Decaimentos nucleares em cadeia

Produção e decaimento de um nuclídeo

A equação de balanço de uma espécie nuclear que é criada, p. ex: por bombardeamento de uma espécie estável, à taxa de Q núcleos/s e cuja probabilidade de decaimento é λ, tem 2 componentes:

$$\frac{dN}{dt} = Q - \lambda N,$$

que traduzem as taxas de criação e de destruição do nuclídeo. Reescrevendo-a:

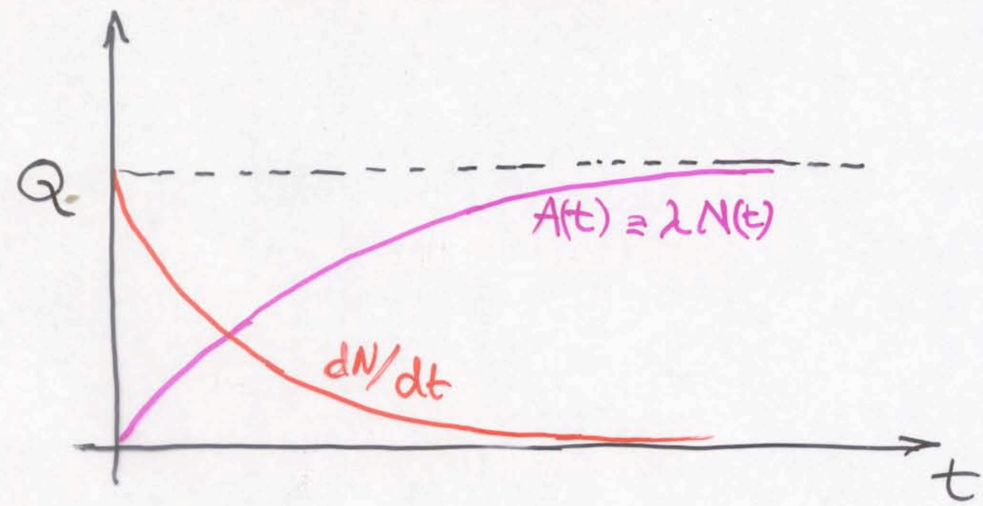
$$\frac{d(Q-\lambda N)}{Q-\lambda N} = -\lambda \, dt \qquad (Q = c^{te})$$

podemos fàcilmente integrá-la

$$\Big[\ln(Q-\lambda N)\Big]_{N_0}^{N(t)} = -\lambda t \Leftrightarrow Q - \lambda N(t) = (Q - \lambda N_0)\, e^{-\lambda t}$$

donde:

$$\boxed{N(t) = \frac{Q}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda t}\right)} \qquad \begin{pmatrix}\text{toma-se} \\ N_{t=0} = 0\end{pmatrix}$$



Cadeias de decaimentos nucleares

Certos nuclídeos exibem uma família de decaimentos sucessivos do tipo

$$N_1 \xrightarrow{\lambda_1} N_2 \xrightarrow{\lambda_2} N_3 \longrightarrow \cdots$$

Considerando o caso em que N_3 é estável, temos:

- $\dfrac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$

$$\begin{cases} \dfrac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \\[2ex] \dfrac{dN_3}{dt} = \lambda_2 N_2 - \lambda_3 N_3 \end{cases} .$$

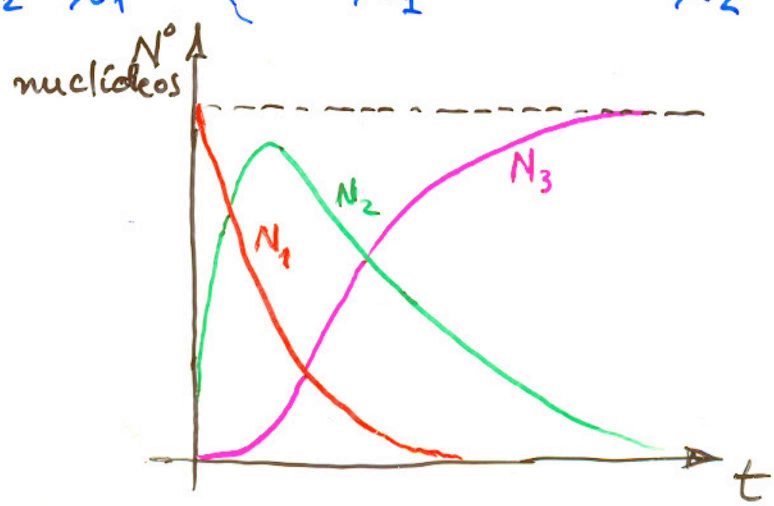
A 2ª equação pode tomar a forma:

$$\lambda_2 \frac{dN_2}{dt} = \lambda_2 (A_1 - A_2) \Longleftrightarrow \frac{dA_2}{dt} = \lambda_2 (A_1 - A_2),$$

que mostra que o máximo de actividade do nuclídeo-filho ocorre para $A_2 = A_1$.

As soluções gerais para cada nuclídeo são:

$$\begin{cases} N_1(t) = N_1^0 \, e^{-\lambda_1 t} \\[2ex] N_2(t) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \\[2ex] N_3(t) = \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 \left(\dfrac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} - \dfrac{1 - e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2} \right) \end{cases}$$



Estudemos alguns casos típicos (ver figuras →):

- $\lambda_1 > \lambda_2$: Para $t \gg 1/\lambda_1$, a 1ª exponencial torna-se desprezável:

$$N_2(t) \simeq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} N_1^0 \, e^{-\lambda_2 t}$$

⟹ N_2 decairá com a sua própria constante λ_2.

