.

o coeficiente de absorção linear, μ_l , é tanto maior quanto mais centros difusores por unidade de volume N_v houver, e quanto maior for a secção eficaz σ :

$$\mu_l = \sigma N_v$$

Para o coeficiente de absorção de massa μ_m temos, no caso de núcleos difusores

$$\mu_m = \mu_l / \rho = \sigma N_v / \rho = \sigma \rho \frac{N_A}{A} / \rho = \frac{\sigma N_A}{A}$$

(ou $\mu_m = \sigma \frac{Z N_A}{A}$ para electrões)

Quer dizer: μ_m não depende de ρ , logo é independente do estado físico do material.

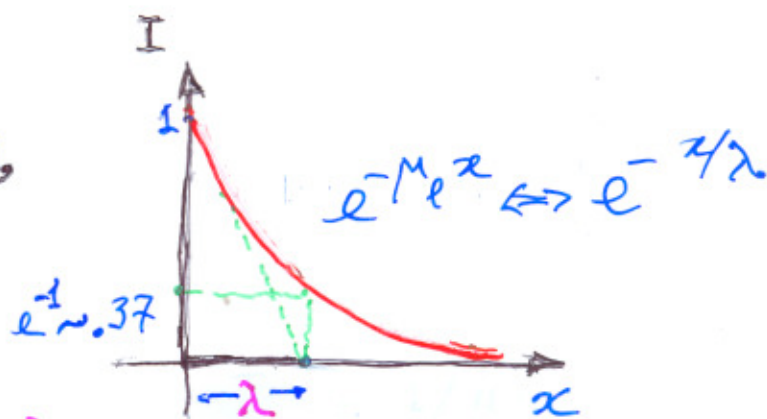
Tal como para os processos de desintegração, define-se:

- livre percurso médio

$$\bar{d} \equiv 1/\mu_l = 1/\sigma N_v \equiv \lambda$$

distância média percorrida pela partícula incidente entre duas colisões

ou: $\bar{d}_m \equiv \rho/\mu_l = \rho/\sigma N_v \equiv \lambda_m$



- semi-espessura

$$d_{1/2} = 0,693/\mu_l \quad \text{espessura que reduz a}$$

metade a intensidade das partículas incidentes.

Decaimentos nucleares em cadeia

Produção e decaimento de um núclídeo

A equação de balanço de uma espécie nuclear que é criada, p. ex: por bombardeamento de uma espécie estável, à taxa de Q núcleos/s e cuja probabilidade de decaimento é λ , tem 2 componentes:

$$\frac{dN}{dt} = Q - \lambda N,$$

que traduzem as taxas de criação e de destruição do núclídeo. Reescrevendo-a:

$$\frac{d(Q - \lambda N)}{Q - \lambda N} = -\lambda dt \quad (Q = \text{cte})$$

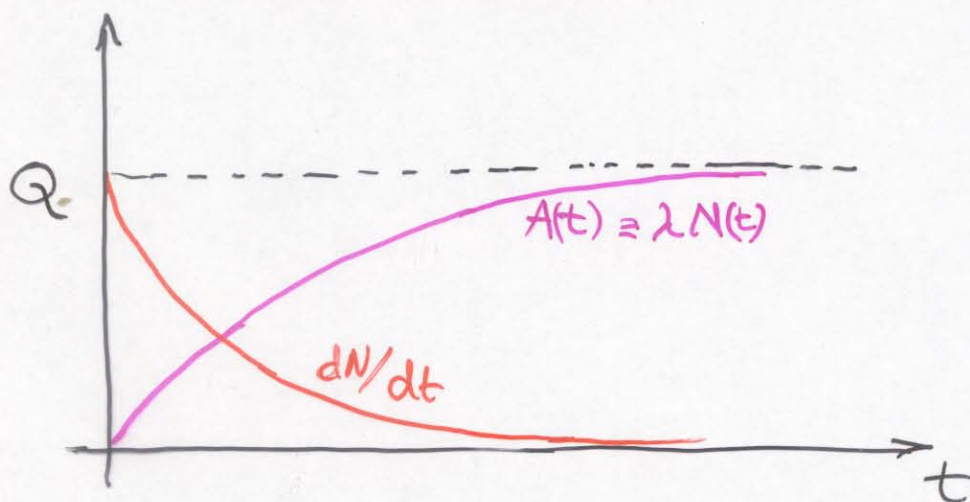
podemos facilmente integrá-la

$$\left[\ln(Q - \lambda N) \right]_{N_0}^{N(t)} = -\lambda t \Leftrightarrow Q - \lambda N(t) = (Q - \lambda N_0) e^{-\lambda t}$$

donde:

$$N(t) = \frac{Q}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

(toma-se $N_{t=0} = 0$)



