

Problemas Astrofísicas

Semana 15 e 16/3 - Relatividade

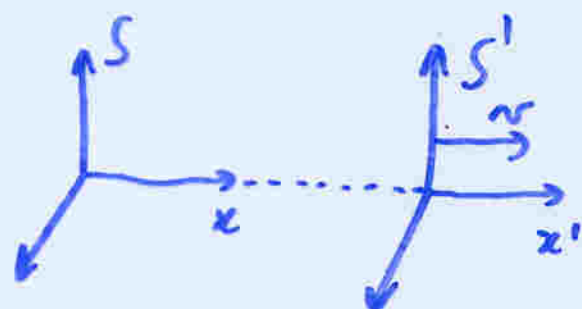
- ① Teste que o intervalo de espaço-tempo ds^2 é invariante numa transf. de Lorentz
- ② Um múon $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ é criado a 30 km de altura. Se não sofrer interações qual é o momento mínimo que deve ter para que a probabilidade de chegar à terra seja pelo menos 50%.
- ③ Paradoxo dos gêmeos
Discente a diferença de idades dos gêmeos fazendo as contas no referencial da Terra e do movimento!
- ④ Determine a diferença de tempo entre um relógio à superfície da Terra e um outro num avião a 10.000 m de altitude e uma velocidade 300 m/s.

PROBLEMAS DE ASTROPARTÍCULAS 2000/2001

Relatividade - Semana de 15 a 16/3

① INVARIÂNCIA DE ds^2

$$x = \frac{x' + v t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$



S' move-se com velocidade $\vec{v} = v \hat{x}$ em relação a S

$$\begin{aligned} (ds)^2 &\stackrel{\text{def.}}{=} (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \\ &= \frac{(ct')^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 x'^2 + 2 \cancel{v t' x'} - v^2 t'^2 - x'^2 - \cancel{2 v t' x'} - y'^2 - z'^2}{1 - (v/c)^2} \\ &= \frac{(ct')^2 [1 - \cancel{(v/c)^2}] - x' [1 - \cancel{(v/c)^2}] - y'^2 - z'^2}{[1 - \cancel{(v/c)^2}]} = \\ &= (ct')^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \stackrel{\text{def.}}{=} (ds')^2 \end{aligned}$$

De onde se pode ver que, para uma transformação de Lorentz, o intervalo de espaço-tempo ds^2 é invariante!

② DECAIMENTO DO MÚÃO

$$\tau = 2,2 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$m_\mu = 105 \text{ MeV}$$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N(t_0) = N_0 e^{-\lambda t_0} = N_0 e^{-t_0/\tau}$$

$$\frac{N}{N_0} = 50\% = e^{-t_0/\tau} \Rightarrow t_0 = -\frac{\ln(0,5)}{1/\tau} = 1,52 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

$$t = t_0 \gamma$$

$$L = v t \Leftrightarrow v = \frac{L}{t_0 \gamma} = \frac{L}{t_0} \sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}$$

$$p = m v \gamma$$

$$L = v t_0 \gamma$$

$$\frac{p}{L} = \frac{m}{t_0} \Rightarrow$$

$$p = \frac{m}{t_0} \times L$$

$$L = 30 \text{ Km} = 1,5 \times 10^{20} \text{ GeV}^{-1}$$

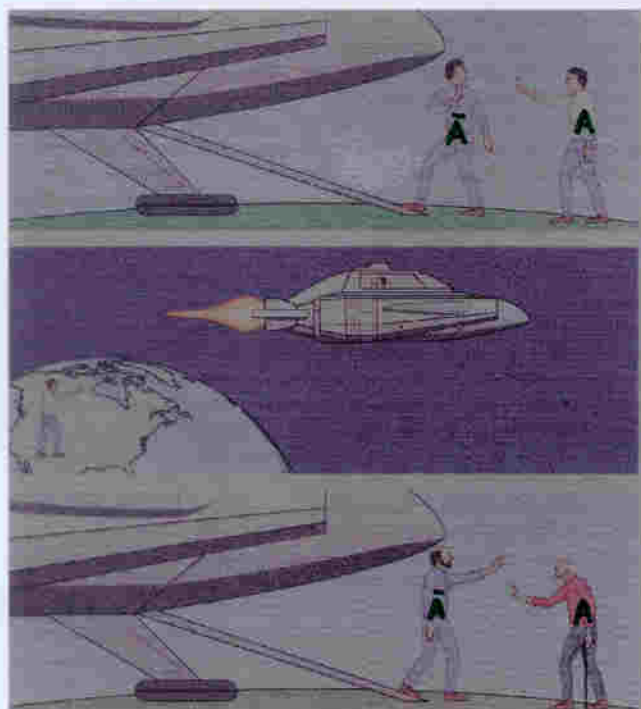
$$t_0 = 1,52 \times 10^{-6} \text{ s} = 2,3 \times 10^{18} \text{ GeV}^{-1}$$

