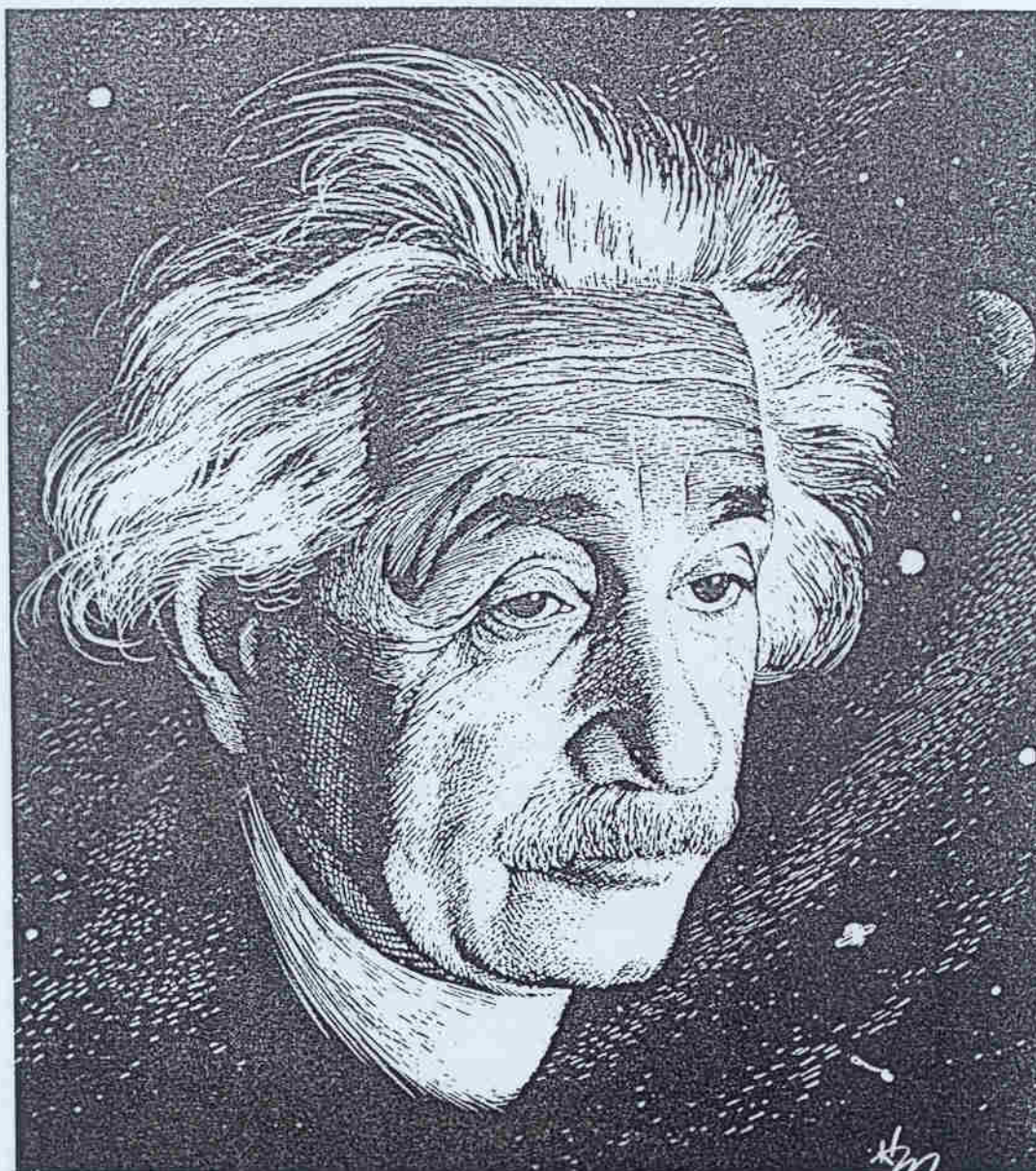


Relatividade
Restrita e geral



Hal McIntosh. Courtesy of the Saturday Review

ALBERT EINSTEIN

Ulm, Germany, March 14, 1879—Princeton, New Jersey, April 18, 1955

Relatividade Restrita

Einstein (1905)

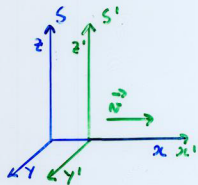
As leis da Física devem ser as mesmas em todos os referenciais de inércia.

A velocidade da luz no vácuo é constante independentemente da velocidade do observador (e da fonte).

Relatividade Restrita (resumo)

Postulados

- As leis da física são idênticas em todos os referenciais de inércia.
- A velocidade da luz é constante em todos os referenciais de inércia.



Transf. de Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma (t - \frac{v}{c^2} x) \end{cases}$$
$$\gamma = 1 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Contração de Lorentz

