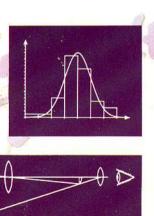
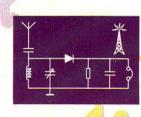


M.C. ABREU L.MATIAS L.F. PERALTA









PRESENCA

Unidades de base do SI

Comprimento	m	(metro)
Massa	THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NOT THE PERSON NAMED IN COLUMN TWO IS NAM	
	kg	(quilograma)
Tempo	S	(segundo)
Corrente eléctrica	A	(ampere)
Temperatura termodinâmica	K	(kelvin)
Quantidade de matéria	mol	(mole)
Intensidade luminosa	cd	(candela)

Constantes fundamentais

Carga do electrão	-1.602 177 33 x 10 ⁻¹⁹ C
Constante de Avogadro	6.022 136 7 x 10 ²³ mol ⁻¹
Constante de Planck	$6.626\ 075\ 5\ x\ 10^{-34}\ J\ s$
Velocidade da luz no vazio	2.997 924 58 x 108 m s ⁻¹
Permitividade eléctrica do vazio	8.854 187 817 x 10 ⁻¹² F m
Permeabilidade magnética do vazio	1.256 637 061 x 10 ⁶ H m
Constante de Boltzmann	1.380 658 x 10 ⁻²³ J K ⁻¹
Constante de gravitação	6.672 59 x 10 ⁻¹¹ m ³ kg ⁻¹ s ⁻²







FÍSICA EXPERIMENTAL Uma introdução

M. C. ABREU L. MATIAS L. F. PERALTA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA FACULDADE DE CIÊNCIAS DA UNIVERSIDADE DE LISBOA



FICHA TÉCNICA

Título: Física Experimental – Uma Introdução Autores: M. C. Abreu, L. Matias e L. Peralta

Copyright © by M. C. Abreu, L. Matias, L. F. Peralta e Editorial Presença, Lisboa, 1994

Capa: Carlos Queiróz

Composição: Multitipo – Artes Gráficas, Lda.

Impressão e acabamento: Tip. Peres - Artes Gráficas

1.ª edição, Lisboa, 1994 Depósito legal n.º 79 216/94

Reservados todos os direitos para a língua portuguesa à EDITORIAL PRESENÇA Rua Augusto Gil, 35-A 1000 LISBOA Aos estudantes
interessados, caóticos, críticos, amorfos,
entusiastas, perspicazes, ignorantes ou sábios
que estimularam a escrita deste livro
e
aos nossos filhos
André
Joana
Luís Miguel
Pedro
Tiago



Índice

Preâmbulo	1:
Introdução	1
Objectivo e sequência das experiências	18
Organigrama do manual	20
Como fazer uma experiência	20
Como deve ser o logbook	21
Como deve ser o relatório de uma experiência	, 22
EXPERIÊNCIAS	
0 Medição de grandezas elementares	27
1 Estudo do pêndulo simples e determinação da aceleração da gravidade no laboratório	33
2 Análise estatística dos dados de uma experiência	39
3 Osciloscópio, medição de ddp, tempos e diferenças de fase	45
4 Circuitos eléctricos simples I	51
5 Circuitos eléctricos simples II	59
6 Qual será a temperatura das mãos?	65
7 Vamos ouvir rádio!	71
8 Observação ao longe e ao perto	77
9 Célula fotovoltaica como conversor de energia solar em energia eléctrica	81
LEITURAS	5-11
Leitura 1 — Aquisição, Análise e Tratamento de Dados	85
Aquisição de dados e instrumentos	85
Análise de dados	89
Erros experimentais	91
Erros sistemáticos	91
Erros acidentais, aleatórios ou estatísticos	92
Erros absolutos e erros relativos	94
Análise estatística dos erros acidentais	94
Histogramas e curvas de distribuição	94
Definição de parâmetros estatísticos — média e desvio padrão	96
Médias ponderadas	97
Resultado de uma medição	98
Intervalo de confiança	99
Distribuição de probabilidades	99
Distribuição binomial	100
Distribuição de Poisson	100
Distribuição normal ou gaussiana	101
Teorema do limite central	104
Distribuição de student	104
Distribuição de χ²	106
Rejeição de observações	107
Propagação de erros	107
O que são algarismos significativos	109
Tratamento de dados	112
como estabelecer uma relação entre grandezas	112

Método dos mínimos quadrados	114
Método dos mínimos quadrados aplicado a Y = KX	115
Coeficiente de correlação	116
Intervalos de confiança na regressão linear	116
Teste do χ ²	117
Aplicação do teste χ² em medidas repetidas	117
Aplicação do teste χ^2 em ajustes	119
Gráficos	121
Gráficos de relações funcionais	122
Relação entre três grandezas	125
Gráficos sobre valores experimentais	126
1	
Cábula para análise de dados	128
Leitura 2 — Estudo do Pêndulo Simples	131
Equações básicas e pequenas oscilações	131
Período para grandes oscilações	132
Efeitos que alteram o valor do período	134
Medição da aceleração da gravidade	136
Leitura 3 — Radioactividade	139
Constituintes básicos da matéria e suas interacções	141
Lei do declínio radioactivo e actividade	142
Natureza estatística do declínio radioactivo	143
Leitura 4 — Circuitos Eléctricos Básicos	145
Lei de Ohm	145
Intensidade de corrente eléctrica	145
Diferença de potencial eléctrico (ddp)	145
Resistência	145
Análise de circuitos	146
Lei dos nós e das malhas	147
Associação de resistências	148
Divisores de tensão e de corrente	148
Princípio da sobreposição	149
Simplificação de circuitos, modelo de Thévenin	150
Potência	150
Sinais eléctricos	151
Condensador	153
Associação de condensadores	154
Como medir capacidades	154
Carga e descarga do condensador	155
Potência num circuito capacitivo	156
Aplicações de circuitos com elementos RC	157
Circuito diferenciador	157
Circuito integrador	157
Filtros	158
Indutor	160
Associação de indutores	161
Como medir indutâncias	161
Potência num circuito indutivo	161
Circuito ressonante RLC	162

Transformadores	164
Representação complexa da ddp e da corrente alterna	165
Lei de Ohm generalizada — Impedância	166
Díodo	167
Característica ddp – corrente	168
Aplicações dos díodos	170
Rectificação de meia-onda	170
Rectificação com alisamento	171
Rectificação de onda completa	171
Tipos de díodo	172
Díodos de sinal	172
Díodos Zener	172
Díodos emissores de luz – LED	173
Díodos de capacidade variável	173
Transistor	173
Amplificador operacional	176
Circuito comparador	177
Realimentação	178
Amplificador inversor	179
Amplificador não inversor	180
Dimensionamento das resistências da malha de realimentação	180
Circuito soma	180
Circuito seguidor de tensão	181
Leitura 5 — O que é Temperatura	183
Escalas de temperatura	185
Escala absoluta de temperatura	185
Escalas Celsius e Fahrenheit	186
Medidores de temperatura	187
Transdutores resistivos de temperatura	187
Termómetros de junção semicondutora	189
Leitura 6 — Ondas	191
Equação de propagação das ondas	192
Ondas harmónicas	193
Ondas de Rádio — modulação em amplitude	194
Profundidade de modulação	196
Sintonização	197
Desmodulação em amplitude	197
Modulação em frequência	198
Um olhar sobre os rádios da actualidade	198
	201
Leitura 7 — Óptica Geométrica	
Propriedades da luz visível	202
Frente de onda e raios luminosos	202
Reflexão e refraçção da luz	204
Reflexão total da luz	206
Formação de imagens com espelhos planos e esféricos	206
Equação dos espelhos esféricos e ampliação	209
Prismas	210
Reflexão total nos prismas	211
Fibras ópticas	211
Lentes convergentes e divergentes	212
Equação das lentes delgadas e ampliação	214