Unidades naturais
c = 1

$$\left[\begin{array}{l} 1 \text{ s} = 1,515 \times 10^{24} \text{ GeV}^{-1} \\ 1 \text{ fermi} = 10^{-13} \text{ cm} = 5 \text{ GeV}^{-1} \end{array} \right.$$

$$p_{\text{min}} = \frac{0,105 \times 1,5 \times 10^{20}}{2,3 \times 10^{18}} = 6,8 \text{ GeV}$$

③ PARADOXO DOS GÊMEOS



Gêmeos partem no seu 20º aniversário...

Gêmeo A fica na Terra
Gêmeo $\bar{A}$ parte na nave

... 20 anos depois (referencial da terra):

→ $\bar{A}$ é bastante mais novo que A!!!

Em 1905, no seu primeiro artigo sobre a Teoria Restrita da Relatividade, Einstein aponta os paradoxos que se poderiam considerar quando se nota que as transformações de Lorentz conduzem a tempos diferentes, quando medidos em diferentes referências inerciais. Um caso particular é o paradoxo dos gêmeos (proposto em 1911 por Langevin):

Consideremos que a nave é acelerada rapidamente a uma velocidade de $v = 0,95c$ e mantém essa velocidade durante $\Delta t_0/2$ (ref. da nave). Depois volta para trás nas mesmas condições:

Para $\bar{A}$ (nave) $\rightarrow$ decorreu um tempo Δt_0

Para A (terra):

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 0,95^2}} = 3,2 \Delta t_0$$

→ Na terra passam 3,2 anos por cada ano que passa na nave.

No regresso:

$\bar{A}$ (have) → tem 40 = 20 + 20 anos

A (terra) → tem 84 = 20 + (3,2 × 20) anos

No entanto, agora podemos reverter o argumento:

Em relação a $\bar{A}$ (have), o gêmeo A (terra) está a afastar-se a uma velocidade de 0,95 c:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = 3,2 \Delta t_0$$

Logo na nave passam 3,2 anos por cada ano que passa na terra:

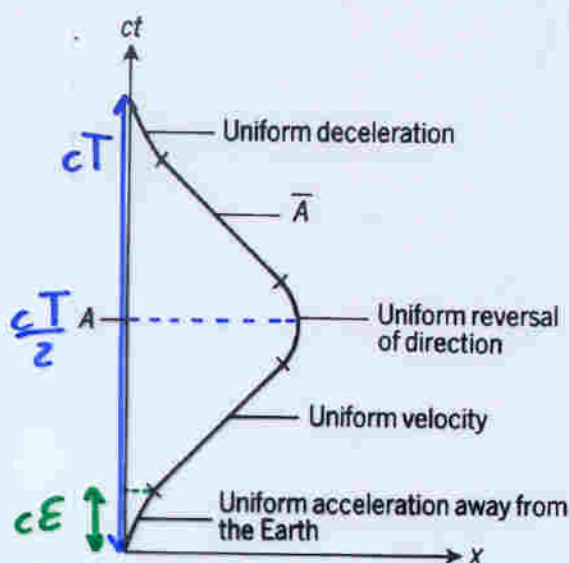
Espera-se assim que passados 20 anos na nave tenham passado $\frac{20}{3,2} = 6,3$ anos na terra

Logo:

$\bar{A}$ (have) → tem 40 anos

A (terra) → tem 26 anos

SERÁ QUE A IDADE DEPENDE DE QUEM FAZ AS CONTAS ?...