$$\Delta L = \Delta L' / \gamma$$

Dilatação de tempo

$$\Delta t = \Delta t' \gamma$$

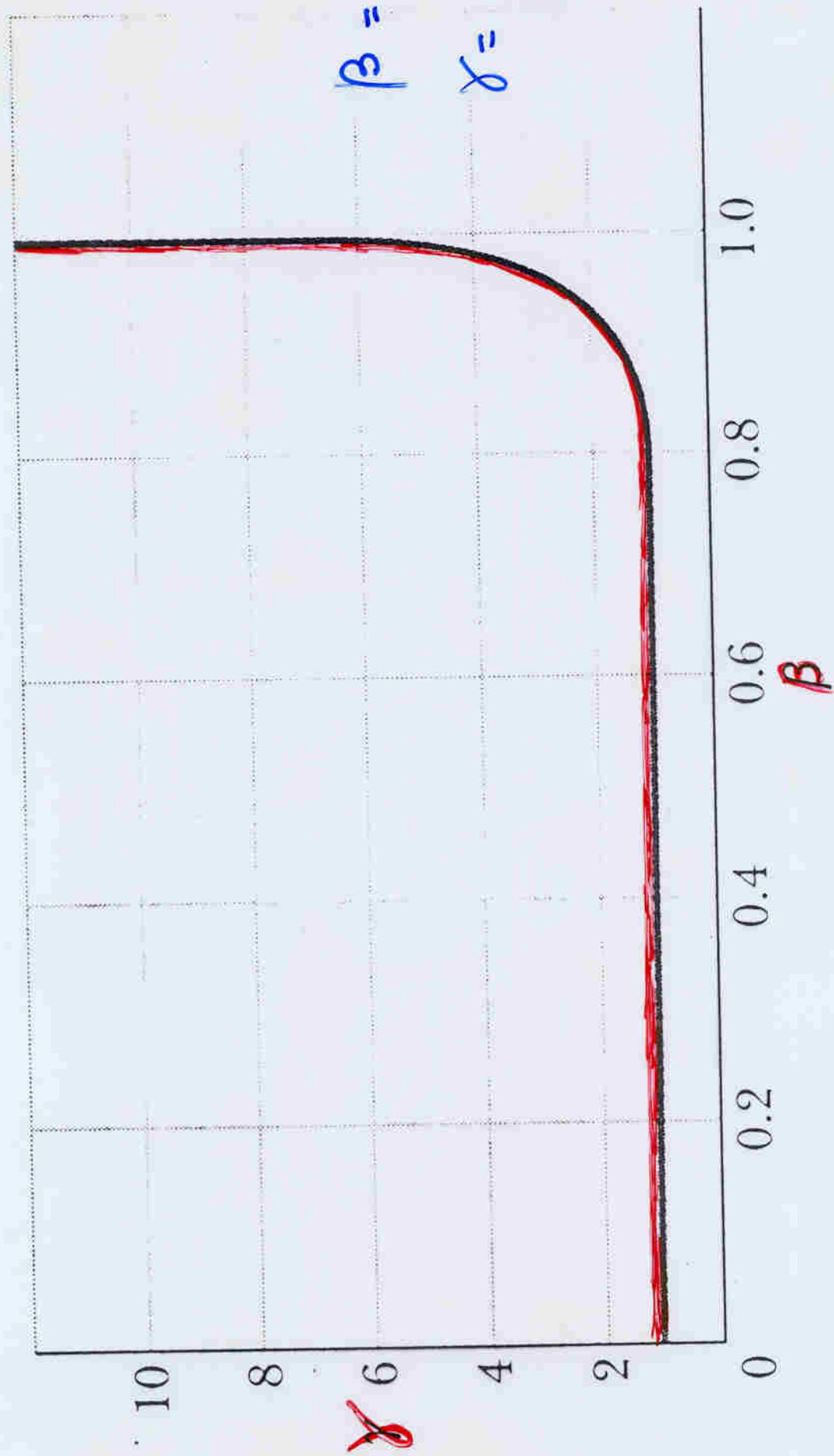
ou ainda

$$X^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} X^{\nu}$$

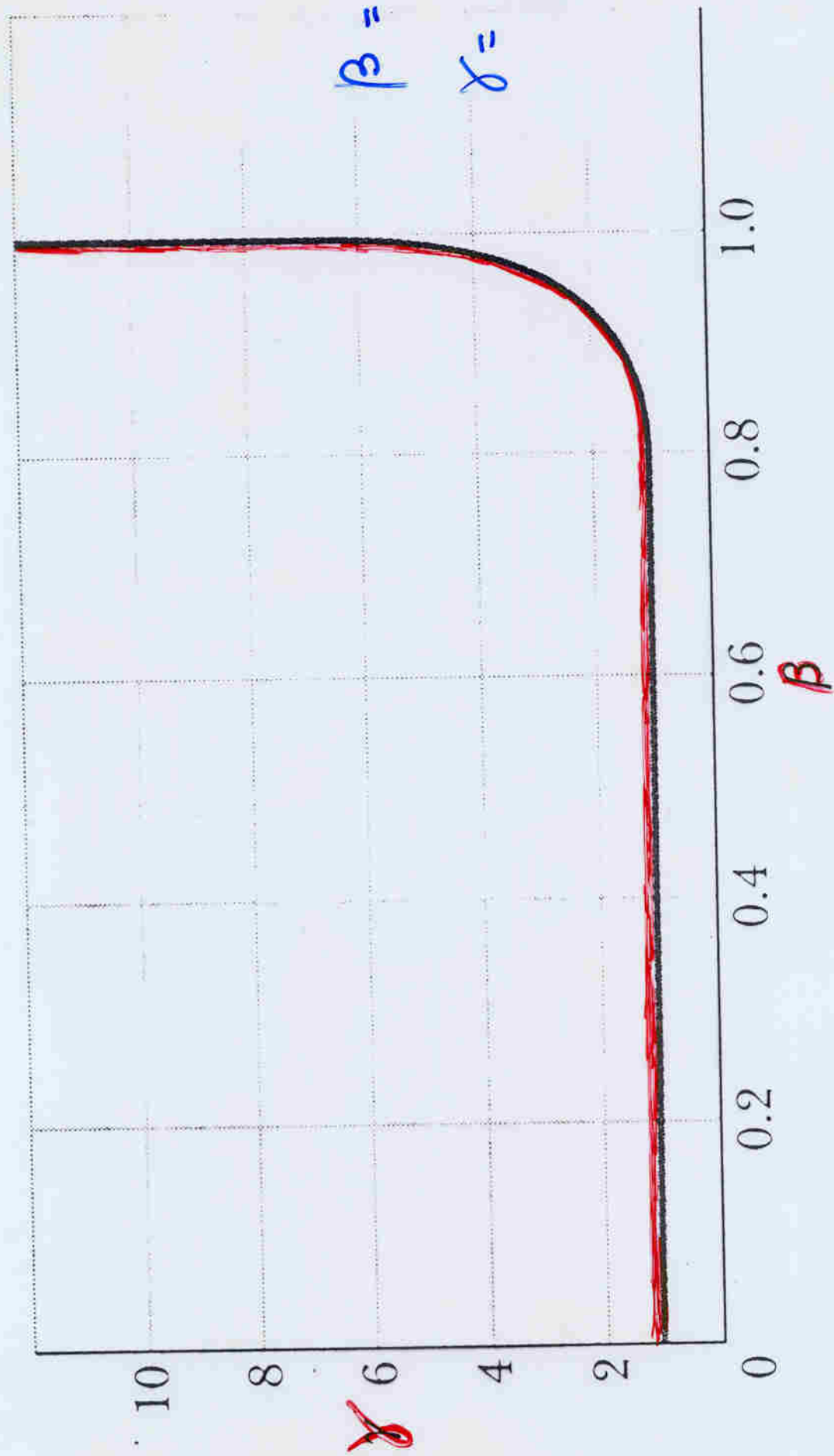
quadrivectores

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\beta = v/c$$

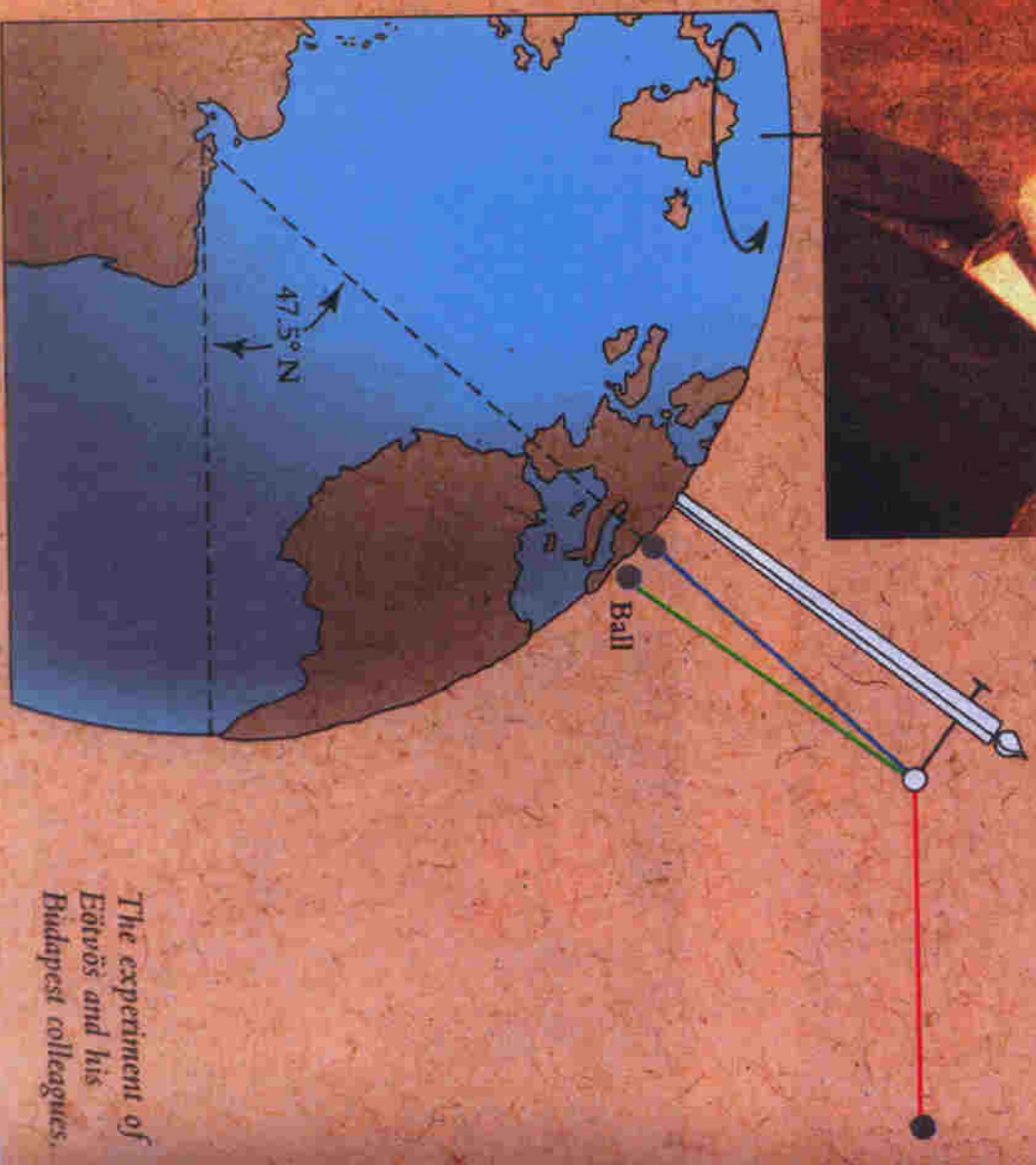


$$\beta = v/c$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



$$\beta = v/c$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

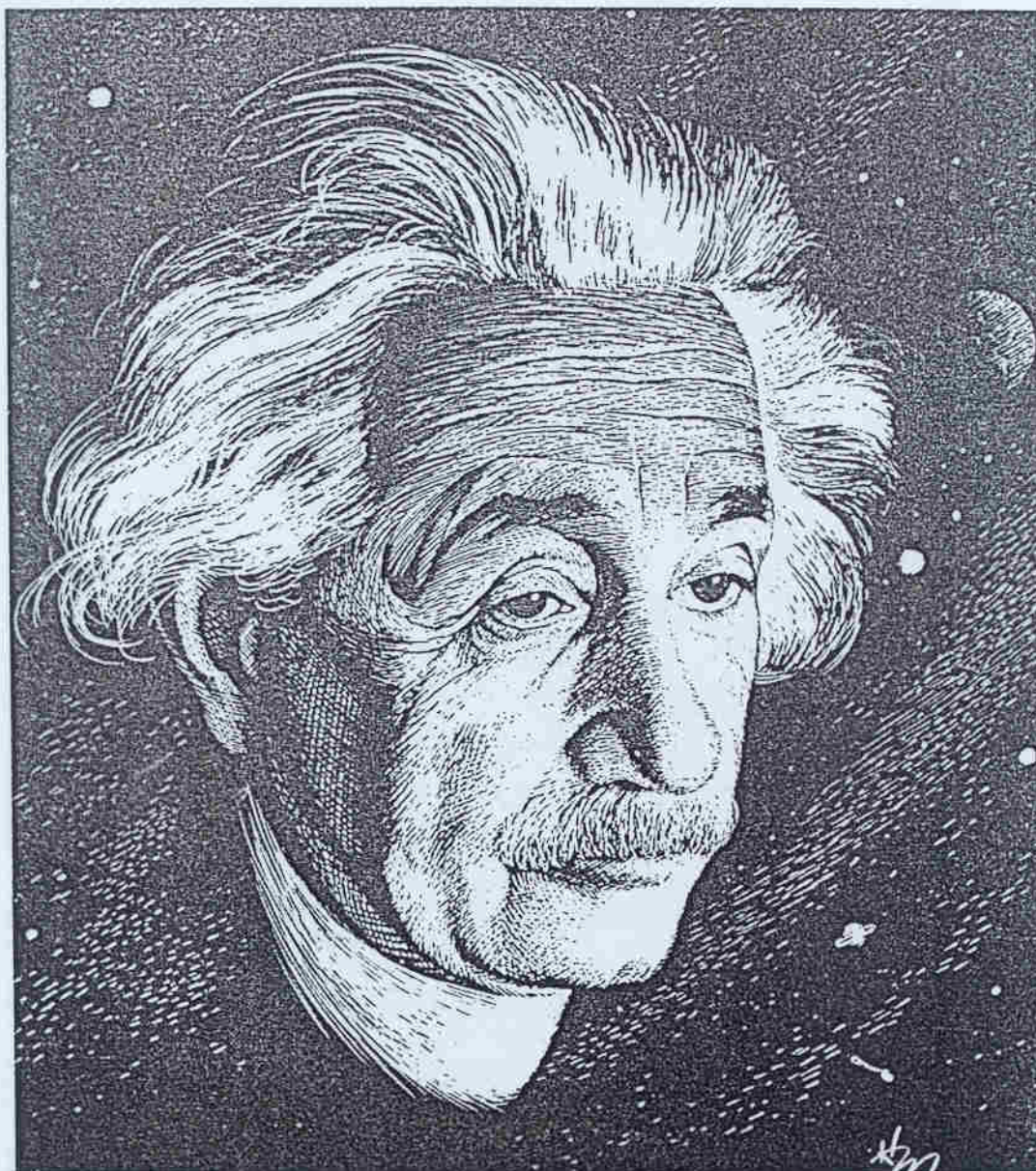
Experiência de Eötvös



The experiment of Eötvös and his Budapest colleagues.

- Na experiência de gravidade o pendulo aproxima a posição "vertical"
- Na ausência de rotação o pendulo aproxima a posição "azul"
- Na presença da gravidade e rotação o pendulo aproxima a posição "verde" do material em que se fixa





Hal McIntosh. Courtesy of the Saturday Review

ALBERT EINSTEIN

Ulm, Germany, March 14, 1879—Princeton, New Jersey, April 18, 1955

Relatividade Restrita

Einstein (1905)

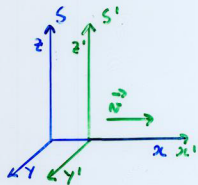
As leis da Física devem ser as mesmas em todos os referenciais de inércia.

A velocidade da luz no vácuo é constante independentemente da velocidade do observador (e da fonte).

Relatividade Restrita (resumo)

Postulados

- As leis da física são idênticas em todos os referenciais de inércia.
- A velocidade da luz é constante em todos os referenciais de inércia.



Transf. de Lorentz

$$\begin{cases} x' = \gamma (x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma (t - \frac{v}{c^2} x) \end{cases}$$
$$\gamma = 1 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Contração de Lorentz

$$\Delta L = \Delta L' / \gamma$$

Dilatação de tempo

$$\Delta t = \Delta t' \gamma$$

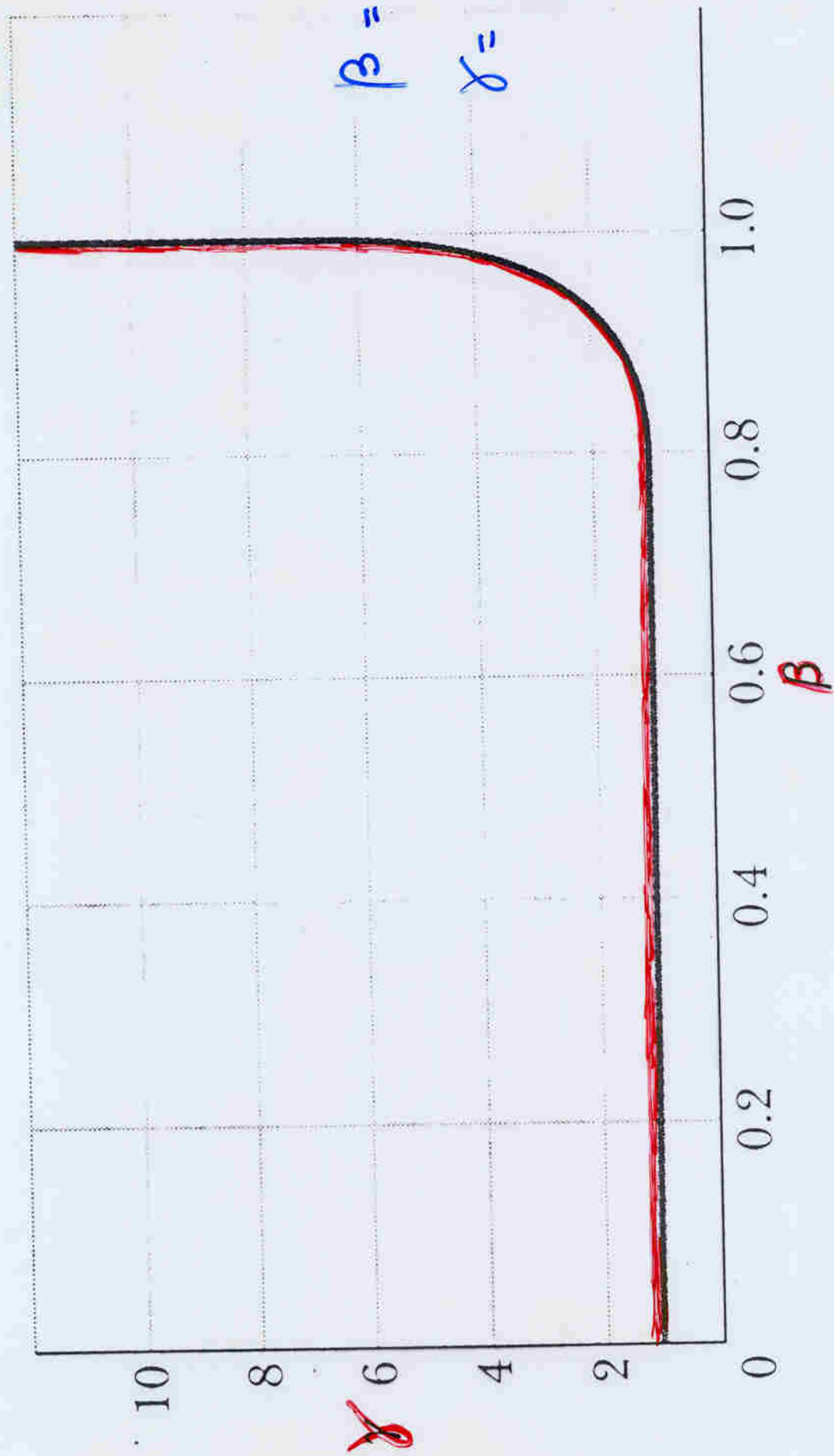
ou ainda

$$X^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} X^{\nu}$$

quadrivectores

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\beta = v/c$$



$$\beta = v/c$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Transformação de Lorentz

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

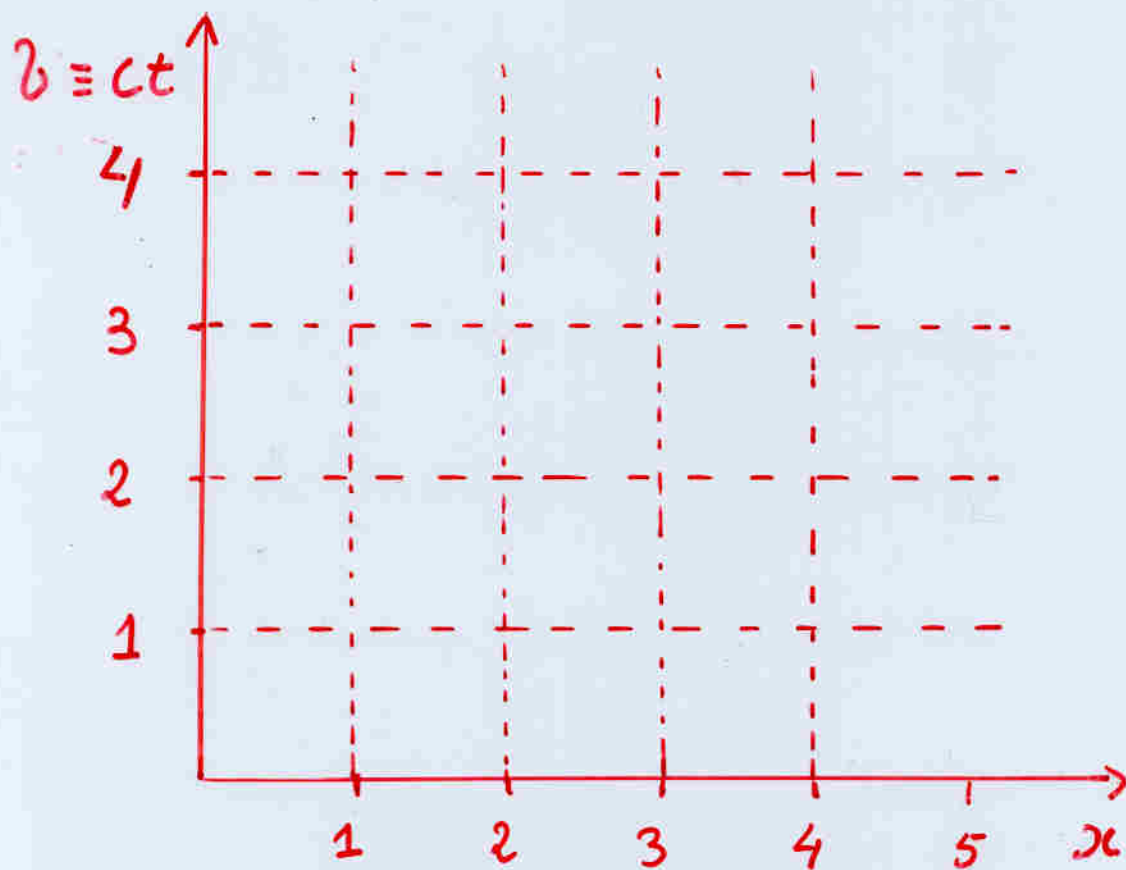
$$t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$\left[\begin{array}{l} x' = \frac{x - \beta z}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \dots \\ z' = \frac{z - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \beta = V/c \\ z = ct \end{array}$$