Cadeias de decaimentos nucleares

Certos núclídeos exibem uma família de decaimentos sucessivos do tipo



Considerando o caso em que N_3 é estável, temos:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3$$

A 2ª equação pode tomar a forma:

$$\lambda_2 \frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 (A_1 - A_2) \Leftrightarrow \frac{dA_2}{dt} = \lambda_2 (A_1 - A_2),$$

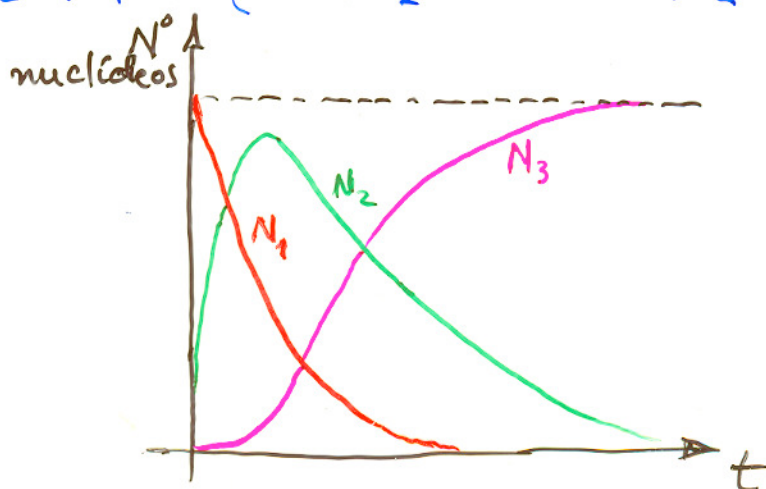
que mostra que o máximo de actividade do núclídeo-filho ocorre para $A_2 = A_1$.

As soluções gerais para cada núclídeo são:

$$N_1(t) = N_1^0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$N_3(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \frac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right)$$



Estudemos alguns casos típicos (ver figuras $\rightarrow$):

- $\lambda_1 > \lambda_2$: Para $t \gg 1/\lambda_1$, a 1ª exponencial torna-se desprezável:

$$N_2(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_1^0 e^{-\lambda_2 t}$$

$\Rightarrow N_2$ decairá com a sua própria constante λ_2 .

- $\lambda_1 < \lambda_2$: Para $t \gg 1/\lambda_2$ é a 2ª exponencial que se pode desprezar:

$$N_2(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 e^{-\lambda_1 t}$$

$\Rightarrow$ O núclídeo-filho decai com a constante do pai, λ_1 , pois ele decai ao ritmo a que é formado. E tem-se:

$$A_2(t) \approx \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} A_1(t)$$

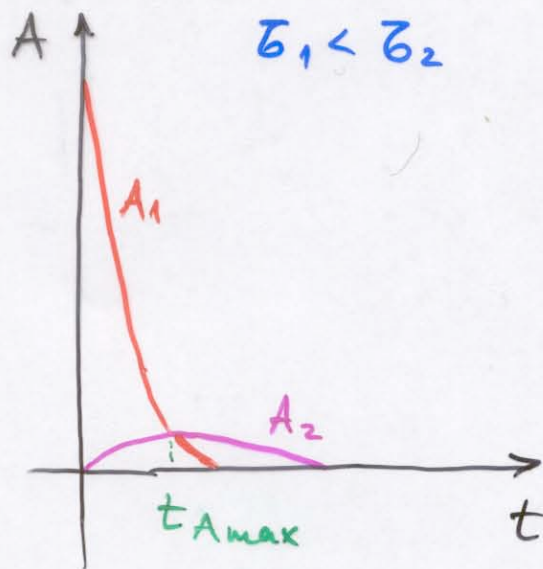
- $\lambda_1 \ll \lambda_2$: No limite temos $A_2(t) \approx A_1(t)$. É o chamado equilíbrio transiente das actividades.