SOLUÇÃO:

As acelerações introduzem uma assimetria entre os referenciais da terra e da nave



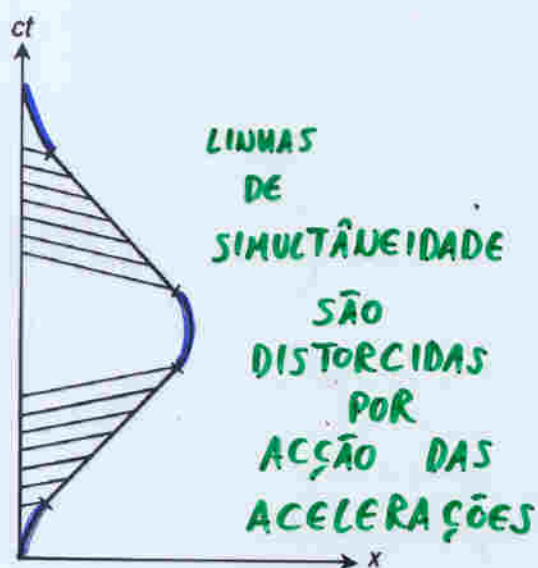
CLARAMENTE, O PERÍODO DE ACELERAÇÃO QUE PROVOCA O RETORNO DA NAVE À TERRA, TEM UM EFEITO MARCADO NAS LINHAS DE SIMULTANEIDADE.

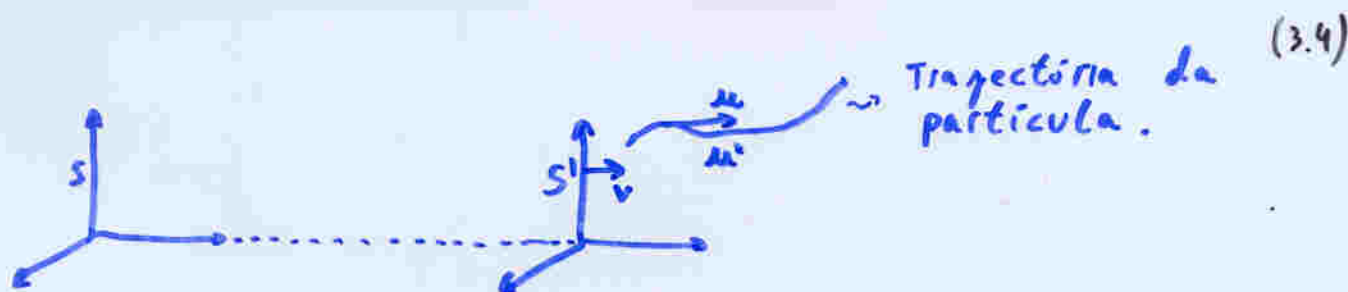


EMBORA ESTA EXPERIÊNCIA NUNCA TENHA SIDO FEITA, EM 1971 ESTE EFEITO

FOI VERIFICADO POR HAFELE E KEATING MEDINDO OS TEMPOS REGISTRADOS POR UM RELÓGIO DE CÉSIO NUM AVIÃO A VOAR À VOLTA DO MUNDO (PROBLEMA SEGUINTE).

RESTA-NOS FAZER AS CONTAS CONSIDERANDO AS ACELERAÇÕES PARA O REFERENCIAL DA NAVE E DA TERRA PARA VERIFICAR QUE EFECTIVAMENTE O GÊMEO A (TERRA) É MAIS VELHO NO REENCONTRO DOS IRMÃOS.