Transformação de Lorentz

Representação gráfica

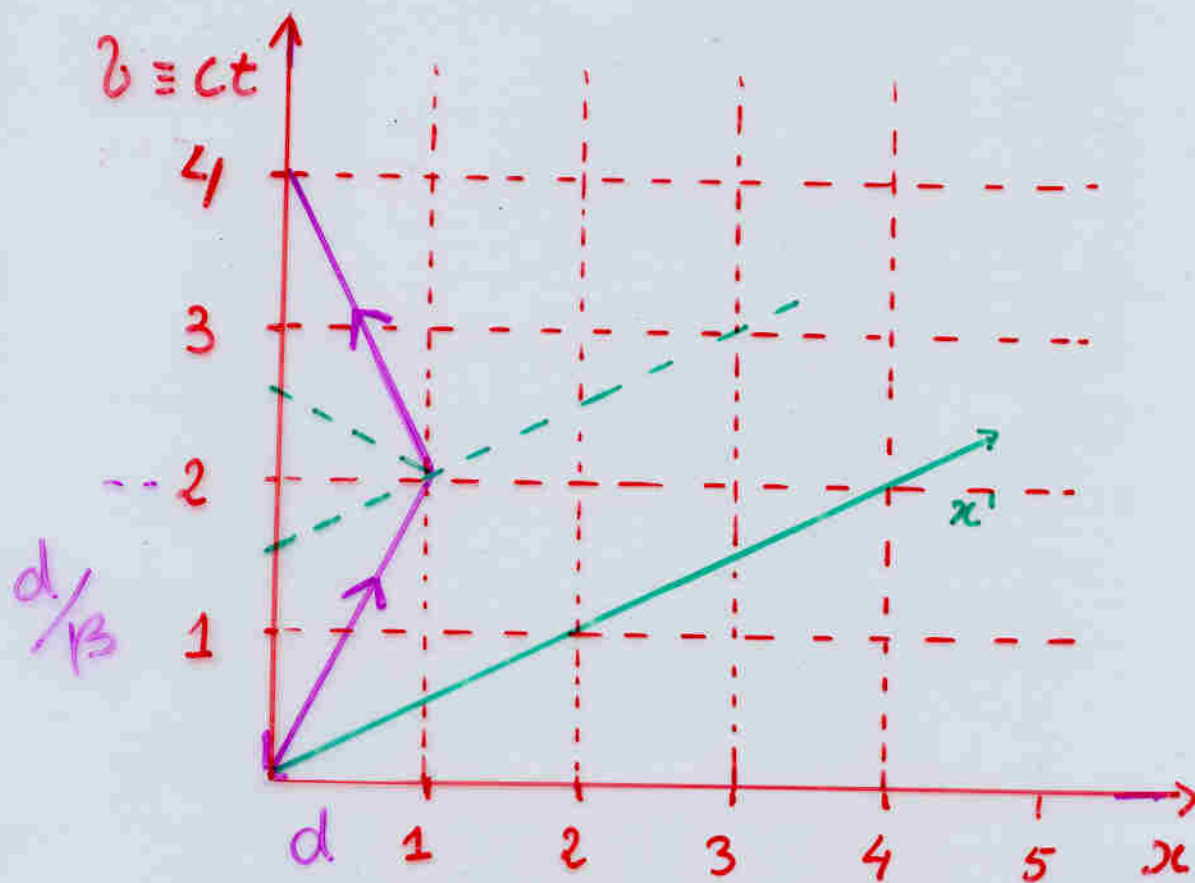
Referencial S



Transformação de Lorentz

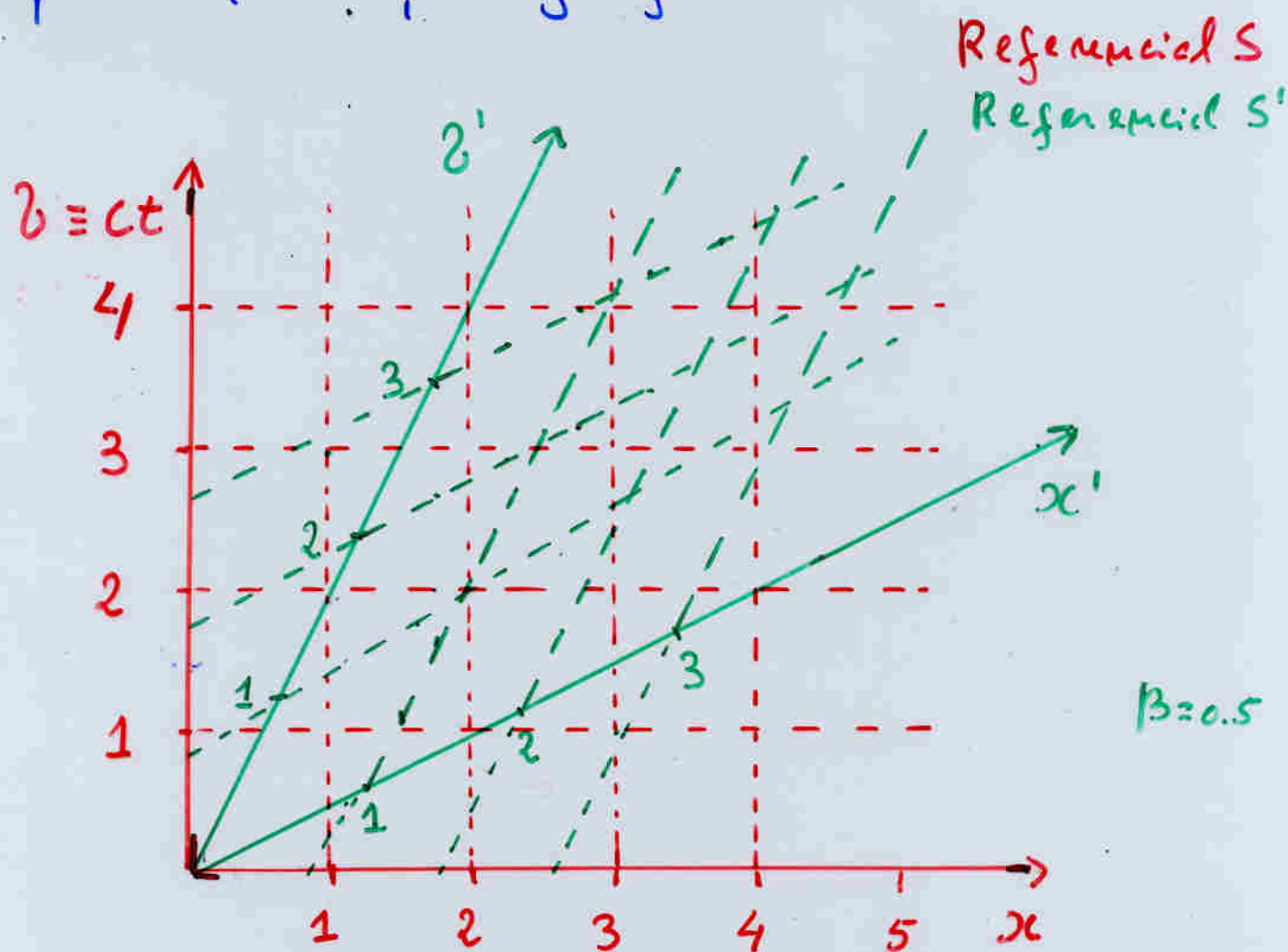
Representação gráfica

Referencial S



Transformação de Lorentz

Representação gráfica



$$z' = 0 \Rightarrow z = \beta x$$

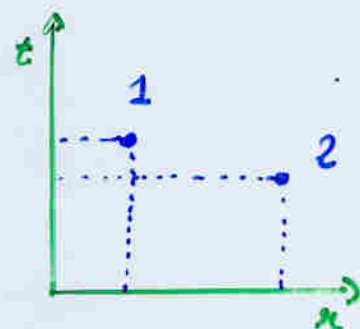
$$x' = 0 \Rightarrow z = x / \beta$$

"Distância entre dois acontecimentos"

$$\Delta S^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

$$\Delta S'^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2)$$

$$\Delta S^2 = \Delta S'^2$$



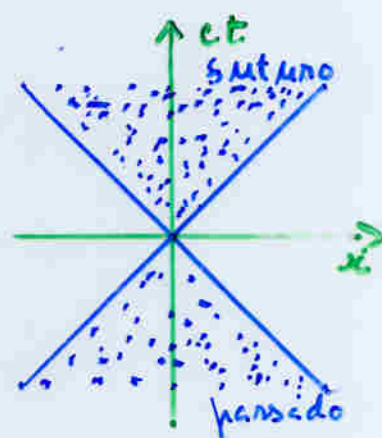
invariante !!!

"Zonas" espaço tempo

$$\Delta S^2 > 0 \quad \text{"time-like"} \quad (\tau = \sqrt{\Delta S^2})$$

$$\Delta S^2 = 0 \quad \text{cone de luz} \quad (\Delta x = c\Delta t)$$

$$\Delta S^2 < 0 \quad \text{"space-like"} \quad (L = \sqrt{-\Delta S^2})$$



notação "matricial"

$$\Delta S^2 = \underbrace{g_{\mu\nu}}_{X_\mu} X^\mu X^\nu$$

métrica $g_{\mu\nu}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

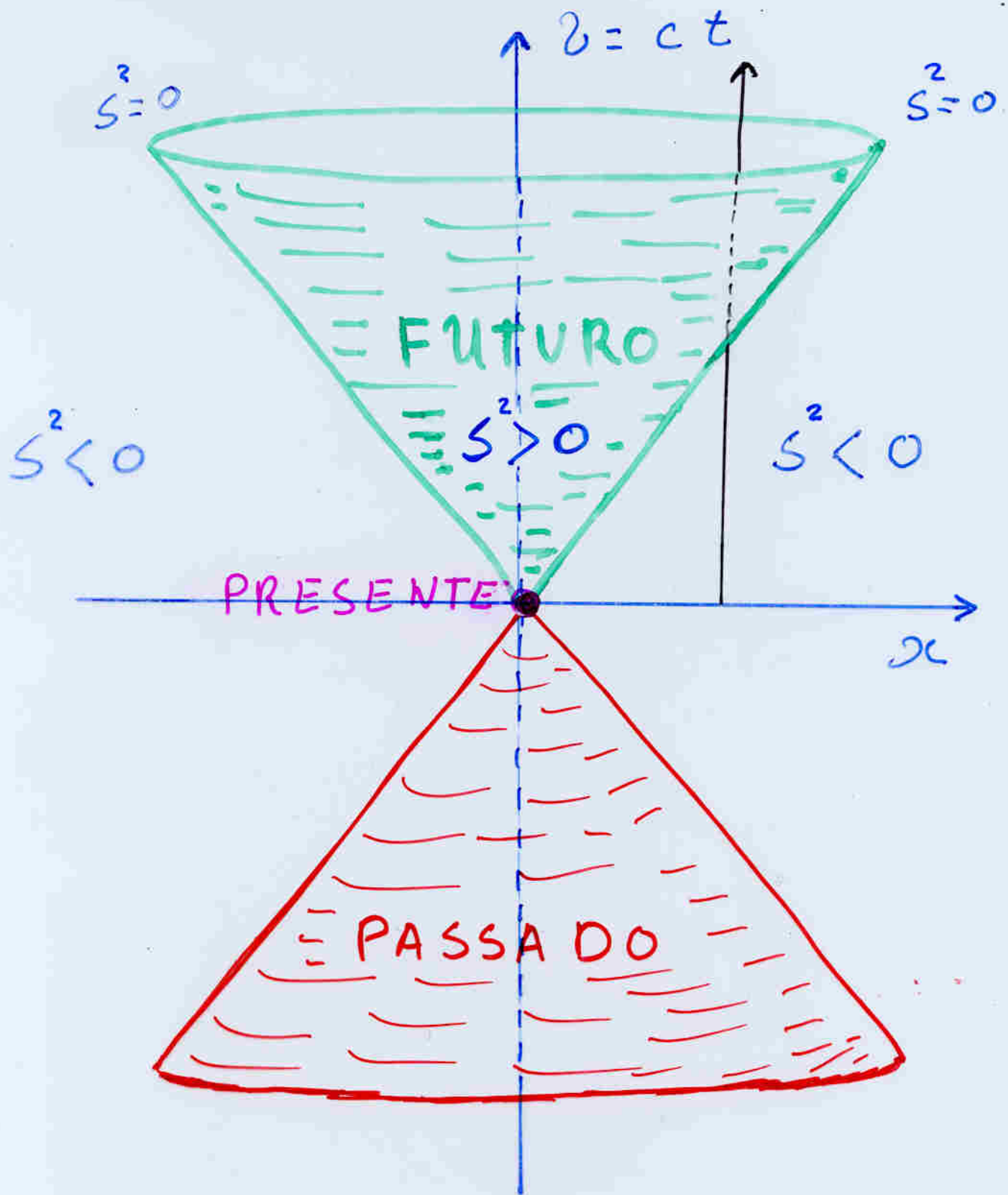
Produto escalar de dois quadri-vectores

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a_\mu b^\mu \\ &= a^0 b^0 - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= a_\mu a^\mu \\ &= (a^0)^2 - |\vec{a}|^2 \end{aligned}$$

invariantes !!!