Sistemas ópticos	
Olho humano	
Óculos	
Ampliação angular	
Lupa	
Oculares	
Oculares	•••••
Máquina fotográfica	
Associação de lentes na construção de aparelhos ópticos	
Microscópio	
Telescópio	
Binóculos	
Aberrações nas lentes	
Leitura 8 — Células Fotovoltaicas	
Semicondutores	
Eficiência das células fotovoltaicas	
O Sol como fonte de energia	
APÊNDICES	
Apêndice 1 — O Osciloscópio	
Funcionamento do osciloscópio	
Tubo de raios catódicos e circuito de entrada	
Varrimento e trigger	
Osciloscópio de traço simples e duplo	
Regulações e opções	
Regulação do ponto luminoso	
Entradas	
Modo Y-T	
Modo X-Y	
Grandezas que se podem medir directamente com o osciloscópio	
Tensões contínuas	
Tensões alternas periódicas	************
Intensidada da agreenta	
Intensidade de corrente	
Diferença de fase entre dois sinais de igual frequência	
Medição da razão de frequências de dois sinais — figuras de Lissajous Ponta de prova	
Apêndice 2 — Multímetros	
Aultímetro analógico	
Galvanómetro d'Arsonval	
Amperímetro analógico	
Voltímetro analógico	
Ohmímetro analógico	
Multimetros	
Nultímetro digital	
apêndice 3 — Fontes de Tensão e de Corrente Eléctrica	
onte de tensão	••••••
onte de corrente.	
pêndice 4 — Medidores de Comprimento	
Iónio	
raveira	

Micrómetro ou palmer

Apêndice 5 — Detector Geiger-Muller	265
Apêndice 6 — Segurança no Laboratório	12820
Apêndice 6 — Segurança no Laboratório	267
Normas para equipamento eléctrico	267
Normas para produtos químicos	268
Normas para produtos químicos	269
Normas para emissores de radiação não ionizante	269
Laser	271
Micro-ondas	271
Regras gerais em relação a todos os perigos	271
	, 271
TABELAS	
Expressões Matemáticas	275
Potências de dez e notação científica	275
Potências e logaritmos	275
Perímetros, áreas e volumes	276
Funções trigonométricas básicas do ângulo θ	276
Relações trigonométricas	276
Desenvolvimento em série	277
Derivadas	278
Integrais	278
Números complexos	279
Noção de ângulo sólido	280
Sistema Internacional de Unidades (SI)	281
Prefixos dos múltiplos e submúltiplos de unidades SI	281
Designação de números grandes	281
Resumo das grandezas de base do SI	281
Grandezas e unidades de base do SI	282
Grandezas e unidades suplementares do SI	283
Dimensão de uma Grandeza Física	283
Grandezas e unidades derivadas correntes em física	284
Constantes Fundamentais Físicas e Matemáticas	286
Factores de Conversão de Unidades para SI	286
Símbolos Gráficos para Circuitos Eléctricos usados neste Manual	287
Código de Leitura de Resistências	288
Código de Leitura de Capacidades	289
Aceleração da Gravidade em Vários Locais da Terra (ao nível do mar)	289
Espectro de Frequência das Ondas Electromagnéticas	290
Bandas de radiofrequência	290
Tabela de Probabilidade da Distribuição Normal Reduzida	290
Tabela de Probabilidade da Distribuição t de Student	291
Tabela de Probabilidade da Distribuição χ²	292
racea de Frobacinade da Distribuição X-	293
Bibliografia	297
Problemas Resolvidos	301
ndice Analítico	313



Preâmbulo

N os últimos anos a Física Experimental tem começado a ser reconhecida como imprescindível a uma moderna formação dos estudantes quer de Física quer de outras licenciaturas em que a Física se revela necessária, além do mais porque possuidora de todo um conjunto de técnicas e instrumentos de medida imprescindíveis ao desenvolvimento de muitos domínios científicos.

Contudo, se é raro encontrar nas prateleiras das livrarias livros científicos, mais raro é ainda a presença de obras sobre Física Experimental, Técnicas, Métodos e Instrumentos. Os temas experimentais, quando existem, são de carácter divulgativo e com o objectivo de suscitar no grande público o interesse pela Ciência a partir de experiências divertidas. O livro que escrevemos pretende proporcionar aos estudantes dos primeiros anos de cursos universitários com disciplinas de Física um apoio à realização de experiências e à sua interpretação.

Para além de querermos dar uma resposta à ausência de um texto de índole experimental tivemos ainda como musa inspiradora o facto de qualquer um de nós se ter divertido e aprendido nas longas horas passadas nos laboratórios de ensino ou de investigação tentando escalpelizar a Natureza. Pensamos que a experiência adquirida e o gozo vivido devem ser transmitidos aos nossos estudantes. Não queremos esconder que umas tantas vezes nos deprimimos com a rebeldia da Natureza ou com o fiasco das nossas ideias.

O manual que conseguimos escrever não é o golpe de génio do fim do século. Quase tudo que aqui se encontra pode ser lido em vários livros e manuais, especialmente nos editados por universidades inglesas e americanas. A vantagem deste texto reside em ser feito com base no conhecimento que temos do currículo das licenciaturas em Física no nosso País, da preparação com que os estudantes chegam ao primeiro ano da Universidade e do equipamento existente, facilmente adquirível ou que se pode construir nos Departamentos.

Como elemento secundário julgamos ser de grande ajuda, para nós e para os estudantes, a existência de um texto que para além de um conjunto coerente de experiências reúna os inúmeros acessórios indispensáveis à vida de uma experiência tais como indicações sobre os instrumentos mais utilizados, tabelas matemáticas, métodos de análise estatística, unidades, constantes, etc.

Este livro destina-se a acompanhar o estudante no seu primeiro contacto com a realização de experiências, isto é, consideramo-lo como texto de apoio ao primeiro curso semestral de Física Experimental. A sua existência não deve ser um convite à preguiça: o estudante não deve prescindir da sua pesquisa nos livros que estão no laboratório ou na biblioteca, vendo coisas que nos escaparam ou levianamente consideramos menos importantes. A bibliografia proposta sobre outras experiências tem por objectivo incentivar a realização de trabalhos diferentes dos propostos neste manual.

Não podemos terminar este preâmbulo, sem relembrar todos os colegas do Departamento com quem colaborámos nas diversas físicas experimentais, ao longo de vários anos. Com eles debatemos inúmeros problemas que abordamos neste livro. Como deve funcionar um laboratório, que experiências fazer e como as fazer, como e quando as au-

tomatizar, que avaliação é desejável nos cursos laboratoriais, tudo isto foi tema de discussão na preparação das aulas e no seu decurso, em grupos de trabalho e comissões e quantas vezes também argumento das conversas ao café.

Este livro é também reflexo do empenhamento do Departamento de Física no desenvolvimento da componente experimental na aprendizagem de Física.

À colega Margarida Cruz um agradecimento especial pela colaboração na experiência e na leitura sobre células fotovoltaicas.

Agradecemos à Junta Nacional de Investigação Científica e Tecnológica o apoio prestado à publicação deste livro.

Os Autores

Conceição Abreu Luis Matias Luís Peralta O fio condutor deste texto é baseado nos seguintes pontos:

- A importância de ensinar a fazer experiências com rigor e submeter os resultados à análise matemática:
- O conhecimento sobre a Física é o resultado de anos de Experimentação. Recordemos que a Ciência moderna começou com Galileu, considerado um experimentalista por excelência, e que os prémios Nobel da Física dos últimos anos foram concedidos a experimentalistas, J. Friedman, H. Kendall e R. Taylor (1990), P. Genes (1991) e G. Charpak (1992);
- Os estudantes chegam à Universidade com um contacto episódico ou nulo com o Laboratório, não estando portanto habituados ao FAÇA VOCÊ MESMO;
- A Física pode ser feita no laboratório, este não é um mero local de confirmação. Se bem que possuidores de escassos conhecimentos teóricos (considera-se como base o décimo primeiro ano), os alunos podem progredir nos seus conhecimentos recorrendo à experimentação;
- Os estudantes estão ansiosos por fazer física experimental, e portanto não é boa política fazer da aprendizagem de base algo de muito aborrecido;
- A física experimental como qualquer outro tipo de aprendizagem envolve o conhecimento e treino de um certo número de técnicas, que habilitam o aluno a fazer experiências prodigiosas. Esta aprendizagem de base é inevitável em qualquer tipo de estudo, é como o estudo do solfejo por que têm de passar todos os aspirantes a músicos:
- Medir uma grandeza implica tomar dados, controlar o valor obtido e saber representar o resultado de modo a obtermos uma rápida informação sobre o fenómeno em observação;
- Hoje quase todas as grandezas se medem com transdutores eléctricos, o que explica a ênfase dada ao estudo de circuitos eléctricos;
- Apesar de vivermos num mundo fortemente automatizado, o primeiro contacto com a experiência deve ser, na nossa perspectiva, o mais manual possível, para que o estudante sinta bem a realidade e as dificuldades quer no manuseamento dos instrumentos quer na interpretação dos resultados. Uma segunda disciplina experimental deve introduzir a automatização, quer na aquisição quer na análise de dados.