- $\lambda_1 \approx 0, \lambda_1 \ll \lambda_2$: Dá-se o equilíbrio secular, em que, para $t \gg 1/\lambda_2$, vem:

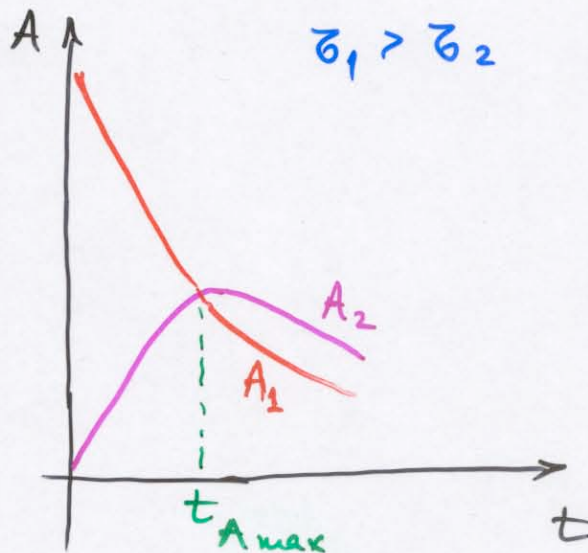
$$\left| \begin{array}{l} N_1(t) = N_1^0 \\ N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1^0 (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{array} \right. \text{ ou } \left| \begin{array}{l} A_1(t) = A_1^0 \\ A_2(t) = A_1^0 (1 - e^{-\lambda_2 t}) \end{array} \right.$$

Aqui, a condição de equilíbrio dá-se para $t \gg$, isto é, na saturação.

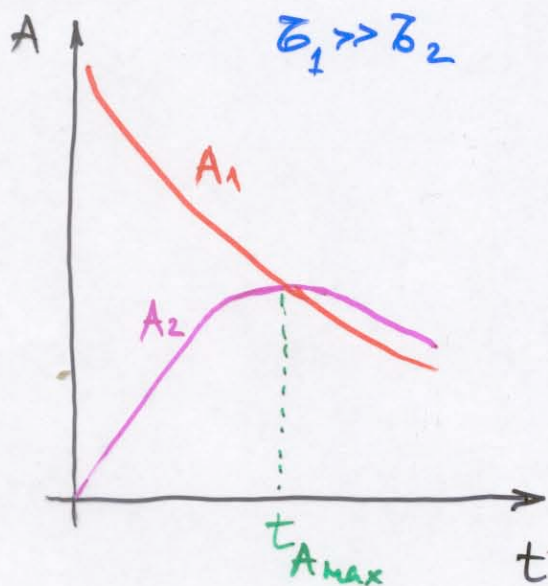
• caso $\lambda_1 > \lambda_2$



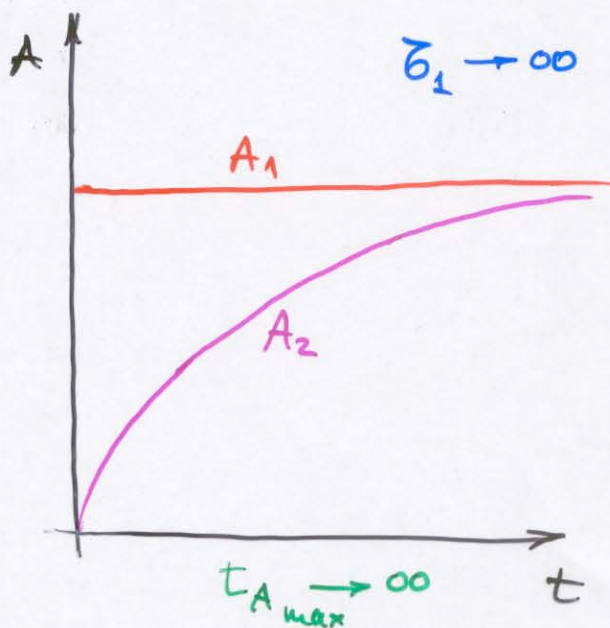
• caso $\lambda_1 < \lambda_2$



• caso $\lambda_1 \ll \lambda_2$



• caso $\lambda_1 \approx 0$ (e/ $\lambda_1 \ll \lambda_2$)



(Vida média $\tau = 1/\lambda$)