Espaço - tempo



$$\underline{s^2 = t^2 - x^2}$$

Energia e momento

$$\vec{h} = \gamma m \vec{v}$$

$$E = \gamma m c^2$$

$$h = \begin{bmatrix} E/c \\ \vec{h} \end{bmatrix}$$

ganante inv. conservação $\vec{h}$

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right)$$

quadrivector

Algumas relações úteis

$$h^2 = (E/c)^2 - |\vec{h}|^2 = m^2 c^2$$

$$E^2 = |\vec{h}|^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$\gamma = E / (m c^2)$$

$$v/c = \vec{h} / (E/c)$$

Sistema Natural $c=1$

$$E^2 = p^2 + M^2$$

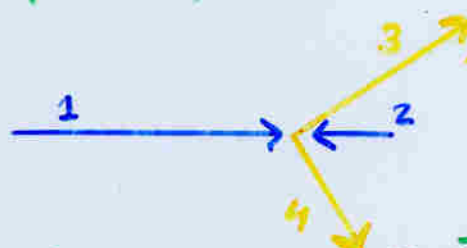
$$\gamma = E/M$$

$$\beta = p/E$$

Colisão duas partículas

$$(h_1 + h_2) = (h_3 + h_4)$$

$$\begin{aligned} \Delta E_{CM}^2 &= (h_1 + h_2)^2 \\ &= M_{inv}^2 \end{aligned}$$

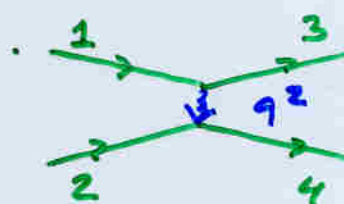


conservação $E, \vec{p}$

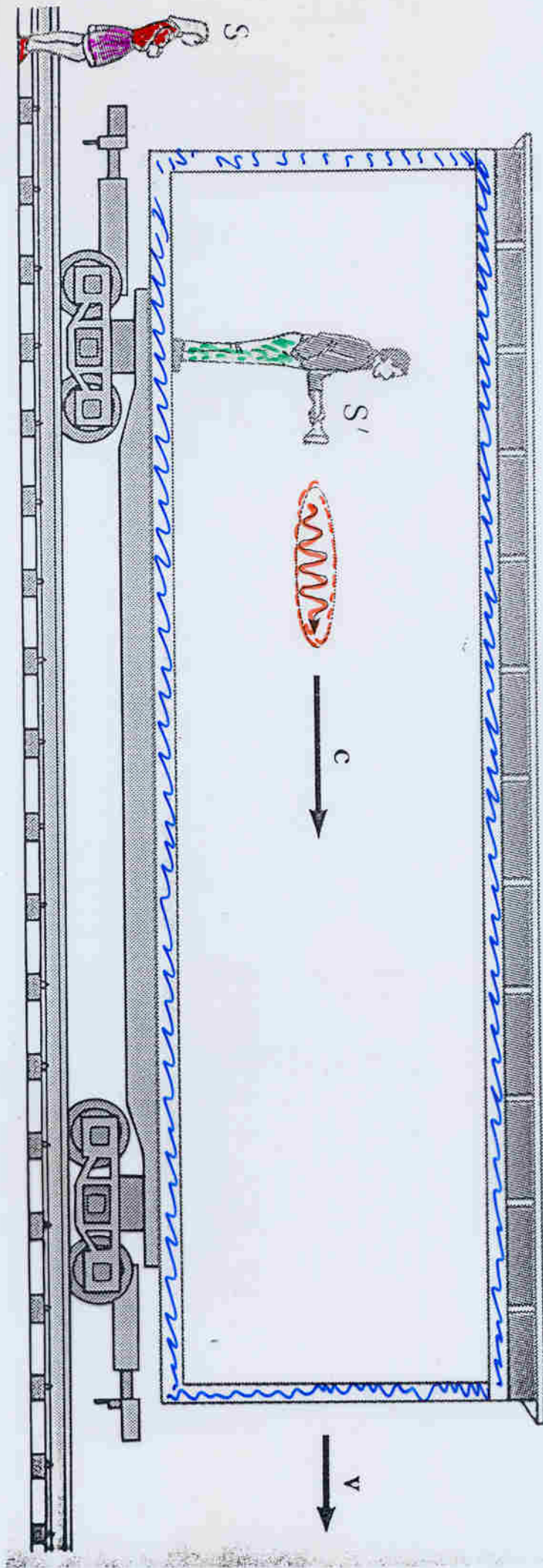
$$(h_{1cm} + h_{2cm}) = (E_{cm}, 0)$$

Massa invariante

$$\begin{aligned} t, q^2 \quad (h_1 - h_3)^2 &= [(E_1 - E_3)^2 - (\vec{h}_1 - \vec{h}_3)^2] \\ &\approx -2 E_1 E_3 (1 - \cos \theta) \\ &\approx -4 E_1 E_3 \sin^2(\theta/2) \end{aligned}$$



$$m \ll E$$



Cinematica Relativista: Exemplos

E o feixe chega à Terra

$$\tau_{\mu} = 2.19703 \pm 0.00004 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$c \tau_{\mu} = 658.65 \text{ m} !!!$$

Dilatação do tempo $\Delta T = \gamma \Delta T'$
 $= E / m \Delta T'$

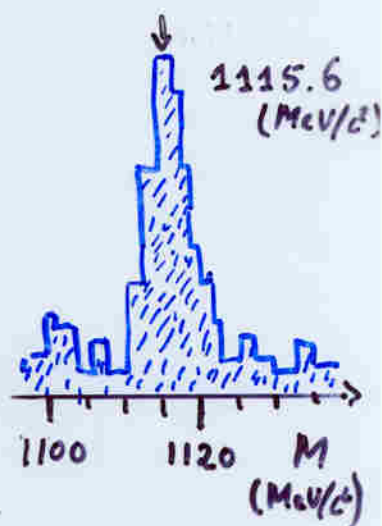
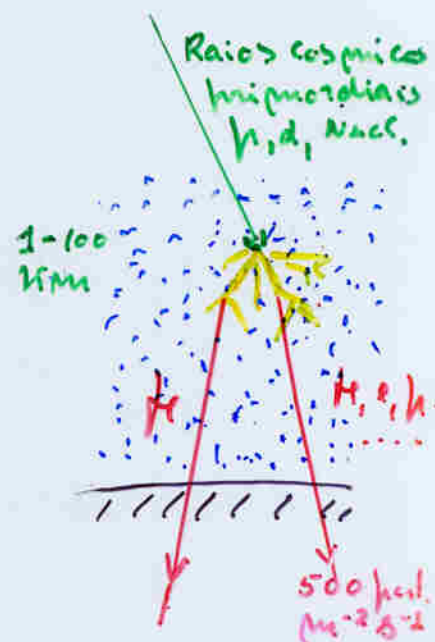
$$m_{\mu} = 105.658387 \pm 0.000034 \text{ MeV}$$

$$\gamma \sim 10 - 10^3 (E \sim 1 - 100 \text{ GeV}) !!!$$

A massa do Λ^0

$$\Lambda^0 \rightarrow p \pi^- \Rightarrow \begin{bmatrix} E_{\Lambda^0} \\ \vec{p}_{\Lambda^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p \\ \vec{p}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_{\pi} \\ \vec{p}_{\pi} \end{bmatrix}$$


$$M_{\Lambda^0}^2 = [(E_p + E_{\pi})^2 - (\vec{p}_p + \vec{p}_{\pi})^2]$$



Alvo fixo versus Acel de Colisão

$$[(E_{CM}, 0)]^2 = [(E_{lab}, p_{lab}) + (M, 0)]^2$$

$$E_{CM}^2 = (E + M)^2 - p_{lab}^2$$

$$= 2M^2 + 2E_1 M$$

de $M \ll E$

$$E_{CM} \approx \sqrt{2 p_{lab} M}$$

$$\approx \sqrt{2 \times 450} \approx 29 \text{ GeV}$$

$$\frac{450 \text{ GeV}}{p} \rightarrow \boxed{\text{H}_2}$$

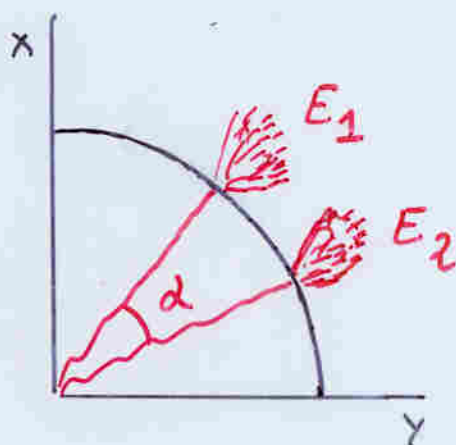
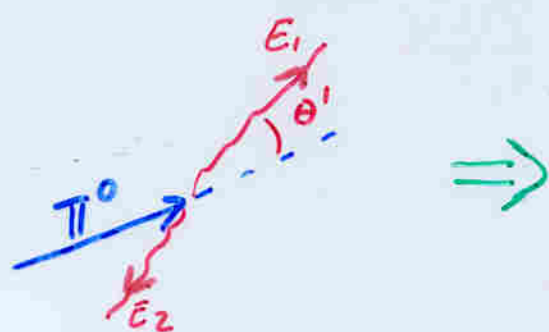
$$=$$

$$\frac{14.5 \text{ GeV}}{p} \leftarrow \frac{14.5 \text{ GeV}}{p}$$

mas $\gamma \ll 1 !!!$

π^0 identification

Kinematics . . .



$$E_{\gamma 1} = \gamma \frac{M_{\pi}}{2} (1 + \beta \cos \theta')$$

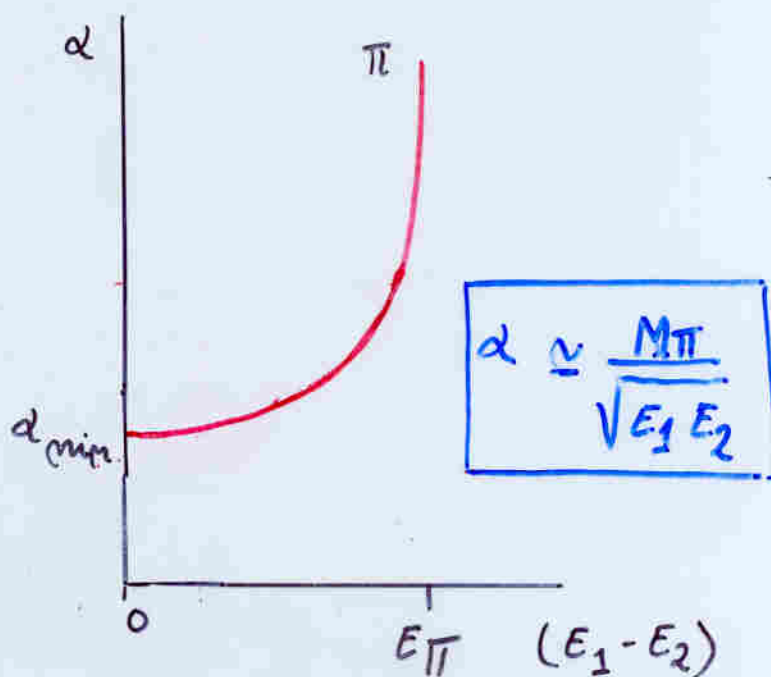
$$E_{\gamma 2} = \gamma \frac{M_{\pi}}{2} (1 - \beta \cos \theta')$$

$$\gamma = E_{\pi} / M_{\pi}$$

$$\beta = p_{\pi} / E_{\pi}$$

$$d_{\min} = \frac{2 M_{\pi}}{p_{\pi}}$$

$$P_{E_{\gamma} < E'} = \frac{2 E'}{p_{\pi}}$$



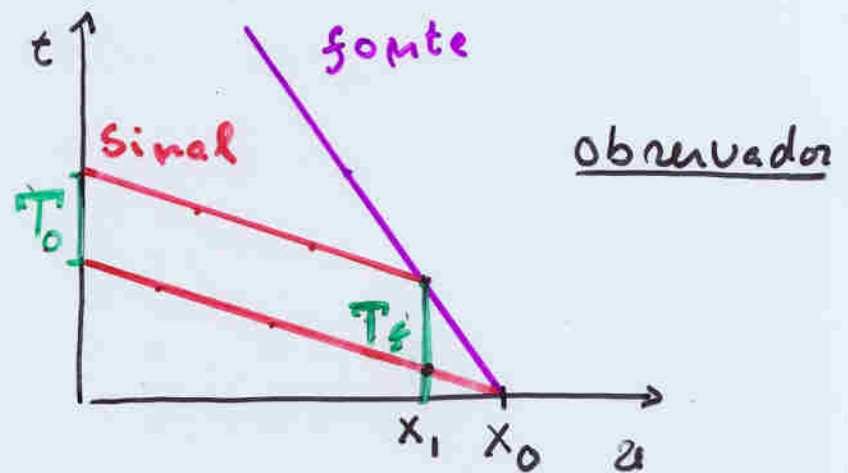
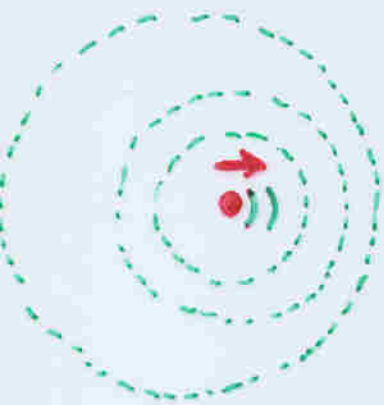
$$\left[\begin{array}{l} 5 \text{ GeV}/c \\ d_{\min} \sim 0.054 \text{ Rad} \\ \text{DELPHI BARREL} \sim 12 \text{ cm} \\ P_{E_{\gamma} < 0.5} \sim 20\% !!! \end{array} \right]$$

Problems . . .