Respeitando os pontos enumerados, temos ainda os constrangimentos com que nos confrontamos ao elaborar um currículo laboratorial para ser usado no primeiro ano de uma licenciatura:

- O grande número de alunos, e a falta de docentes e de laboratórios obriga a sessões de laboratório de duas ou três horas, sendo o ideal quatro horas ou mesmo uma manhã ou tarde;
- As turmas de laboratório têm em geral quinze estudantes, trabalhando em grupos de três, existindo apenas um docente no laboratório. Este tem sido o modo clássico de funcionamento e nada nos leva a prever uma alteração se bem que outros modelos fossem possíveis;

- A presença de um só docente para cinco grupos de alunos com pouca experiência de laboratório exige, para evitar a dispersão do docente e incentivar a interajuda entre os estudantes, que o trabalho a executar em cada sessão seja o mesmo para todos os grupos. O trabalho seria muito mais profícuo se nos laboratórios o professor fosse coadiuvado por um monitor;
- A realização simultânea do mesmo trabalho por cinco grupos implica que o material envolvido seja de baixo custo (de modo a permitir a sua multiplicação); a inexperiência dos estudantes aconselha que seja simultaneamente, simples, robusto e de fácil reparação;
- O estudante deve ser estimulado a fazer experiências, logo não deve sentir-se excessivamente incapaz perante a proposta de pesquisa. As experiências concebidas não devem ser desnecessariamente complicadas, devendo incidir sobre assuntos interessantes.

Assim, a escolha das experiências a incluir tem muito particularmente em conta a necessidade de suscitar o interesse do estudante pela Física Experimental, tendo em atenção os objectivos e os constrangimentos enumerados.

Objectivo e sequência das experiências

As experiências a realizar são apresentadas em blocos, obedecendo à seguinte filosofia:

- Um bloco zero iniciará o estudante na medição de grandezas correntes como sejam comprimentos, massas, densidades, tempos. Este bloco poderá ser ou não ser executado consoante os conhecimentos dos alunos;
- O primeiro bloco, ao propôr uma experiência como a do pêndulo simples, confrontará o estudante com a medição de uma dada grandeza, neste caso a aceleração da gravidade. Tendo em atenção o valor que lhe é correntemente atribuído e as variações que esta grandeza sofre com a altitude é fácil constatar quão necessária é a atribuição de uma incerteza ou erro à medida efectuada. O estudo da aceleração da gravidade em função de outras grandezas permitirá introduzir o estudante na construção de tabelas e traçado de gráficos usando métodos de ajuste linear. Noções elementares de estatística, como média e desvio padrão, e determinação da incerteza com base na propagação de erros são usadas nesta pesquisa;
- O segundo bloco permite ao estudante progredir na análise dos resultados, introduzindo através de uma experiência de contagem de desintegração radioactiva a noção de distribuição normal e de testes de confiança. Esta experiência, envolvendo noções elementares de física da estrutura da matéria, conduz a uma incursão nos domínios da microfísica, mundo sempre fascinante;
- No terceiro bloco, a realizar em várias sessões de laboratório, consoante a preparação do estudante, manusear-se-ão as grandezas eléctricas mais vulgares e os circuitos eléctricos básicos, que irão permitir posteriormente a construção de transdutores eléctricos, necessários ao estudo de outras grandezas ou fenómenos físicos não eléctricos como a temperatura e as ondas electromagnéticas;

- As experiências dos blocos quatro e cinco propõem a determinação de duas grandezas: a temperatura e a frequência de sintonização de uma estação de rádio, recorrendo a transdutores, utilizando as noções de circuitos obtidas no terceiro bloco e a análise de dados do primeiro e do segundo blocos. Consequentemente, permite uma integração dos conhecimentos obtidos anteriormente;
- O bloco seis será dedicado à óptica geométrica em que os olhos funcionam como transdutor natural. Este bloco permite aquelas experiências simples, que seriam possíveis em qualquer escola secundária, como seja a construção de protótipos de telescópios e microscópios. A compreensão do que é a reflexão e a refracção e a medida de distâncias focais serão elementos de base que possibilitarão a construção de tais protótipos. Esta experiência pode ser enriquecida com visitas de estudo aos telescópios que existem em quase todas as cidades com Observatórios e cuja existência passa despercebida à maioria dos estudantes.
- O bloco sete será dedicado ao estudo da transformação de energia solar em eléctrica recorrendo a células fotovoltaicas. A compreensão do funcionamento das células envolve um pouco de física da matéria condensada e noções de mecânica quântica.

Em cada experiência existe:

- Uma introdução resumida sobre o objectivo da pesquisa, que deve ser sempre completado com o estudo de uma ou várias leituras ou apêndices do manual devidamente referenciados, permitindo uma compreensão da Física envolvida, o funcionamento dos instrumentos de medida necessários e referindo a bibliografia. A remissão do desenvolvimento teórico para outra parte do livro destina-se a evidenciar a tarefa laboratorial proposta;
- Várias propostas de medidas a realizar;
- Sugestões sobre o modo de representar e tratar as medições feitas;
- Um dado número de exercícios que simulam as medidas efectuadas, com o objectivo de criar o espírito de que ao modelo físico está associado um modelo matemático e que este modelo físico/matemático permite a simulação de qualquer experiência. Os exercícios têm todos resposta, com o objectivo de comunicar um pouco de velocidade inicial, os exercícios assinalados com sestão total ou parcialmente resolvidos no fim do livro;
- Experiências assinaladas com um ou mais asteriscos *, conforme o grau de dificuldade, poderão ser executadas em função da disponibilidade de tempo, do interesse do estudante e do equipamento existente;
- Experiências simples assinaladas com índice zero (0), aconselhadas aos estudantes que ao lê-las as considerem úteis no confronto com os seus conhecimentos pessoais.

Ao reexaminar os blocos propostos vemos que este conjunto de experiências simples permite contactar com vários campos da Física: mecânica (pêndulo), electricidade e ondas (sintonizador de ondas rádio), termodinâmica (temperatura), radioactividade (estatística de contagem), astronomia (lentes e construção de instrumentos de óptica), física do estado sólido (célula fotovoltaicas), facultando não só uma aprendizagem laboratorial como um conhecimento de fenómenos físicos interessantes.

Muitos outros grupos de experiências podiam ser propostos, privilegiando outras opções. A nossa pode ser descrita de modo resumido como: fazer experiências viajando pela Física com meios económicos.

Na parte dedicada às noções de Física necessárias à pesquisa somos omissos sobre a inserção histórica. Os estudantes têm em quase todas as licenciaturas disciplinas de História das Ciências onde é analisada a evolução desta, não sendo em geral menosprezados os factores políticos, económicos e sociais que influenciaram o seu desenvolvimento, e como o próprio desenvolvimento da Ciência actuou sobre os factores enunciados.

Organigrama do manual

Este manual é composto de quatro partes:

- A primeira parte, assinalada com uma rede cinzento-claro, é dedicada à descrição das experiências.
- A segunda parte, assinalada a cinzento-médio, é um conjunto de leituras sobre temas de física e análise de dados.
- A terceira parte, na forma de apêndices, engloba notas sobre os instrumentos e métodos frequentemente envolvidos nas experiências. Encontra-se assinalada a cinzento-forte.
- A quarta parte agrupa as tabelas de constantes, factores de conversão, igualdades e expressões matemáticas, sistema de unidades, isto é, tudo o que pensamos facilitar a vida no laboratório e está assinalada a cinzento-escuro.