S' move-se com velocidade v em relação a S

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \text{ em } S$$

$$(u'_1, u'_2, u'_3) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \text{ em } S' \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Considerando as transformações de Lorentz:

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right); \quad x' = \gamma (x - vt); \quad y' = y; \quad z' = z$$

Obtemos os seguintes diferenciais:

$$dt' = \gamma (dt - v dx/c^2); \quad dx' = \gamma (dx - v dt); \quad dy' = dy; \quad dz' = dz$$

Assim,

$$u'_1 = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma (dx - v dt)}{\gamma (dt - v dx/c^2)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{1}{c^2} \left(v \frac{dx}{dt} \right)} = \frac{u_1 - v}{1 - \frac{u_1 v}{c^2}}$$

$$u'_2 = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma (dt - v dx/c^2)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(v \frac{dx}{dt} \right) \right]} = \frac{u_2}{\gamma \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2} \right)}$$

$$u'_3 = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma (dt - v dx/c^2)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(v \frac{dx}{dt} \right) \right]} = \frac{u_3}{\gamma \left(1 - \frac{u_1 v}{c^2} \right)}$$

SE CALCULARMOS AGORA O DIFERENCIAL du_1 : ⁽³⁵⁾

$$du_1 = \frac{du'_1}{1 + u'_1 v/c^2} - \left(\frac{u'_1 + v}{(1 + u'_1 v/c^2)^2} \right) \frac{v}{c^2} du'_1 =$$
$$= \frac{1}{\beta^2} \frac{du'_1}{(1 + u'_1 v/c^2)^2}$$

Usando mais uma vez,

$$dt = \beta (dt' + dx' v/c^2) = \beta (1 + u'_1 v/c^2) dt'$$

$$\therefore \frac{du_1}{dt} = \frac{1}{\beta^3 (1 + u'_1 v/c^2)^3} \frac{du'_1}{dt'}$$

E, análogamente se pode ver que:

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{1}{\beta^3 (1 + u'_1 v/c^2)^2} \frac{du'_2}{dt'} - \frac{v u'_2}{c^2 \beta^3 (1 + u'_1 v/c^2)^3} \frac{du'_1}{dt'}$$

$$\frac{du_3}{dt} = \frac{1}{\beta^3 (1 + u'_1 v/c^2)^3} \frac{du'_3}{dt'} - \frac{v u'_3}{c^2 \beta^3 (1 + u'_1 v/c^2)^3} \frac{du'_1}{dt'}$$

DESTAS EXPRESSÕES PODEMOS CONCLUIR QUE A ACELERAÇÃO NÃO É UM INVARIANTE EM RELATIVIDADE RESTITA. NO ENTANTO, VÊ-SE IGUALMENTE QUE É UMA QUANTIDADE ABSOLUTA.

SE A ACELERAÇÃO É ZERO NUM REFERENCIAL, É NECESSARIAMENTE ZERO NUM OUTRO.

CONSIDEREMOS AGORA UMA ACELERAÇÃO UNIFORME:

Ref. S: $u = u(t)$

Ref. S' (referencial que se move com a partícula)

$$|| \quad v = u$$

$$|| \quad u' = 0 \quad (\text{velocidade da partícula em relação a S'})$$

SE SÓ TEMOS ACELERAÇÃO AO LONGO DO EIXO DOS XX (O QUE NÃO TRADUZ QUALQUER PERDA DE GENERALIDADE):

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\gamma^3} a = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} a$$

separando as variáveis:

$$\frac{du}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} = a dt$$

e integrando ambos os membros da equação:

$$(t = t_0 \Rightarrow u = 0)$$

$$\frac{u}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} = a(t - t_0)$$

e finalmente, resolvendo em ordem a u:

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{a(t - t_0)}{[1 + a^2(t - t_0)^2/c^2]^{1/2}}$$

ESTAMOS AGORA EM CONDIÇÕES DE REGRESSAR AOS NOSSOS GÊMEOS...

Suponhamos que na Terra passou um tempo T . ^(2.7)

Gêmeo A : T anos

Gêmeo $\bar{A}$: e^- acelerado durante um tempo ε (ref. da Terra)

$$\Delta \tau = \frac{1}{c} \int ds \quad (\text{tempo próprio}) \rightsquigarrow \text{Tempo medido por}$$

$$[ds = ds']$$

$$\begin{aligned} ds &= (c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2)^{1/2} \\ &= \sqrt{c^2 - v^2} dt \\ &= c \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \end{aligned}$$

$$\int d\tau = \int_0^T \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} dt \quad v \equiv v(t)$$

Períodos de não-aceleração : Dilatação do tempo usual

$$\Delta \tau = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \Delta t$$

↑
tempo próprio!