- low energy photon
- separation between two photons
- conversion

Efeito de Doppler

Fonte em movimento
observador parado



$$T_0 = T_f - \frac{x_0 - x_1}{v_s}$$

$$T_0 = T_f - \frac{v_s T_f}{v_s} = \frac{v_s - v_s}{v_s} T_f$$

Clássica

$$T_f = T'_f \Rightarrow$$

$$f = \frac{v_s}{v_s - v_f} f'$$

Relativista

$$T_f = \gamma T'_f \Rightarrow$$

$$f = \frac{1}{\gamma} \frac{v_s}{v_s - v_f} f'$$

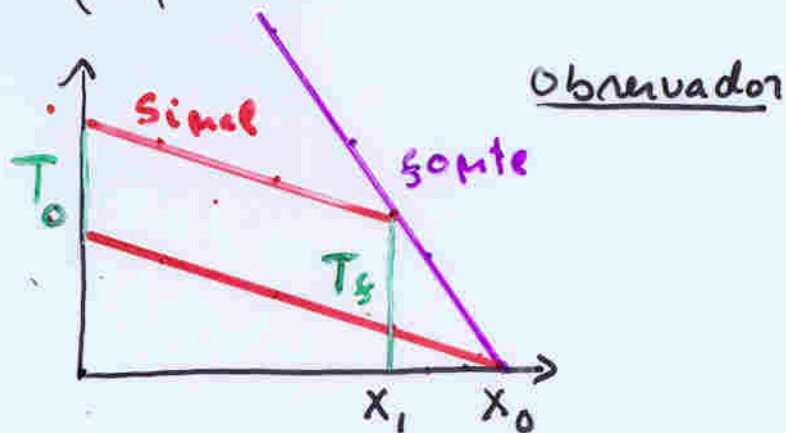
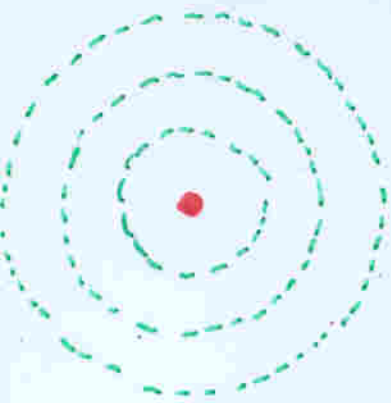
$$f = \sqrt{\frac{c + v_s}{c - v_s}} f'$$

$v_s = c$

Efeito de Doppler

Fonte parada

Observador em movimento



$$T_0 = T_s - \frac{x_0 - x_1}{V_R}$$

$$T_0 = T_s - \frac{V_o}{V_R} \quad T_s = \frac{V_R - V_o}{V_R} T_s$$

Clássica

$$T_s = T'_s$$

$$V_R = V_o + V_s$$

$\Rightarrow$

$$f = \frac{V_s + V_o}{V_s} f'$$

Relativista

$$T_s = \gamma T'_s$$

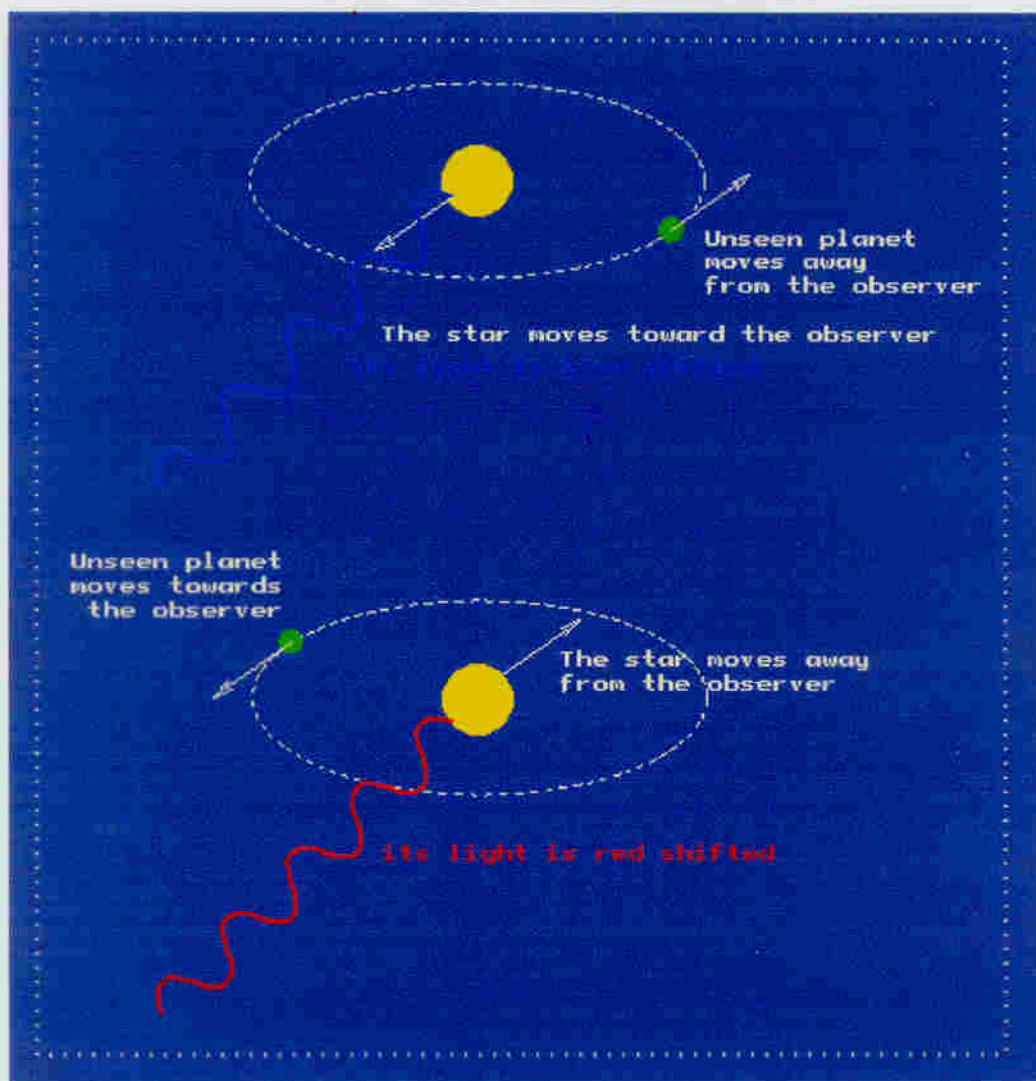
$$V_R = \frac{V_s + V_o}{1 + \frac{V_o V_s}{c^2}}$$

$\Rightarrow$

$$f = \frac{1}{\gamma} \frac{V_s + V_o}{V_s} f'$$

$$f = \sqrt{\frac{c + V_o}{c - V_o}} f'$$

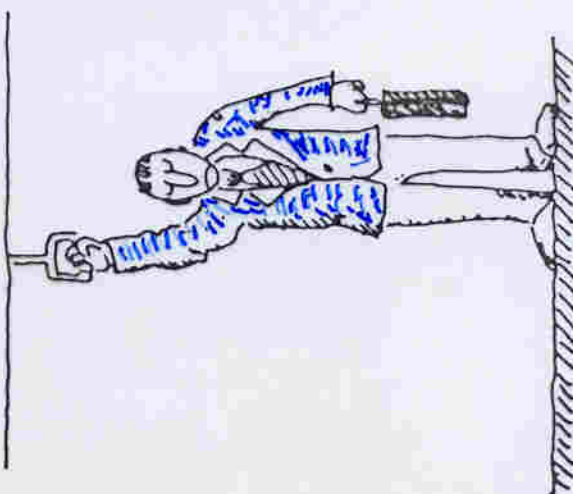
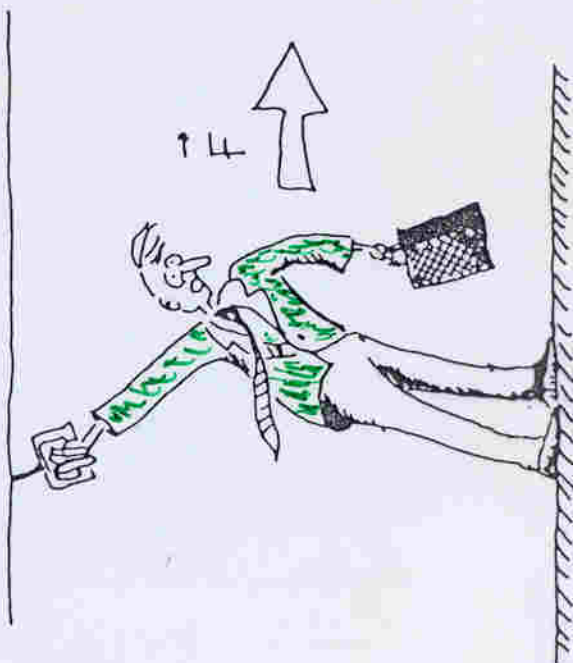
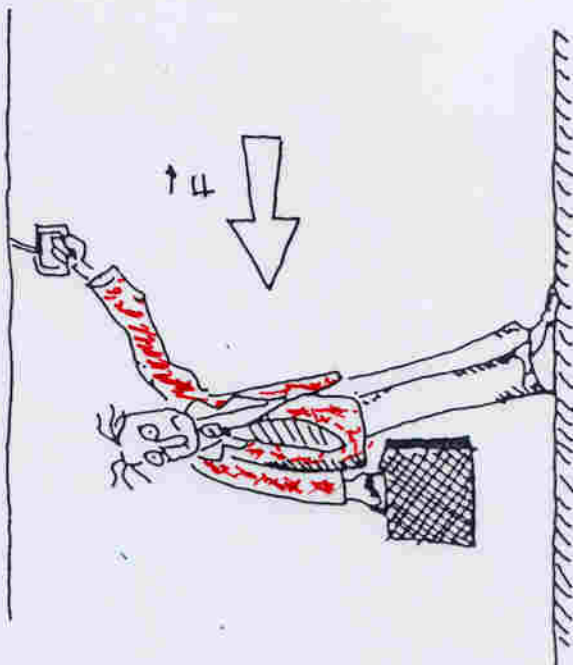
$V_s = c$



Velocidade induzida no Sol por Júpiter $\approx 13 \text{ m/s}$

Precisão do Doppler $\sim 3 \text{ m/s}$
 obtida actualmente $\frac{\lambda'}{\lambda} \sim 10^{-8}$

1º Planeta descoberto à volta da
 estrela 51 Pegasi na constelação Pegasus



Referenciais

Inerciais

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

Não inerciais

$$\vec{F} \neq m \vec{a} = m \vec{a} + m \vec{g} = m \vec{a} + m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \dots$$

↑
argumento
circular !!!
↓

Princípio de Mach

A inércia de uma partícula depende da distribuição das massas no restante Universo!

Ref. Inércia
 $\equiv$
C.M. Universo

Origem das forças fictícias

cargas aceleradas $\Rightarrow$ Radiação
electromagnética

massas aceleradas $\Rightarrow$ Radiação
gravítica

[Indução inercial - D. Sciama]

Princípio de Equivalência

Fraco

$$m_I \equiv m_g !$$

Newton 1687 - Principia Mathematica

"This quantity that I mean here after under the name of ... mass ... is known by the weight ... for it is proportional to the weight as I found by experiment on pendulums, very accurately made"

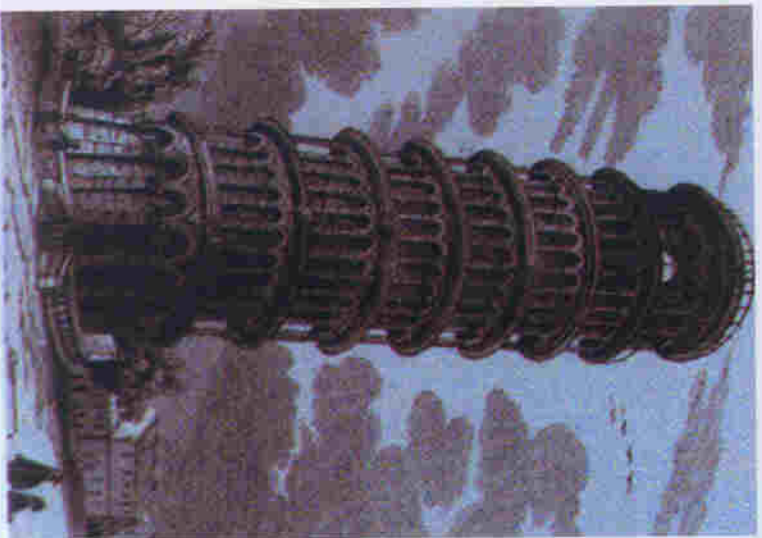
Resultados experimentais

		m_I/m_g
500?	Philippus - queda torre ?	?
1590?	Galileu - " ?	10^{-2}
1686	Newton - <u>Pendulo</u>	10^{-3}
1832	Bessel - "	10^{-5}
1923	Poter - "	10^{-6}
1922	Eotvos - <u>balança torção</u>	10^{-8}
1964	Dick et al - "	10^{-11}
1972	Braginsky, Panov - "	10^{-12}
1976	Shaphino et al - <u>Luna lua</u>	10^{-12}
1987	Keiser, Faller - <u>Suporte fluido</u>	10^{-10}
1990	Wieber et al - queda torre	10^{-10}
2004?	<u>Adelberg - órbita terra</u>	$10^{-18} ?$



Se se deixam cair de muita mesma altura da mesma altura dois corpos que digeram bastante no seu peso, descobri-
-se-a' que a queda dos seus templos de queda
nao corresponde a queda dos seus pesos
mas que a diferença entre os templos e'
muito pequena.