Como fazer uma experiência

Quando se faz uma experiência várias coisas a podem rentabilizar e convém que o estudante as conheça para as não descurar e tirar o melhor proveito do esforço dispendido. Em primeiro lugar deve ter-se gosto em realizar a experiência! Uma vez preenchido este requisito, um outro que à primeira vista pode parecer descabido é o de ter um livro de bordo ou *logbook* ¹. Finalmente, é necessário preparar a experiência.

Mas o que é preparar uma experiência de Física?

Uma vez que algo nos intriga é natural que comecemos por pensar qual a Física envolvida e alinhar umas tantas ideias. A seguir devemos reflectir sobre o material a usar, a sua disponibilidade, construção ou aquisição. Para aferirmos o que sabemos sobre o que queremos experimentar e se as opções feitas foram as convenientes devemos controlar matematicamente o fenómeno. Devem ser feitos cálculos sobre os valores mínimos

Usaremos o itálico para os termos estrangeiros.

21

e máximos que as grandezas podem tomar, estabelecidas relações prováveis entre as grandezas e resolvidos alguns exercícios relacionados com a experiência.

À medida que vamos reflectindo nestas coisas vamos tomando apontamentos e o local ideal para o seu registo é o *logbook*.

No caso concreto das disciplinas de física experimental ou aulas práticas quando se vai para o laboratório deve já existir um esboço do que se pretende fazer. O início da sessão é o momento propício para esclarecimento de dúvidas surgidas aquando da preparação da experiência. Seguir-se-á uma avaliação do material disponível e a sua disposição de modo a permitir as medições previstas e a transcrição para o *logbook* do esquema geral da experiência e das características relevantes do material utilizado. Procede-se às medições registando os valores, devendo fazer-se alguns cálculos, ainda que preliminares, para ver se os resultados que se estão a obter são coerentes com o que se esperava.

No início do curso os estudantes sentem-se inseguros e pouco habilitados a mexer nos aparelhos. A atitude a tomar é vencer estes receios e com cuidado e bom senso tentar fazer as ligações e mexer nos botões, lendo sempre as legendas que os acompanham.

Uma vez finalizadas as medidas procede-se à construção de tabelas, aos cálculos precisos, ao traçado de gráficos, etc. Finalmente tiram-se conclusões sobre a experiência efectuada, tecem-se críticas caso seja necessário e discute-se com o professor e os colegas, no laboratório, corredor ou bar, os resultados obtidos.

Se o resultado obtido for pouco ortodoxo ou se a experiência falhar, é necessário saber avaliar o que se passou, podendo esta análise ser tão interessante como o sucesso.

À medida que o curso progride e se adquirem mais conhecimentos as experiências serão mais atraentes e o laboratório passará a ser um local agradável.

Como deve ser o logbook

- Caderno de capa rígida para resistir a um semestre de laboratório sem ter um aspecto de velho e poder ser guardado numa estante para uso posterior em qualquer das disciplinas de física experimental;
- As folhas ideais são quadriculadas alternadas com algumas de papel milimétrico, permitindo uma apresentação arrumada dos cálculos, a construção de tabelas e esquemas sem recorrer à régua. A presença de folhas de papel milimétrico torna mais rigorosos os gráficos desenhados;
- Apesar do trabalho ser realizado em grupo, cada elemento deve ter o seu caderno, pois no futuro cada um vai precisar dos elementos nele registados e será cómodo nesse momento ter o seu logbook;
- Respondendo ao argumento de que durante a aula, por falta de tempo, se escreve tudo desordenadamente, propõe-se que uma parte do caderno, seja utilizada para os registos feitos aquando das medições, isto é, que se crie uma zona de rascunho, tendo o cuidado de registar a data e a experiência a que se referem. Podem fazer-se registos em dias diferentes e convém não misturar tudo sem primeiro analisar se foram realizados nas mesmas condições e se pertencem à mesma experiência;

- A existência de logbook evita, porque em parte os substitui, a realização sistemática de relatórios, guardando-se estes para situações especiais;
- No exame final pode ser considerado como mais um elemento de avaliação do trabalho desenvolvido pelo estudante durante o ano;
- A extensão do uso do logbook a todas as físicas experimentais permitirá ao estudante ter um óptimo instrumento de trabalho no fim da licenciatura, que será sem dúvida útil para os que seguirem a opção de Física Experimental.

Como deve ser o relatório de uma experiência

Realizada uma experiência deve elaborar-se um relatório sobre o objectivo da sua realização, registo e discussão dos resultados obtidos. O destino deste relatório pode ser a publicação numa revista, a apresentação numa conferência, o instrumento de base para uma discussão com o professor e com os colegas ou um modo eficaz de conservar uma memória sobre um esforço que nos permitiu melhor compreender Física.

Como deve ser um relatório?

Como regra de ouro deve ser claro e conciso. A estrutura genérica pode ser muito variada. Uma, correntemente aceite, consta de uma introdução com o objectivo da experiência, o método e o equipamento usados para atingir o objectivo. No caso de parte do equipamento ou do método serem de concepção específica para a experiência deve ser detalhadamente descrito e ilustrado, podendo ser inserido em apêndice, para não quebrar a sequência. Segue-se o registo dos valores obtidos com referência aos respectivos erros de medida e representados se possível em tabelas ou quadros, analisam-se os dados e apresenta-se o resultado dos cálculos. O resultado final deve ser apresentado, sempre que possível, sob a forma de gráficos que o evidenciem e que facilitem a discussão. Conclui-se sobre o êxito ou fiasco da experiência realizada. Se no decorrer do relatório for necessário referir outros trabalhos, no final deve apresentar-se uma bibliografia com o título do artigo, o nome dos autores e a revista ou livro onde foi publicado.

Esquema de um relatório

Título

ANATOMIA DE UM RELATÓRIO

Autores

Estudante A e Estudante B

Disciplina

FÍSICA EXPERIMENTAL Y Ano 2000

RESUMO

Síntese dos objectivos e dos resultados obtidos.

INTRODUÇÃO

Considerações gerais, hipótese a testar, objectivos a atingir e importância da experiência, invocação de outras experiências que já se realizaram sobre o mesmo problema.

FUNDAMENTO TEÓRICO (breve)

MÉTODO E EQUIPAMENTO

RESULTADOS

Valores obtidos, erros que os afectam, tabelas, cálculos e gráficos.

DISCUSSÃO

Análise sobre a concordância dos resultados com a hipótese da introdução, comparação com os valores teóricos ou outras experiências, discussão das diferenças obtidas, possível minimização dos erros, tentativa de compreensão do fracasso obtido se tal for o caso, proposta de outras vias para estudar o problema.

BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS

Nota: Fazer o relatório com um programa de tratamento de texto confere-lhe um bom aspecto que pode facilitar a leitura. Mas se um computador não estiver disponível ou o estudante ainda não dominar um processador de texto é perfeitamente aceitável um relatório bem manuscrito.



EXPERIÊNCIAS



EXPERIÊNCIA 0

Medição de Grandezas Elementares

N as medições propostas determinam-se valores para grandezas elementares e manuseiam-se instrumentos simples. Os resultados devem ser baseados em diversas medições, afectados do erro e expressos em unidades do Sistema Internacional (SI). Assim o resultado final é dado por

[valor da grandeza] ± [erro] [unidade]

e deve ser apresentado só com os algarismos que forem significativos.

O valor do erro é estimado com base na análise dos vários tipos de erros: leitura, estatístico ou de calibração, tomando-se o que for maior. Os erros sistemáticos, como o erro de zero, se puderem ser avaliados devem também ser considerados e o valor da medida corrigido.

Sempre que possível, é interessante analisar os limites de aplicabilidade dos métodos de medida sugeridos e indicar outros alternativos aos propostos.

0.1 Pesquisa proposta

- 1 Medição de diâmetros, volumes e áreas.
- 2 Medição de densidades.
- 3 Medição de intervalos de tempo.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

- Aquisição, Análise e Tratamento de Dados (Leitura 1);
- Medidores de Comprimentos (Apêndice 4);
- Sistema Internacional de Unidades (TABELAS).