Do esquema temos $2 \times \left(\frac{T}{2} - 2\varepsilon\right) = \boxed{T - 4\varepsilon} = \Delta \tau$
(tempo - ref. da Terra - durante o qual a nave anda a velocidade cte.)

Períodos de aceleração uniforme :

$$v(t) = \frac{at}{\left[1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}\right]^{1/2}}$$

$a \rightarrow$ aceleração (ref. da Nave)

$$\boxed{a = \frac{dv'}{dt'}}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \tau &= \int_0^{\mathcal{E}} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{a^2 t^2}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} \right)} dt = \\
 &= \int_0^{\mathcal{E}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} dt = \\
 &= \left[\frac{c}{a} \sinh^{-1} \left(\frac{a}{c} t \right) \right]_0^{\mathcal{E}} = \\
 &= \frac{c}{a} \sinh^{-1} \left(\frac{a}{c} \mathcal{E} \right)
 \end{aligned}$$

Como temos 4 períodos (iguais!) de aceleração:

$$\tau_{\text{acel}} = \frac{4c}{a} \sinh^{-1} \left(\frac{a}{c} \mathcal{E} \right)$$

e, para os períodos de velocidade constante:

$$\tau_{\text{recte}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} \Delta t$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 tempo medido na nave! tempo medido na Terra!

$$\Delta t = T - 4\mathcal{E}$$

Concluindo, ao longo da linha de geóese $\bar{A}$ (nave):

$$\tau_{\bar{A}} = \tau_{\text{acel}} + \tau_{\text{recte}} = \frac{4c}{a} \sinh^{-1} \left(\frac{a}{c} \mathcal{E} \right) + \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} (T - 4\mathcal{E})$$

e, obviamente, ao longo da linha de geóese A (Terra):

$$\tau_A = T = (T - 4\mathcal{E}) + 4\mathcal{E}$$

Retomemos o nosso problema numérico: (3.9)

$$\left. \begin{array}{l} v(t=\varepsilon) = 0,95c \\ T = 20 \text{ anos} \end{array} \right\} \text{(ref. Terra)}$$

e consideremos que $\varepsilon = 0,5 \text{ anos}$ (ref. Terra)

Quanto vale a aceleração a ?

Consideremos a transformação de velocidades:

$$v(\varepsilon) = \frac{a \varepsilon / c}{\sqrt{1 + \frac{a^2 \varepsilon^2}{c^2}}} = 0,95 \quad \left[a = \frac{dv'}{dt'} \right]$$

$$x = \frac{a \varepsilon}{c}$$

$$\frac{x^2}{1+x^2} = (0,95)^2 \quad (\Rightarrow) \quad (1-0,95^2) x^2 = (0,95)^2 \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) x^2 = \frac{(0,95)^2}{1-(0,95)^2} = 9,25641 \quad (\Rightarrow) \quad x \approx 3,04$$

-11-

$$a \varepsilon = 3,04 c$$

$$a = 6,08 c \quad (\varepsilon = 0,5 \text{ anos})$$

$$\tau_{\text{acel}} = \frac{4\varepsilon}{a} \sinh^{-1} \left(\frac{a}{c} \varepsilon \right) = 1,205 \text{ anos}$$

$$\tau_{\text{reta}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} (T - 4\varepsilon) = 0,31225 \times 18 = 5,62 \text{ anos}$$

$$\tau_{\bar{A}} = 1,205 + 5,62 = 6,8 \text{ anos}$$

Ou seja, na volta o gêmeo $\bar{A}$ (que foi na nave) terá $20 + 6,8 = 26,8$ anos e o seu irmão (que ficou na terra) terá $20 + 20 = 40$ anos

Bibliografia:

- [1] • COLETA, V. , "Physics" (1994) , Mc Graw Hill.
- [2] • KRACKLAUER & KRACKLAUER , "On the Twin Non-paradox" (Dec. 2000),
arXiv: physics/0012041 18 Dec 2000.
- [3] • D'INVERNO (1992) , "Introducing Einstein's Relativity", Oxford.
- [4] • LANDAU & LIFSHITZ , "Teoria do Campo" (1980) , Mir.