- $\lambda_1 < \lambda_2$: Para $t \gg 1/\lambda_2$ é a 2ª exponencial que se pode desprezar:

$$N_2(t) \simeq \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_1^0 \, e^{-\lambda_1 t}$$

⟹ O nuclídeo-filho decai com a constante do pai, λ_1, pois ele decai ao ritmo a que é formado. E tem-se:

$$\boxed{A_2(t) \simeq \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} A_1(t)}$$

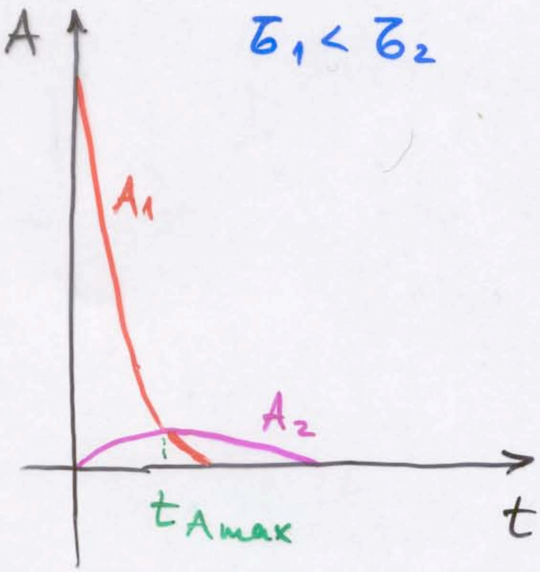
- $\lambda_1 \ll \lambda_2$: No limite temos $A_2(t) \simeq A_1(t)$. É o chamado equilíbrio transiente das actividades.

- $\lambda_1 \simeq 0$, $\lambda_1 \ll \lambda_2$: Dá-se o equilíbrio secular, em que, para $t \gg 1/\lambda_2$, vem:

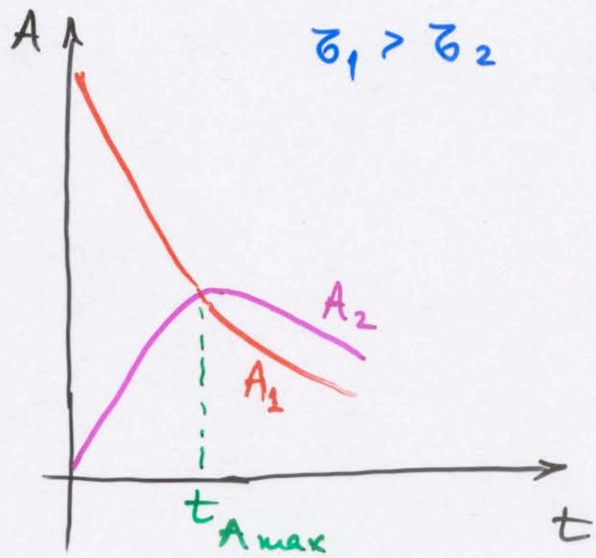
$$\left\| \begin{array}{l} N_1(t) = N_1^0 \\ N_2(t) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} N_1^0 \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{array}{l} A_1(t) = A_1^0 \\ A_2(t) = A_1^0 \left(1 - e^{-\lambda_2 t}\right) \end{array} \right.$$

Aqui, a condição de equilíbrio dá-se para $t \gg$, isto é, na saturação.

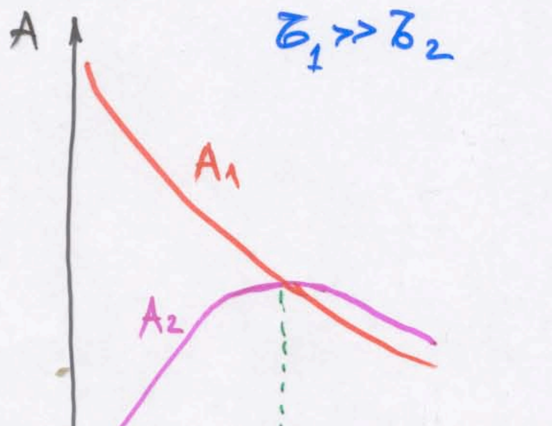
• caso $\lambda_1 > \lambda_2$



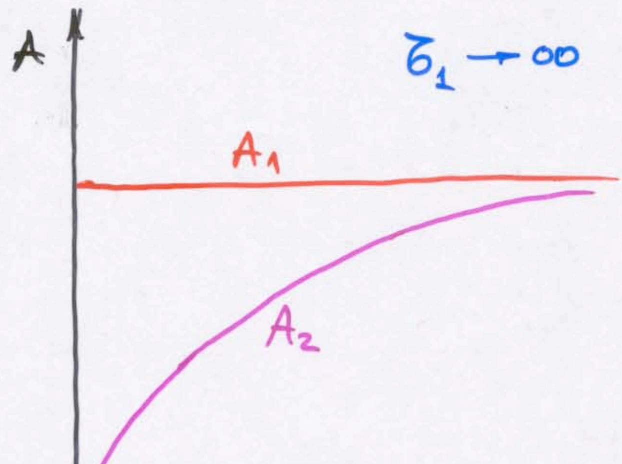
• caso $\lambda_1 < \lambda_2$



• caso $\lambda_1 \ll \lambda_2$



• caso $\lambda_1 \simeq 0$ (c/ $\lambda_1 \ll \lambda_2$)



(Vida média $\tau = 1/\lambda$)