John Philoponus - Alexandria 517 AD

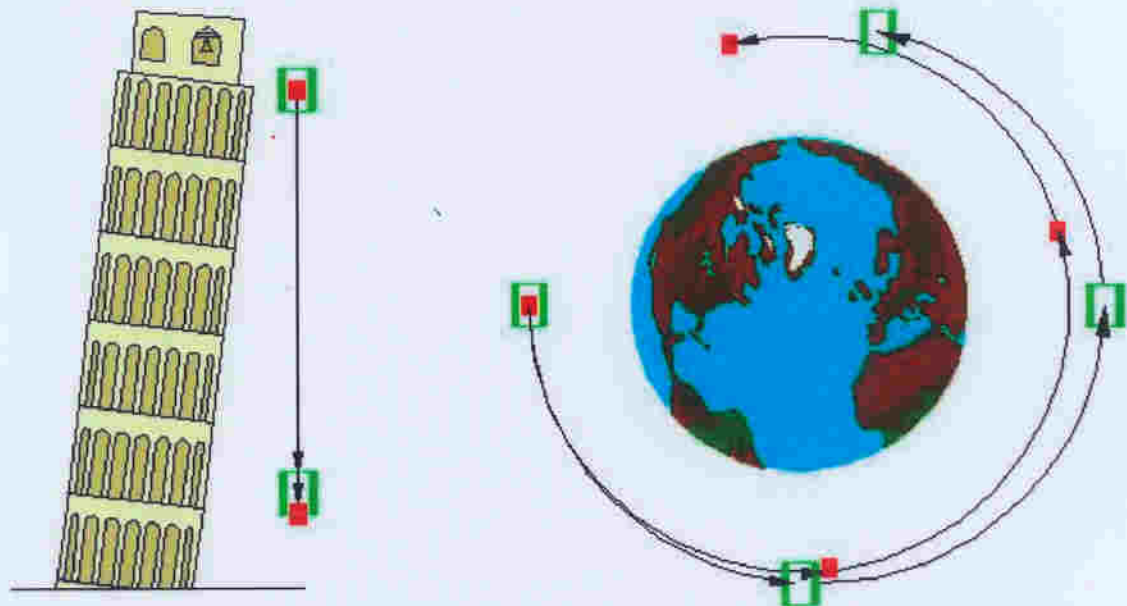


A velocidade de corpos em movimento
da mesma composição mas de pesos diferentes
nao está na proporção dos seus pesos como
protegeu Aristóteles, mas pelo contrário
move-se com a mesma velocidade, o
que foi provado por experiências repetidas
a partir do topo do campanário de Pisa
na presença de todos os outros professores,
filósofos e estudantes ...

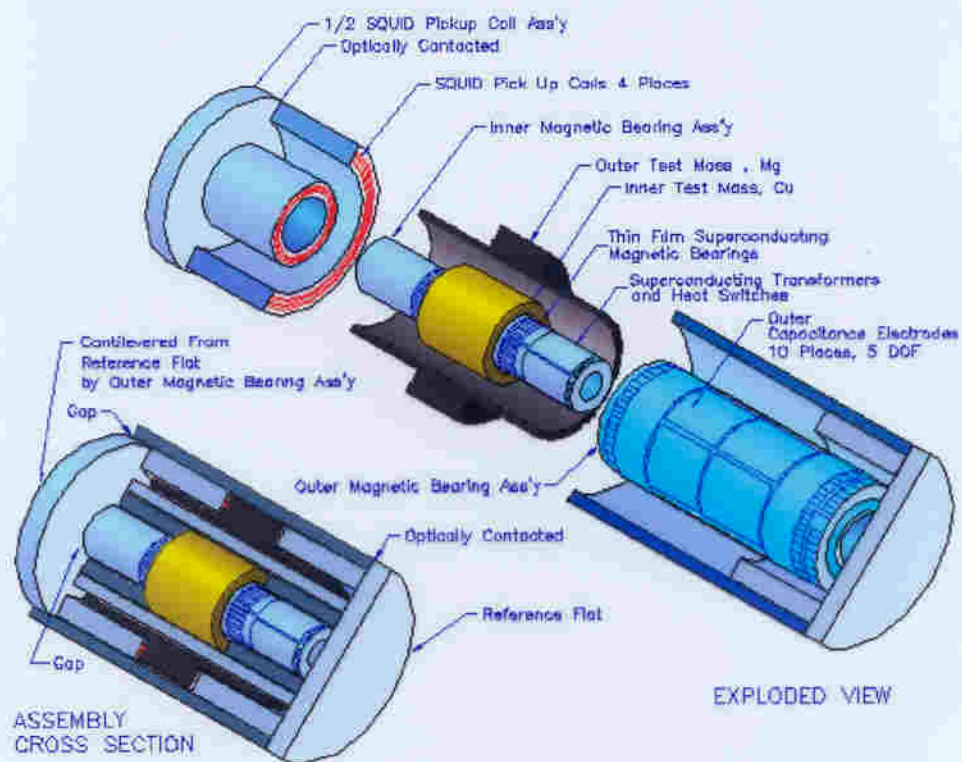
Vicenzo Viviani - Estudante de Galileo

Relatividade
Restrita e geral

STEP



STEP ACCELEROMETER CONCEPT



Princípio da Equivalência

Fonte

Einstein

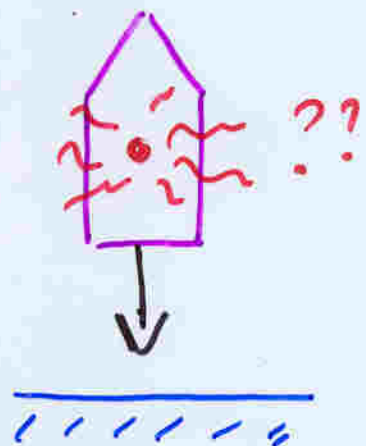
- Os resultados de experiências locais num referencial em queda livre são independentes do estado de movimento do referencial
- Todas as leis da física têm a mesma forma num referencial em queda livre do que teriam na ausência de gravidade

Forças de maré
"tidal attraction"



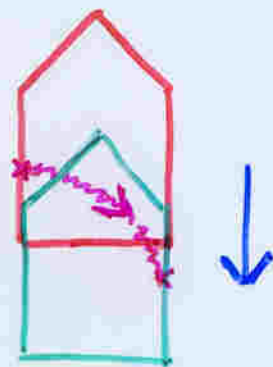
Validade do Princípio
Equivalência para
partículas carregadas?

- Feynman - lectures on gravitation pag 123
- Rohrlich - Classical charged particles pg 215



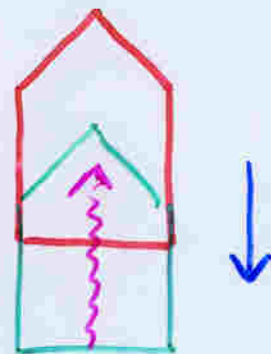
Luz num referencial em queda livre

- A luz curva num campo gravítico
[Eclipse do Sol]



- A luz muda de frequência num campo gravítico

Os pontos de emissão e recepção da luz correspondem a referenciais de inércia com velocidades diferentes



$$\Delta \nu = g \frac{h}{c}$$

existindo assim um efeito de Doppler

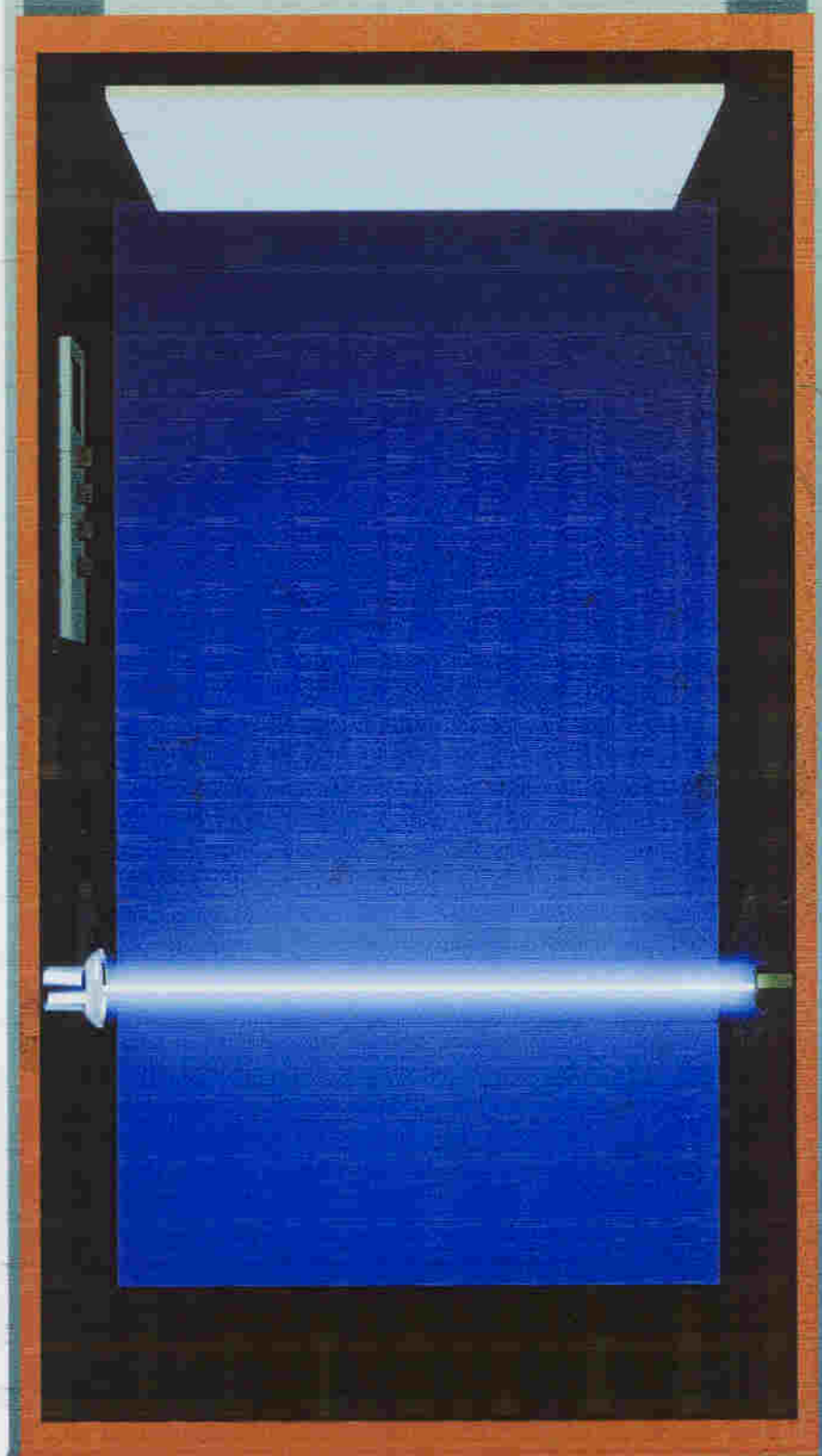
$$\frac{\Delta \nu}{\nu} \sim \frac{\Delta \nu}{c} \sim g \frac{h}{c^2} \sim \frac{\Delta \phi}{c^2}$$

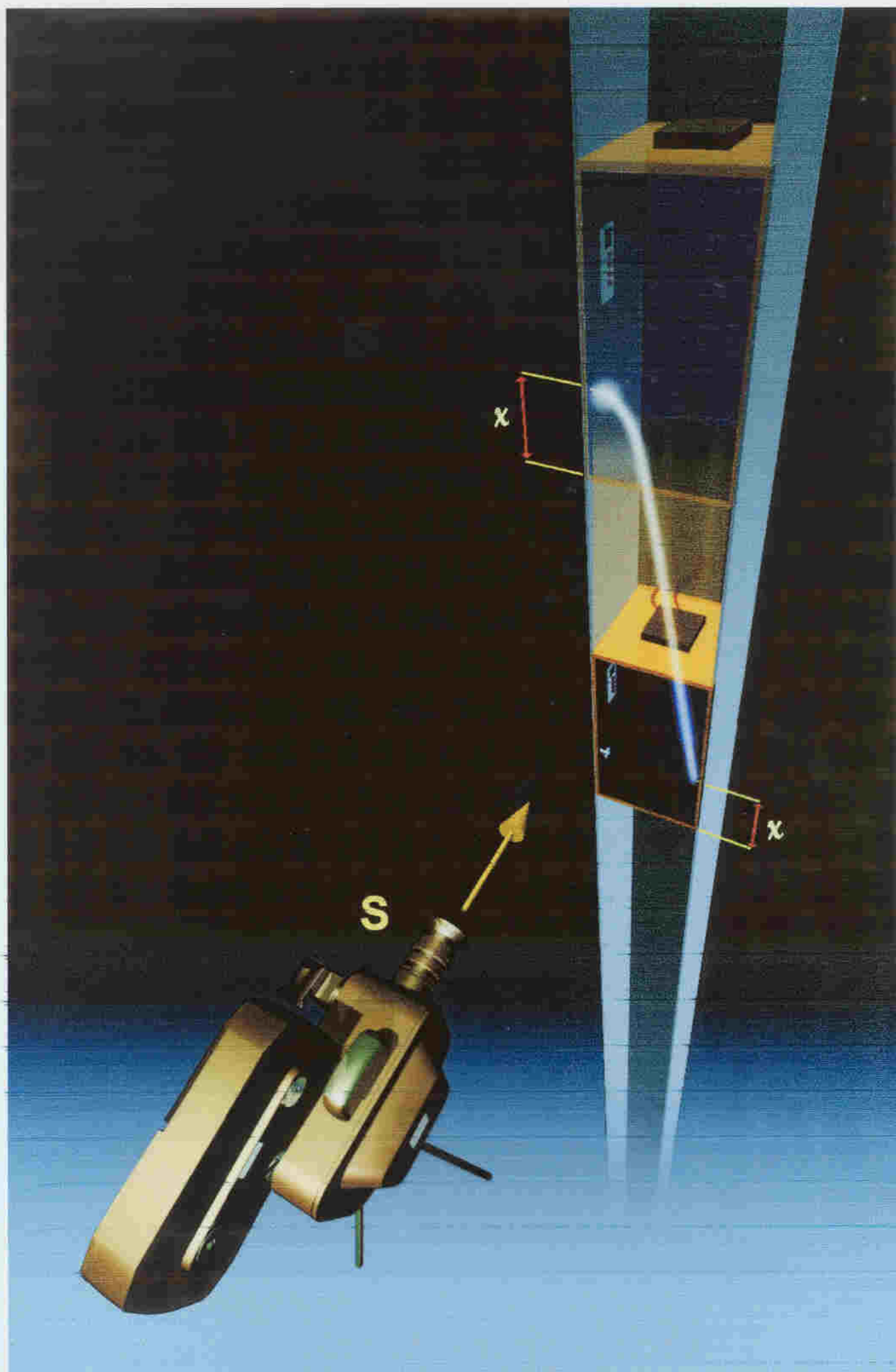
Se pensarmos que o fóton tem de "vencer" o potencial gravítico