0.2 Equipamento necessário

Régua, craveira, *palmer*, balança, vários objectos de formas geométricas diversas e diferentes materiais, fio de prumo, plano inclinado, cronómetro de centésimas de segundo.

0.3 Experiências sugeridas

1 Medir espessuras

Qual será o diâmetro de um cabelo?

A espessura de um cabelo pode ser medida usando um *palmer*. Fazendo algumas medições pode determinar-se o valor mais provável (média) para o diâmetro.

Estimar o erro de leitura. Comparar o erro de leitura com o erro estatístico no caso de fazer várias medições. Estar alerta para problemas como a dificuldade de posicionar o cabelo entre as esperas do *palmer* sem afectar a grandeza a medir.

Determine o diâmetro de um vulgar fio eléctrico. Compare este valor com o obtido para o cabelo. Diferem de quantas ordens de grandeza?

A espessura do cabelo pode ser medida com uma craveira? Porquê? E o diâmetro de um fio eléctrico? Existirão outros métodos para fazer este tipo de medição?

2 Medir volumes

Qual é o volume de um clip?

Um método para o determinar consiste em endireitar o *clip* o melhor possível. Medir o diâmetro (d) com um *palmer* ou com uma craveira e o comprimento (L) com uma régua ou craveira. O seu volume será dado aproximadamente pelo volume de um cilindro $V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 L$.

Fazendo várias medições obtenha o valor mais provável (média) e o erro estatístico que o afecta (desvio padrão da média). Estime o erro de leitura. Qual o valor do volume?

Como proceder para avaliar o volume de um *clip* que se encontre «torto»? (ver experiência sobre a medida de áreas). Se optarmos por medir o volume do *clip* recorrendo a uma proveta graduada com água, devemos evitar que se formem gotículas de ar em torno do metal. Que tipo de erro provoca esse volume de ar?

Compare os volumes de um clip e de um copo de água.

3 Medir áreas com uma balança

A experiência consiste em medir de forma indirecta a área A_1 de uma superfície irregular. Para o fazer é necessário dispôr de uma placa do mesmo material e igual espessura, mas com uma forma regular, cuja área A_2 se possa medir facilmente (por exemplo um rectângulo). Então a razão das áreas das duas placas é igual à razão das massas das mesmas.

De facto se ambas as placas são do mesmo material a sua densidade é idêntica

$$\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \rho_2 = \frac{m_2}{V_2}$$

Notando que o volume das placas é igual ao produto da área pela sua espessura x, que é idêntica para ambas as placas, tem-se

$$\frac{m_1}{A_1} = \frac{m_2}{A_2}$$

Proceda de modo a poder discutir o erro que afecta a medida.

4 Medir densidades 1

Qual é a densidade do latão?

A densidade de um material é definida como sendo a razão entre a massa e o volume

$$\rho = \frac{m}{V}$$

No caso de uma liga metálica como o latão (cobre e zinco), a densidade da liga pode ser expressa em termos da densidade de cada um dos elementos constituintes (ver exercício 0.1)

$$\frac{1}{\rho_{ligg}} = \omega_1 \frac{1}{\rho_1} + \omega_2 \frac{1}{\rho_2}$$

As constantes $\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ e $\omega_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ são as proporções, em massa, com que cada um dos elementos constituintes entra na composição da liga.

A experiência consiste em determinar a densidade de uma peça de latão (de forma irregular), e a partir desse valor estimar a percentagem em que cada elemento entra na liga. Os valores das densidades são

$$\rho_{Cu} = 8.96 \ g/cm^3 \ e \ \rho_{Zn} = 7.13 \ g/cm^3$$

Arranjemos uma peça em latão (por exemplo uma bola, de preferência irregular), uma balança e uma proveta graduada. O volume da peça de latão (que deverá ser maciça) pode ser medido com uma proveta graduada (com pelo menos 1 cm³ de precisão), semicheia com água. O volume da peça é igual à diferença de volumes medidos antes e depois de mergulhá-la na água. O peso da peça é medido com uma balança cuja precisão deverá ser pelo menos da ordem de 0.1 g.

Como se deve proceder para que o erro da medida seja inferior a 1%?

5 Determinação do centro de massa de figuras geométricas

As coordenadas do centro de massa (CM) de uma associação de corpos pontuais (x_{CM}, y_{CM}, z_{CM}) são função das massas m_i e posições (x_i, y_i, z_i) individuais

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \qquad z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

Designa-se indiferentemente densidade ou massa volúmica.

Para um corpo maciço, a definição do CM é análoga, substituindo os somatórios por integrais em ordem ao elemento de massa dm. Se a aceleração da gravidade g for idêntica para todos os pontos do corpo, então o centro de gravidade, ponto em que se considera aplicado o peso, coincide com o centro de massa.

No caso de corpos homogéneos com formas geométricas regulares, o centro de massa é o centro geométrico do corpo. Quando se associam diversos corpos deste tipo, o centro de massa global pode ser calculado a partir das coordenadas dos CM de cada componente, considerando-se toda a massa aí concentrada.

Se o corpo homogéneo possui cavidades ou recortes regulares, a sua contribuição pode ser avaliada considerando o corpo recortado como a associação de um objecto maciço com um recorte de massa negativa (correspondente à massa retirada).

Para realizar esta experiência devem-se dispôr de chapas com formas regulares e espessura constante (contendo ou não recortes) e de um fio de prumo para marcar a vertical. Suspendendo cada chapa por diversos pontos da sua periferia e traçando a vertical que passa pelo ponto de suspensão, é possível determinar o centro de gravidade como o ponto de intersecção das diferentes direcções. As marcações podem ser feitas sobre um papel vegetal colado à placa.

Tente estimar os erros associados a esta determinação e compare os resultados obtidos com as coordenadas teóricas do CM obtidas a partir da geometria das figuras. O cálculo do CM teórico tem erro? Comente.

6 Medir intervalos de tempo

Na queda por um plano inclinado quem chega primeiro?

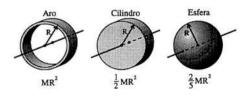
A energia mecânica dos objectos em movimento é dada pela soma das energias cinética e potencial.

A energia cinética de objectos não pontuais é a soma da energia cinética de rotação e da energia cinética de translação. A energia cinética de translação de um objecto que tem velocidade de translação v é $E_c = \frac{1}{2}$. mv^2 . A energia cinética associada a um movimento de rotação com velocidade angular ω expressa-se em termos do momento de inércia I por $E_R = \frac{1}{2}$ $I\omega^2$. A energia potencial de um objecto é dada por mgh.

No caso de um objecto que cai rolando por um plano, a velocidade angular ω relaciona-se com a velocidade de translação por $v = \omega R$, em que R é o raio do corpo em relação ao eixo de simetria. Havendo conservação de energia mecânica, à medida que o corpo cai a energia potencial perdida é convertida em energia cinética. Se for h o desnível no plano inclinado, temos com base no princípio de conservação da energia

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

Na figura indicam-se os momentos de inércia em torno do eixo de simetria para alguns objectos que podem rolar. De uma forma geral, um corpo que role e que tenha um eixo de simetria, tem um momento de inércia dado por $I = \beta MR^2$, sendo β um factor adimensional.



Para a realização da experiência são necessárias esferas, cilindros e aros de vários metais (por exemplo latão, ferro e alumínio), com raios e massas iguais ou diferentes.

A experiência consiste simplesmente em largar os objectos numa calha inclinada, com cerca de 1 m de comprimento. Com um cronómetro manual e precisão de centésimos de segundo, deve medir o tempo dispendido por cada um deles para percorrer uma mesma distância.

Organize os resultados da experiência na forma de uma tabela.

Os resultados obtidos correspondem à expectativa inicial?

Quem chega primeiro?

Qual a precisão da resposta?

Procure explicar de uma forma simples e intuitiva o que observou e os erros que se cometem neste tipo de medições.

Sugestões Técnicas

Se quiser construir uma peça de forma particular ou de um material diverso dos fornecidos, informe-se da possibilidade de utilizar a oficina da sua escola. Se esta não existir, tente fazer a peça com as ferramentas que todos temos em casa para os pequenos concertos domésticos.

0.4 Exercícios

- **0.1** \square Encontrar a relação existente entre a densidade de uma liga ρ_{liga} e as densidades dos dois elementos que a constituem ρ_1 e ρ_2 em termos das proporções em massa ω_1 e ω_2 .
- **0.2** Tomando a forma genérica do momento de inércia para os objectos que rolam por um plano inclinado, deduza qual é a percentagem de energia de rotação e de translação na energia cinética total. Faça uma aplicação ao caso de aros, cilindros e esferas.
- **0.3** Suponha que tem à sua disposição dois cilindros que exteriormente são idênticos, isto é, têm as mesmas dimensões e exactamente o mesmo peso. Sabe-se que um dos cilindros é de ouro enquanto que o outro é uma imitação feita de prata com uma fina película de ouro. Conceba uma experiência simples não destrutiva para descobrir qual dos cilindros é de ouro. (Nota: os cilindros não têm que ser maciços.)

0.4 Pretende-se determinar a energia cinética $E_c = \frac{1}{2} mv^2$ de um corpo a partir dos valores medidos para a massa e velocidade

$$m \pm \delta m = (1.25 \pm 0.05) \times 10^{-1} kg$$

 $v \pm \delta v = 0.87 \pm 0.01 \text{ m/s}$

em que os erros dados são erros estatísticos.

- a) Calcule o valor da energia cinética.
- b) Calcule o erro estatístico absoluto.
- c) Calcule o erro estatístico relativo.

R: a)
$$E_c = 4.73 \times 10^{-2} J$$
 b) $\delta E_c = 0.22 \times 10^{-2} J$ c) 5%

0.5 Pretende-se calcular a componente da aceleração da gravidade g ao longo de um plano inclinado $a = g \operatorname{sen}\theta$, em que θ é o ângulo que o plano faz com a horizontal. Os valores experimentais afectados do erro estatístico são

$$g \pm \delta g = 978 \pm 3 \text{ cm/s}^2$$

 $\theta + \delta \theta = 0.859 \pm 0.002^\circ$

- a) Calcule o valor da aceleração.
- b) Calcule o erro estatístico absoluto.
- c) Calcule o erro estatístico relativo.

R:
$$a = 14.7 \text{ cm/s}^2$$
 b) $\delta a = 0.1 \text{ cm/s}^2$ c) 0.7%

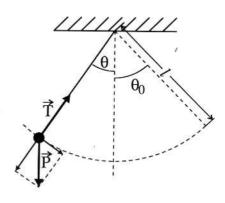
0.6 A temperatura de uma sala foi medida em intervalos de cinco minutos durante uma hora. Os resultados obtidos, expressos em grau celsius, foram:

- a) Qual foi o valor médio da temperatura durante essa hora, o desvio padrão e o desvio padrão da média?
- b) Suponha que durante o intervalo de tempo em que se fizeram as medidas as variações na temperatura ficaram-se a dever a trocas de calor com o exterior (por exemplo portas ou janelas que se abriram). Nesta situação a grandeza desvio padrão da média $s_{\rm m}$ tem o significado físico de erro na medida da temperatura? Porquê?
- R: a) <T> = 21.35°C, s=0.35°C, s_m = 0.10°C b) Não, porque as variações observadas no valor da temperatura são devidas a causas físicas e não se devem ao método de medição.

EXPERIÊNCIA 1

Estudo do Pêndulo Simples e Determinação da Aceleração da Gravidade no Laboratório

Pêndulo simples é o modelo simplificado de um corpo oscilante seguro por um fio, em que se considera a massa do fio desprezável, e as dimensões do corpo pequenas quando comparadas com o comprimento do fio. No laboratório é normalmente usada uma pequena esfera de massa M e raio r suspensa por um fio inextensível de comprimento l_f . Quando se afasta a massa da sua posição de equilíbrio e depois se abandona, o pêndulo vai oscilar com um movimento periódico de período T em torno da posição de equilíbrio, descrevendo o centro de gravidade um arco de circunferência de raio $l = l_f + r$. A posição do pêndulo é dada em cada



instante pelo ângulo que o fio faz com a vertical θ , sendo positivo no sentido directo. As únicas forças que actuam a massa são o seu peso $M\vec{g}$ vertical e a tensão no fio \vec{T} .

Recordando que numa circunferência o comprimento do arco s é dado por $l\theta$, podemos escrever para a componente tangencial do movimento a equação

$$-Mg \operatorname{sen}\theta = M \frac{d^2(l\theta)}{dt^2}$$

Se considerarmos que o ângulo θ é suficientemente pequeno para admitir a aproximação sen $\theta \approx \theta$, então a simplificação da expressão anterior permite obter a equação do oscilador harmónico simples

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_o^2\theta = 0 \qquad \text{com} \qquad \omega_o = \sqrt{\frac{g}{I}}$$

O período do movimento, nesta aproximação, é então dado por

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

sendo uma função exclusiva do comprimento do pêndulo e da aceleração da gravidade no local.

No entanto, para ângulos em que a simplificação não é válida, o período do pêndulo passa a depender da amplitude máxima de oscilação através da expressão

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{2^2} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \operatorname{sen}^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right]$$

Para amplitudes inferiores a 40° e para a precisão com que é medido o período no laboratório (da ordem de 0.1%), basta considerar a influência do primeiro termo da série, que na sua forma aproximada vale

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right) \quad (\theta_0 \,\text{em radianos})$$

O conhecimento do período, comprimento e amplitude máxima do pêndulo permite calcular o valor da aceleração da gravidade no laboratório. O valor obtido pode ser comparado com o valor de referência ao nível do mar dado por

$$g = 9.78032 (1+0.0053025 \text{ sen}^2 \phi - 0.0000058 \text{sen}^2 2 \phi) \text{ m s}^{-2}$$

A correcção devida à altitude h (em metros) a que se encontra o laboratório é dada aproximadamente por

$$\Delta g = -0.1967h \times 10^{-5} \text{ m s}^{-2}$$

Uma série de outros efeitos afectam igualmente o valor do período. A força de impulsão devida ao ar altera o período das oscilações da forma dada pela expressão

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{\rho_{pendulo}} \right)$$

em que ρ é a densidade.

34

A influência da massa do fio de suspensão no período é dada por

$$T = T_0 \left(1 - \frac{m}{12M} \right)$$

sendo M a massa do pêndulo e m a massa do fio. O efeito do amortecimento para pequenas oscilações pode ser estimado por

$$T = T_0 \left[1 - \left(\frac{T_0}{4 \pi \tau} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

em que τ é o tempo de relaxação, metade do tempo necessário para que a amplitude se reduza a 1/e do seu valor inicial.

1.1 Pesquisa proposta

- 1 Determinar como o período de um pêndulo simples, de comprimento fixo, depende da amplitude da oscilação.
- 2 Determinar como o período varia com o comprimento do pêndulo.
- 3 Medir a aceleração da gravidade no laboratório.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

- Estudo do Pêndulo Simples (Leitura 2);
- Aquisição, Análise e Tratamento de Dados (Leitura 1);
- Medidores de Comprimentos (Apêndice 4);
- Consulta da tabela sobre os valores da aceleração da gravidade em função da latitude geográfica (TABELAS).

1.2 Equipamento disponível

Pêndulo simples de comprimento variável com uma base onde se possa marcar uma escala angular ou uma folha de papel polar (facultativo), cronómetro (precisão aconselhada não inferior a 1/100 s) ou cronómetro electrónico baseado numa célula fotoeléctrica associada a um sistema de aquisição com computador.

1.3 Experiências sugeridas

1 Preparação

O que entende por comprimento do pêndulo?

Deve começar por estabelecer um modo que permita determinar com rigor o comprimento do pêndulo, a incerteza nessa medida e como medir a amplitude de oscilação.

2 Estudo da variação do período do pêndulo com a amplitude de oscilação

Com um pêndulo de comprimento médio (50 cm) determina-se a dependência do período com a amplitude de oscilação, medindo períodos para amplitudes de 5° a 50° (mínimo de 6 valores). Para cada amplitude o amortecimento das oscilações durante a medição do período deve ser estimado.