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta \phi m x}{E} = \frac{\Delta \phi \frac{h\nu}{c^2}}{h\nu}$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} \sim \frac{\Delta \phi}{c^2} \approx \frac{\Delta t}{t}$$

O relógio em baixo anda mais devagar





Pound and Rebka (1960)

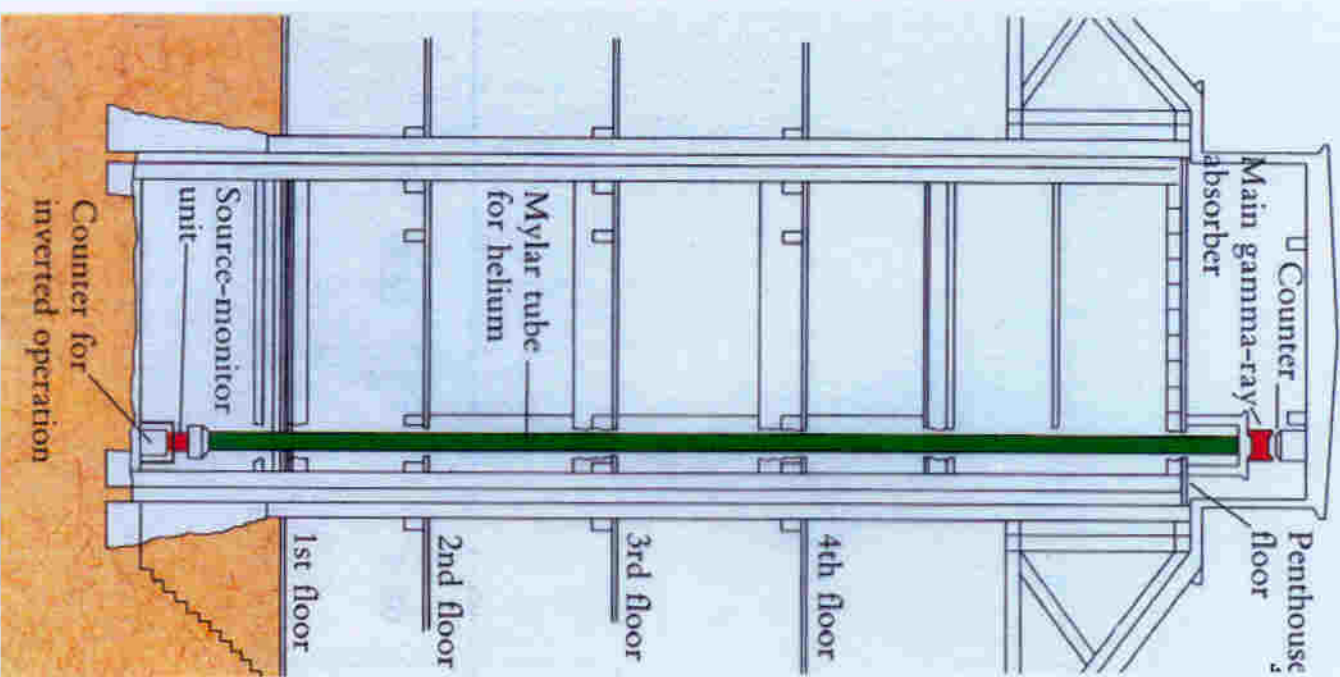
Fótons de 14.4 keV emitidos
do decaimento radioativo
do Fe^{57} a 2m queda de 22.6 m
numa torre.

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = -2.47 \cdot 10^{-15} \text{ (na torre)}$$

$$= -2.57 \pm 0.26 \cdot 10^{-15}$$

O relógio na base da torre
anda mais depressa!!!

1 s em 100 milhões de anos



Espaços curvos (2 dimensões)

Esfera de raio a

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

ou genericamente

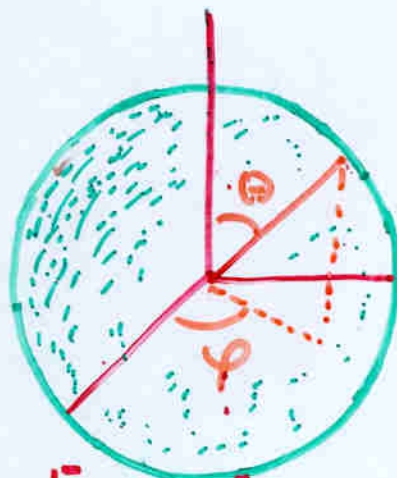
$$ds^2 = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

diagonalizando

$$d\xi_1 = \sqrt{g_{11}} du + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}} dv$$

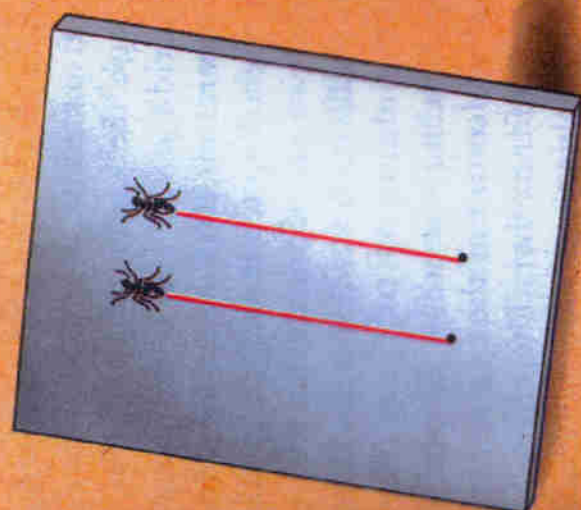
$$d\xi_2 = \sqrt{g_{22} - \frac{g_{12}^2}{g_{11}}} dv$$

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2$$

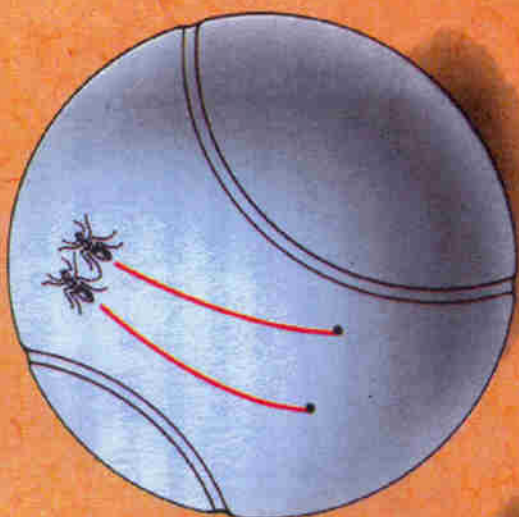


É possível encontrar localmente
um espaço plano tangente mas
é impossível cobrir toda a superfície
da esfera com um único plano

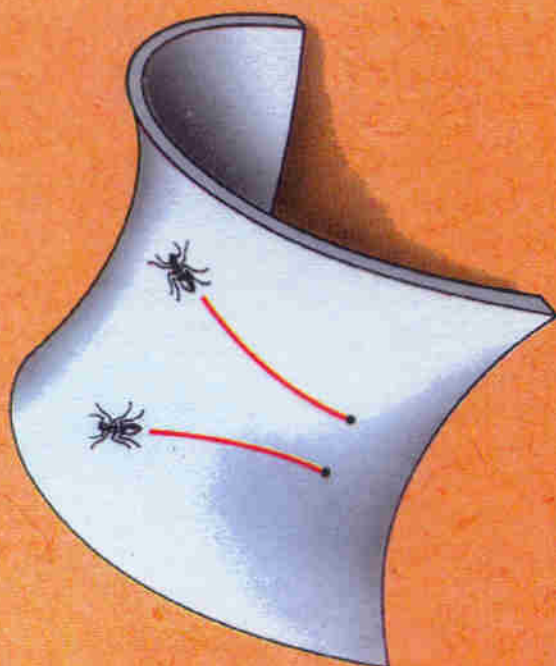
$[g_{\mu\nu} \neq \text{cte} !!!]$



Zero curvature



Positive curvature



Negative curvature

geometria de espaços curvos

Gauss

A geometria dum espaço pode ser determinada por medidas no próprio espaço!

geometrias não Euclidianas [2dim]

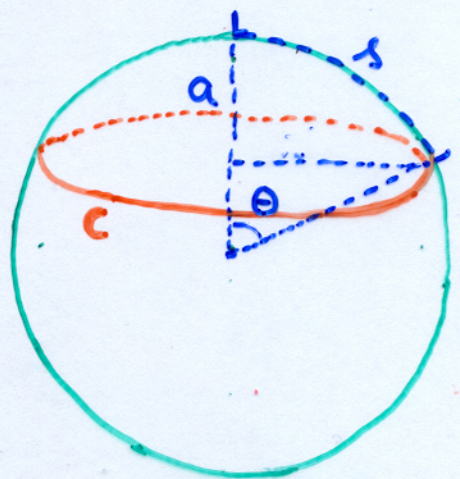
- $\sum \text{ângulos dum } \Delta \neq 180^\circ$
- Não há geodésicas // e infinitas
- O perímetro dum $\odot \neq 2\pi R$
- ...

Curvatura da esfera

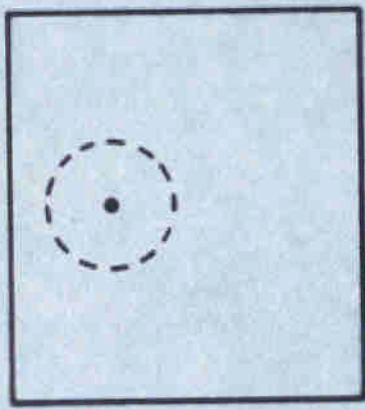
$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{2\pi s - c}{s^3} \right)$$

$$c = 2\pi a \sin \theta$$

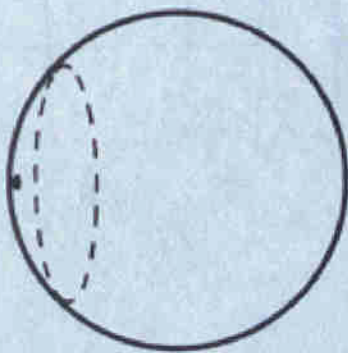
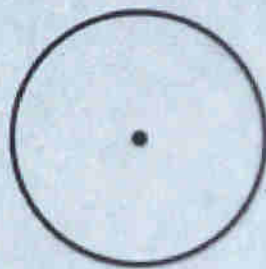
$$= 2\pi s \left(1 - \frac{s^2}{6a^2} + \dots \right)$$



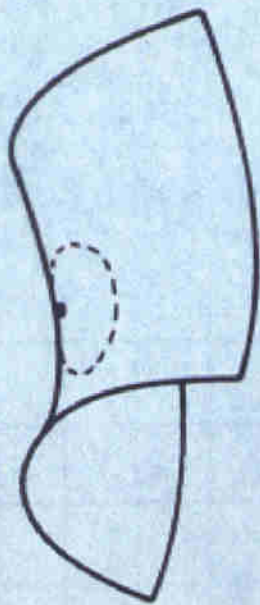
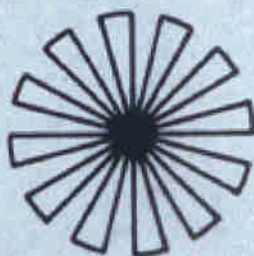
$$K = \frac{1}{a^2}$$



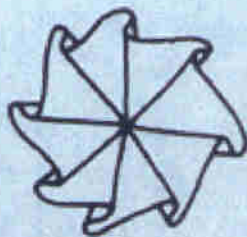
$$C = 2\pi a$$



$$C < 2\pi a$$



$$C > 2\pi a$$



métricas...

2 dimensões

coordenadas (r', φ)

$$r' = a \cos \theta$$

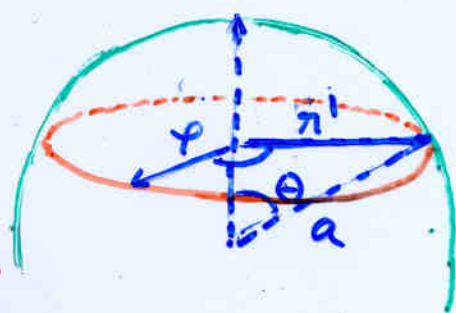
$$dr' = a \cos \theta d\theta \quad \text{e} \quad \cos \theta = \sqrt{1 - r'^2/a^2}$$

$$ds^2 = \frac{dr'^2}{1 - K r'^2} + r'^2 d\varphi^2$$

fazendo

$$r = r'/a, \quad K = K a^2$$

$$ds^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 d\varphi^2 \right) \quad K = 1, 0, -1$$



$K = 1/a^2$ esfera
 $= 0$ plano

$$\left[\begin{array}{l} \text{"distância" de } r=0 \text{ a } r=R \text{ com } \varphi = \text{cte} \\ s = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - K r^2}} = \begin{cases} a \arcsin(R/a) & K = 1 \\ a R & K = 0 \\ a \operatorname{arcsinh}(R/a) & K = -1 \end{cases} \end{array} \right]$$

3 dimensões

$$ds^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - K r^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

Espaço-tempo curvos

Num espaço homogêneo e isotrópico
[Robertson - Walker]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 \right)$$

$$\left[\text{se } K=0 \quad ds^2 = \eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \right]$$

(coordenadas cartesianas)

de um modo mais geral

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad \text{e} \quad ds^2 = c dz^2$$

que corresponde a uma equação das geodésicas (movimento queda livre)

$$\frac{d^2 x^\mu}{dz^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\mu \frac{dx^\mu}{dz} \frac{dx^\nu}{dz} = 0$$

ds^2 máximo

$$\Gamma_{\mu\nu}^\mu = \frac{g^{\mu\rho}}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right)$$

Γ símbolos de Christoffel só dependem da métrica (geometria).