Para pequenas oscilações pode-se afirmar que o período é independente do ângulo de oscilação?

Usando o valor normal da gravidade para o laboratório e recorrendo à fórmula aproximada de T em função de θ_0 pode construir-se uma tabela com $T_{\rm exp}$, T_0 e T e das suas diferenças em percentagem.

Determine T_0 e g a partir de um gráfico de $T_{\rm exp}$ em função de θ_0^2 . Discuta a validade da expressão aproximada $T_0=2\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}$. Avalie o efeito do amortecimento e se achar necessário tome-o em consideração.

3 Estudo da variação do período com o comprimento do pêndulo

Alterando o comprimento do pêndulo estude como o período varia com esta grandeza. Um gráfico de T(l) e um de $T^2(l)$ podem ajudar a tirar facilmente uma conclusão. O número de medidas deve ser de modo a permitir traçar um gráfico e ajustar uma função aos dados (a amplitude de oscilação θ_0 , fixa, terá de preferência um valor inferior a 20°).

4 Medição de g no laboratório

Com um pêndulo de um metro determina-se a aceleração da gravidade g. Deve-se reflectir sobre o número de oscilações a tomar de modo a que a medida venha afectada de um erro inferior a 1%. A amplitude de oscilação adequada é inferior ou da ordem de 10°. Porque razão se aconselha o uso de um pêndulo de 1m? O que são pequenas oscilações para este pêndulo?

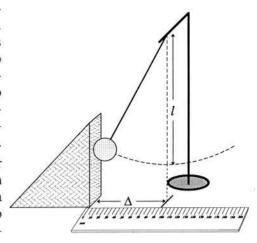
5 Avaliação de efeitos secundários na medição de g

Os efeitos da acção do ar, da massa do fio de suspensão, da amplitude de oscilação e do seu amortecimento sobre o período de oscilação podem ser calculados. Se conveniente, o valor de g obtido deve ser corrigido.

Sugestões Técnicas

■ Escolher um fio indeformável para suspensão do pêndulo. Não usar fio de *nylon*. Os fios metálicos não podem ser usados devido à resistência adicional introduzida no ponto de suspensão. A suspensão do pêndulo deve ser tal que o plano de oscilação não rode durante a medição. O modo de lançamento do pêndulo deve ser suave e reproductível. Sugere-se o uso de um anteparo.

■ Para medir o período é mais prático tomar como instante inicial e final o momento em que o pêndulo passa pelo ponto médio da oscilação, isto é, no ponto em que o ângulo é zero. Deve-se desprezar a primeira passagem. Notar que a precisão na medição ma-



nual do tempo apenas depende do tempo de reacção do operador (de 0.1 a 0.2 s) e não da precisão do cronómetro (que pode ser da ordem do ms).

■ Se t é o tempo gasto em n oscilações completas, o erro com que se mede o período T é inferior ao erro δ com que se mede t. O erro em T será δ/n . Portanto, pode aumentarse a precisão aumentando o número de oscilações. Esta técnica não é aconselhável para grandes ângulos. Porquê? Sugere-se que com um cronómetro clássico se efectue em cada experiência um conjunto de 5 medições de 10 períodos.

- m Para melhorar a medida do comprimento do pêndulo deve usar uma régua ou fita métrica para medir o fio de suspensão e um *palmer* ou craveira para medir o diâmetro da esfera e o sistema de suspensão. É mais prático fazer a medição do comprimento do fio com este esticado na horizontal.
- Se quiser determinar a densidade do pêndulo deve usar a balança que existe no laboratório e o *palmer* ou craveira.

1.4 Exercícios

1.1 Usou-se um pêndulo simples para medir g tendo sido feitas 20 medidas do período T. A média e o desvio padrão da série de valores obtida são respectivamente 1.82 s e 0.06 s. Dez medições do comprimento ℓ deram uma média de 822.7 mm e um desvio padrão de 2.4 mm. Calcule o valor de g e o seu desvio padrão.

R: 9.81 m s⁻²; 0.15 m s⁻².

- 1.2 Numa experiência de pêndulo simples, cujo objectivo é medir g, obteve-se o período com 2% de erro relativo e o comprimento com 1.5%. Qual é a precisão do valor de g? R: 5.5%.
- 1.3 ☑ Calculou-se o valor da gravidade esperada para um dado local, admitindo-se que a densidade média da crusta terrestre é 2.67 g/cm³. O valor obtido foi 9.800235 m/s². Calcule a anomalia gravimétrica (diferença entre o valor medido e o valor esperado) que seria produzida se sob esse local existisse um jazigo esférico de cobre centrado a 1 km de profundidade. Use uma densidade média do minério de 3.20 g/cm³ e um raio de 200 m para a dimensão do jazigo.

R:
$$\Delta g = 1.42 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$$
.

1.4 De quanto varia o valor de g conforme a medição é feita na base ou no topo da torre Eiffel (altura aproximada 320 m).

R: g diminui de 9.86×10^{-4} m/s².

1.5 Demonstre a expressão:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{\rho_{p\hat{e}ndulo}} \right)$$

Sugestão: sabendo que $d \le D$, o desenvolvimento em série permite escrever

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} x$$

1.6 Porque razão os corpos pesam mais nos Pólos?

R: Devido à forma da Terra que é aproximadamente um elipsóide achatado nos pólos e também devido à ausência da força centrífuga originada pelo movimento de rotação do Globo.

1.7 Usando a aproximação mais simples para a aceleração da gravidade como resultado da atracção de uma massa pontual,

$$g = \frac{GM_T}{R^2}$$

determine:

- a) A massa da Terra sabendo que o seu raio vale aproximadamente 6400 km. Use g = 9.800 m/s².
- b) A variação da gravidade com a altitude para corpos na vizinhança da superfície do Globo.
- c) Usando o resultado anterior, determine a variação com a altitude do período de um pêndulo simples.

R: a)
$$M_T = 6.016 \times 10^{24} \text{ kg}$$
 b) $\frac{\Delta g}{\Delta h} = -3.06 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ c) $\frac{\Delta T_o / T_o}{\Delta h} = 1.56 \times 10^{-5} \% \text{ m}^{-1}$

1.8 O período T de um oscilador harmónico simples com amortecimento é função da massa m do oscilador, da constante de restituição k e do parâmetro de amortecimento b

$$T = 2\pi \left[\frac{k}{m} - \left[\frac{b}{2m} \right]^2 \right]^{-1/2}$$

Cada um dos parâmetros foi medido experimentalmente e os erros calculados são estatísticos

$$k \pm \delta k = 0.11 \pm 0.01 \ N/m$$

 $m \pm \delta m = 0.500 \pm 0.005 \ kg$
 $b \pm \delta b = 0.062 \pm 0.008 \ kg/s$

- a) Calcule o valor do período.
- b) Calcule o erro estatístico absoluto.
- c) Calcule o erro estatístico relativo.

R: a)
$$T=14 \text{ s}$$
 b) $\delta T = 1 \text{ s}$ c) 7%

Análise Estatística dos Dados de uma Experiência

Q ual a importância de uma distribuição de probabilidades? Como resposta leiamos um extracto do romance de Rothman¹:

... Everyone present had one theory, if not two. Aside from the blue, red, and abstract cover hypotheses, there was the «strong, clean design» hypothesis, which I have never entirely understood. Its advocate maintained that «best covers sold the best and the ugliest covers sold the worst». Jonathan Piel proposed that «man and machine» covers were most popular. Yet another editor made the novel suggestion that contents were more important than cover: every issue with a major policy article or a math article or a computer article sold better than average. She bolstered her case by pointing out that at most newsstands the cover of *Scientific American* is buried behind *Popular Mechanics*.

The discussion went on for one and a half hours. As the other editors argued, I sat there morosely trying to image a similar gathering at the editorial offices of *Cosmopolitan*, where all covers to emerge are essentially identical. «Every centimetre of cleavage sell 90 000 copies. Blue mascara sells better than brown. Sex after marriage in the upper left-hand corner does not do as well as how to carry on an extramarital affair.» I couldn't buy it. After sufficient grumbling I was given the floor. It would be impressive to say I was duelling off the cuff, but I am not so brave and had come prepared. When the sales figures were given to me I did the first thing any physicist (probably even Feynman) would do: make a histogram that showed the number of issues selling a given number of copies. Why?