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma_{\mu\nu}^\mu = 0 \text{ num espaço plano} \\ \frac{d^2 x^\mu}{dz^2} = 0 \end{array} \right]$$

Movimento de queda livre num campo gravítico fraco e estático

Pag 274
Bergström

- Leis de Newton

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \frac{\partial \phi}{\partial x^i}$$



$$\left[\begin{array}{l} \text{Na vizinhança de uma massa esférica } M \\ \phi = - \frac{GM}{r} \end{array} \right]$$

- geodésicas

$$\text{se } dx^i \ll dx^0 \equiv c dt$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \left(\frac{dx^\alpha}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\beta}{d\tau} \right) = 0$$

$$\text{fazendo } g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = - \frac{1}{c^2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}$$

$$\left[\Gamma_{00}^\mu = \frac{\eta^{\mu\rho}}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\rho} \right]$$

donde

$$h_{00} \simeq 2 \frac{\phi}{c^2}$$

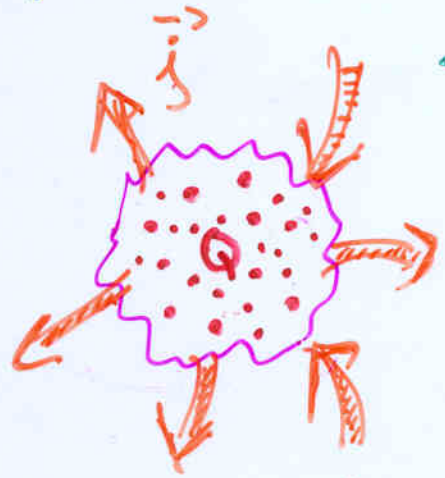
$$\left[\begin{array}{l} \text{Doppler gravítico} \\ \Delta \tau^2 = \left(1 - \frac{\Delta \phi}{c^2} \right)^2 \Delta t^2 \simeq \left(1 - 2 \frac{\Delta \phi}{c^2} \right) \Delta t^2 \end{array} \right]$$

Tensor de Energia-Momento

Equação continuidade
 $\equiv$ conservação carga

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i \vec{j} = 0$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$



Equação de conservação Energia-Momento

$$\frac{\partial}{\partial x^0} T^{\mu 0} + \nabla_i T^{\mu i} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T^{\mu \nu} = 0$$

em que (gás de partículas)

$$T^{\mu 0} = \sum_{i=1}^N p_i^\mu(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad \text{"cargas"}$$

$$T^{\mu \kappa} = \sum_{i=1}^N p_i^\mu(t) \frac{dx_i^\kappa}{dt} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad \text{"correntes"}$$

$$T^{\mu \nu} = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ \cdot & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ \cdot & \cdot & T^{22} & T^{23} \\ \cdot & \cdot & \cdot & T^{33} \end{bmatrix}$$

$T^{00} \equiv$ densidade energia

$T^{0i} \equiv$ fluxo momento

$T^{ii} \equiv$ pressão isotrópica

$T^{ij} \equiv$ "anisotrópica"

Energia - momento num
fluido perfeito (sem viscosidade)

Referencial próprio

$$T^{00} = c^2 \rho \quad \text{densidade de energia}$$

$$T^{0i} = 0$$

$$T^{ij} = p \delta_{ij} \quad \text{pressão}$$

A pressão tem a dimensão de uma
densidade de Energia.

$$\delta W = F \cdot dx = P dV$$

A pressão traduz a "energia cinética"
do fluido

Referencial com velocidade u^k

$$T^{ku} = (p + \rho/c^2) u^k u^u - p \eta^{ku}$$

E num referencial acelerado

$$T^{ku} = (p + \rho/c^2) u^k u^u - p g^{ku}$$

Equações de Einstein

Pag 275
Bergström

A curvatura do espaço tempo é proporcional à densidade de energia e momento!

$$G^{MV} = cte \ T^{MV}$$

$$cte = \frac{8\pi}{c^4} G$$

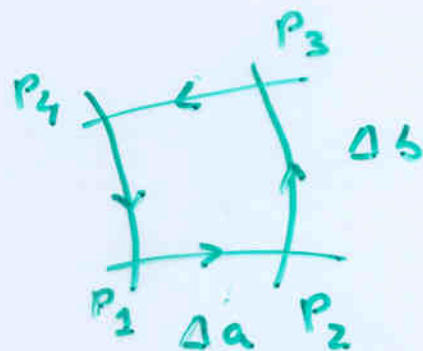
Recupera Newton

Construção do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$

transporte paralelo de um vector

$$V^M \rightarrow V^M + \delta V^M$$

$$\delta V^M = \Delta a^\alpha \Delta b^\beta V^\sigma R_{\sigma\beta\alpha}^M$$



$$R_{\sigma\beta\alpha}^M = \frac{\partial \Gamma_{\sigma\alpha}^M}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\sigma\beta}^M}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\rho\alpha}^M \Gamma_{\sigma\beta}^\rho - \Gamma_{\rho\beta}^M \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho$$

$R_{\sigma\beta\alpha}^M$ = tensor de Riemann 256 componentes!
(simetrias...)

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\sigma} R_{\sigma\mu\alpha\nu}$$

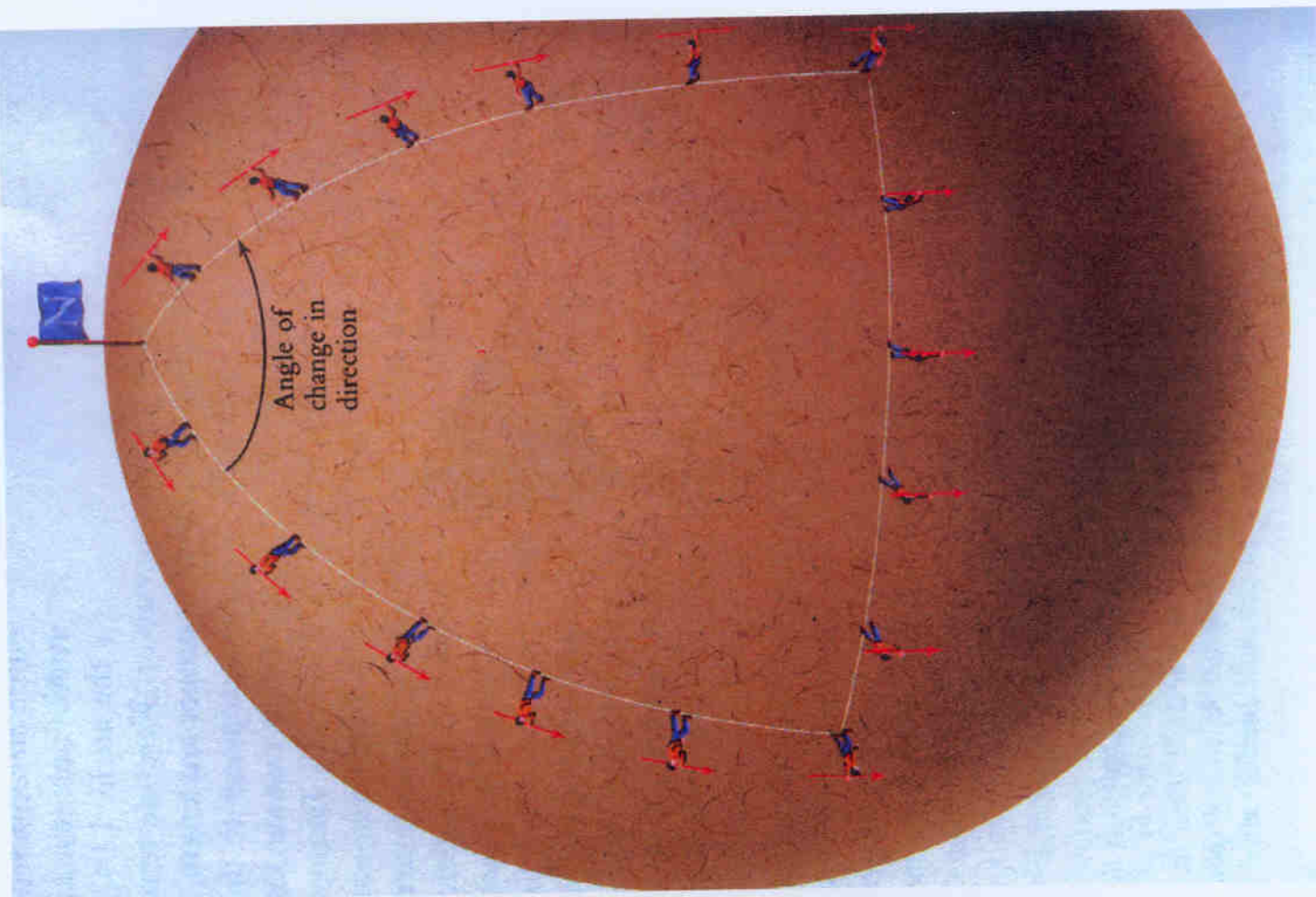
tensor de Ricci

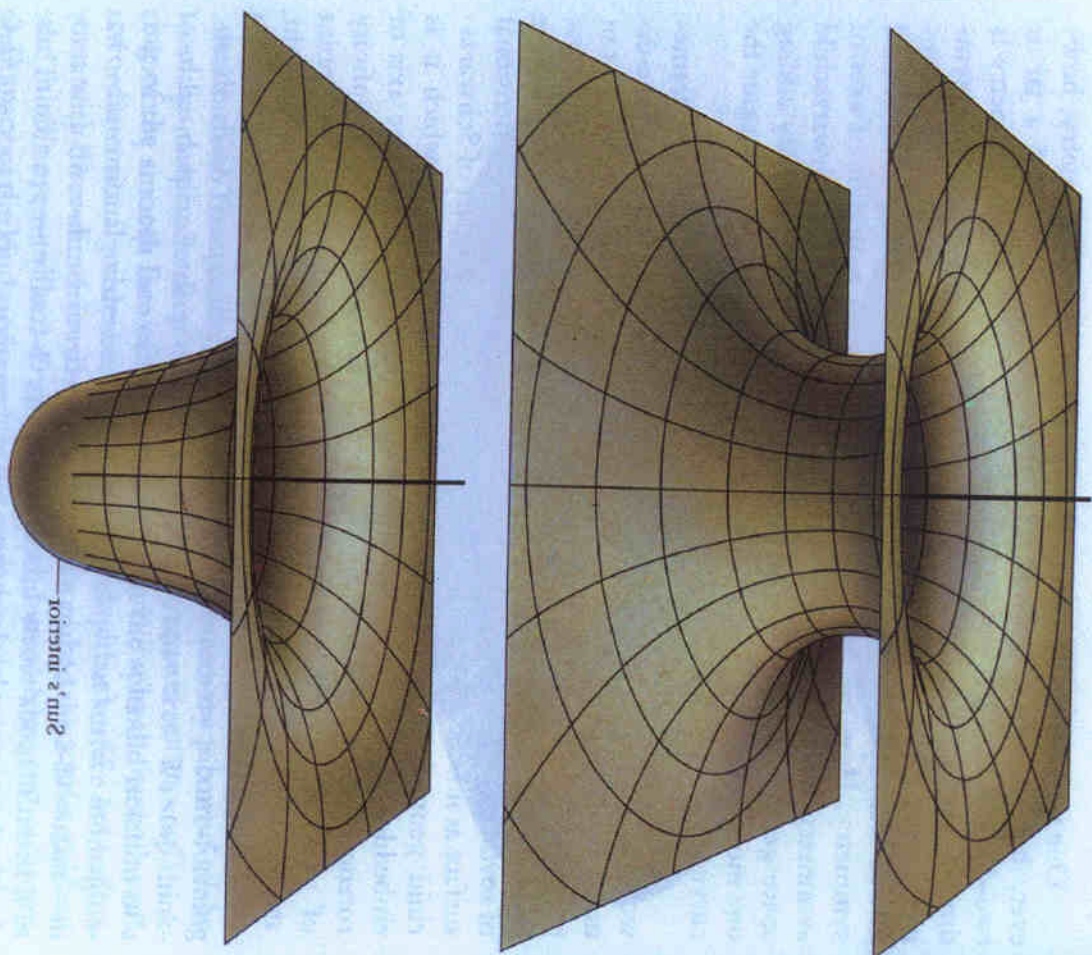
$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

Escalar de Ricci

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

$$\left| \begin{array}{l} \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0 ! \\ \text{como} \\ \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \end{array} \right.$$





2nd interior

Atracção gravítica devido a um fluido relativista

Pag 24
Peacock

Na presença de um fluido relativista
e de um campo gravítico fraco as Eq.
de Einstein conduzem a:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G (\rho + 3p/c^2)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{O teorema de Gauss para o campo} \\ \text{gravítico escreve-se} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_g = 4\pi G \rho \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \end{array} \right]$$

como se $v \sim c$

$$p \sim \frac{1}{3} \rho c^2$$

então

$$\rho_{\text{ef}} = 2\rho$$

A luz tem uma massa "efectiva" superior
num factor 2 é obtida na relatividade
restrita...

A solução de Schwarzschild

Métrica do espaço-tempo em torno de uma massa M estática

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM/r} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

- Os eixos das orbitas em torno de uma massa central podem (movimento do perigélio)
- A luz que passa a uma distância b de um corpo central é defletida de $\Delta\theta = 4GM/b$
- Se a densidade de um corpo for muito elevada ($r < r_s = \frac{2GM}{c^2}$) então não "emite" luz (Buraco negro!!!)