If you don't want to call it instinct, call it training. It seemed obvious that the factors influencing the sales of a magazine are many: the weather, the cover, the contents, the mood of the buyer, the budget deficit, a chance romantic encounter at the newsstand, perhaps the phases of the moon. In fact there must be so many factors influencing sales that it becomes impossible to isolate any one of them, and the result is essentially *random*.

For this reason I knew that even if some light pattern existed, it would be buried in statistical noise and extremely difficult to detect. On the other hand, if the newsstand sales were experiencing genuinely random flutuactions, that should be pretty easy to show by a histogram. Physicists are unscrupulous opportunists, so I opted for the easy way out. Within about 15 minutes I had my answer: the 22 issues for which I had data formed a Gaussian distribution, at least as close to a Gaussian distribution as you could hope for with only 22 points.

You may not have heard the term Gaussian distribution, but you have heard the terms normal distribution or bell-shaped curve. They are synonyms; many random processes result in Gaussian distribution, so many that the bell-shaped curve has become the symbol of randomness...

Com o texto torna-se evidente que se propõe o estudo de distribuições de probabilidades, mas aplicadas a situações físicas.

¹ Tony Rothman, *A Physicist on Madison Avenue*, ed. Princeton University Press, 1991. O autor é físico e escritor, num dado período da sua vida pertenceu ao conselho editorial da revista *Scientific American*. Rothman ensina relatividade na Universidade de Harvard.

Uma amostra de n_0 núcleos de um dado elemento radioactivo com probabilidade de desintegração λ , decai no tempo de acordo com a relação

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$$

A radioactividade é em si mesma um fenómeno de natureza estatística, portanto ideal para estudar conceitos como:

- média e desvio padrão,
- probabilidades de distribuição de acontecimentos,
- testes de confianca.

O declínio radioactivo, devido às suas características, n grande e λ pequeno, conduzindo a uma média $\mu = n\lambda$ finita, rege-se por uma distribuição de probabilidades do tipo Poissoniano. Podemos assim analisar o que se entende por este tipo de comportamento e as vantagens que daí advêm.

A maioria dos processos apresenta um comportamento normal ou gaussiano quando o número de acontecimentos é grande. A distribuição de Poisson tende para a distribuição normal quando a média μ é grande.

2.1 Pesquisa proposta

- 1 Com uma amostra de núcleos de ¹³⁷Cs determinar o valor médio e a variância do número de desintegrações que ocorrem num dado intervalo de tempo.
- 2 Estudar o tipo de distribuição de probabilidades a que a amostra obedece.
- 3 Testes de confiança sobre os resultados.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

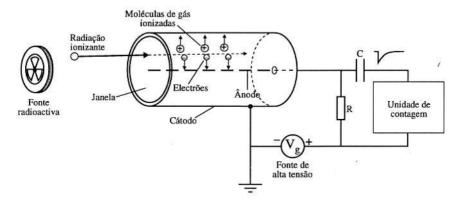
- Aquisição, Análise e Tratamento de Dados (Leitura 1);
- Radioactividade (Leitura 3);
- Funcionamento do Detector Geiger-Muller (Apêndice 5);
- Noção de ângulo sólido (TABELAS).

2.2 Equipamento necessário

Detector de Geiger-Muller, sistema de contagem de impulsos eléctricos, fonte radioactiva fraca de 137 Cs (~10⁴ Bq, $T_{1/2} \approx 30$ ano), e um osciloscópio (opcional).

2.3 Experiências sugeridas

1 Montagem de um sistema de contagem de radiação



Colocar o detector em situação de contagem, aplicando ao detector a ddp indicada sobre o mesmo e ligando o sistema de contagem. Uma fonte radioactiva é colocada em frente da janela do detector. Devem cumprir-se todas as medidas de segurança indicadas junto da fonte radioactiva. Se tiver disponível um osciloscópio e estiver familiarizado com o seu funcionamento, pode observar nele o sinal dado pelo detector.

2 Verificação da aplicabilidade da distribuição de Poisson

A probabilidade de ocorrência de uma contagem cujo o resultado é *n*, segundo a distribuição de Poisson é dada por

$$P(n,\mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

em que μ é a média da distribuição. Afastando o detector da fonte e usando um tempo de contagem breve é possível obter uma taxa de contagem média da ordem de 4 ou 5. Com base num grande número de contagens, N \geq 50, pode evidenciar-se o carácter poissoniano da distribuição a partir da comparação entre o gráfico de probabilidades experimentais e o gráfico teórico, ambos em função de n.

Calculando a média e o desvio padrão da amostra, podemos ainda verificar se o desvio padrão estatístico coincide com o previsto pela distribuição de Poisson, i.e., se $s = \sqrt{\mu}$, e discutir se a desintegração radioactiva obedece ou não a este tipo de distribuição. Para este efeito pode ser usado o teste do χ^2 .

3 Verificação da aplicabilidade da distribuição gaussiana e teste do x2

Construa-se uma amostra de $N \ge 50$ medidas com uma taxa de contagem da ordem de 200. Este valor obtém-se aproximando o detector em relação à fonte e com um tempo de contagem maior que na experiência anterior. Calculando a média < n > e o desvio

padrão s da amostra, podemos verificar que o desvio padrão estatístico coincide com o previsto pela distribuição de Poisson.

Traçando um histograma com intervalos de largura s ou de $\frac{s}{2}$ ilustra-se como os valores se distribuem em torno da média e verifica-se como os valores experimentais se comportam em relação a uma distribuição de Gauss. Segundo esta distribuição, a probabilidade de ocorrência de uma contagem x (ou n) é dada por

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se o fenómeno apresenta um comportamento gaussiano então os acontecimentos distribuem-se em torno da média da amostra \overline{x} de acordo com certos valores de probabilidade dados nas TABELAS. Por exemplo,

19.15% entre
$$[\overline{x}, \overline{x} + \frac{s}{2}]$$

68.27% entre $[\overline{x}$ -s, \overline{x} +s]
95.5% entre $[\overline{x}$ -2s, \overline{x} +2s]

A comparação entre o histograma das probabilidades experimentais f_i^{medido} e teóricas $f_i^{esperado}$ permite avaliar a hipótese formulada. É possível usando o teste do χ^2 , em que

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[f_i^{esperado} - f_i^{medido}]^2}{f_i^{esperado}}$$

determinar o nível de significância do resultado (consultar a tabela de χ^2 na secção das TABELAS).

4 Aplicação da distribuição t de Student

Considerando apenas os 10 primeiros valores da amostra anterior, podemos avaliar a validade de tomar o desvio padrão da amostra como $\sqrt{\mu}$. Para isso calcula-se o valor da variável $t=\frac{x-\mu}{s}$ e aplica-se o teste t de Student (consultar nas TABELAS os valores de confiança em função do número de valores da amostra).

5 Experiência * - Determinação da idade da fonte

Para uma dada medida de taxa de contagem, se medirmos o ângulo sólido segundo o qual o detector vê a fonte radioactiva e se for dada a eficiência do detector e a actividade inicial da fonte, pode estimar-se a idade da mesma.

2.4 Exercícios

2.1 Calcule o número de núcleos e a probabilidade por unidade de tempo de um núcleo se desintegrar numa amostra de 1 μg de 137 Césio. O período deste isótopo é 30 ano. O número de Avogadro existe nas TABELAS. Perante os valores encontrados discuta se este fenómeno pode ser previsto de acordo com a probabilidade de Poisson.

R: $n_{\text{núcleos}} = 4 \times 10^{15}$, $\lambda = 7.3 \times 10^{-10} \, \text{s}^{-1}$. O número de acontecimentos $n_{\text{núcleos}}$ é um número grande o que satisfaz, conjuntamente com o valor de λ , as condições daquele tipo de distribuição, isto é, a média de desintegrações por segundo $n\lambda$ é finita.

- 2.2 Uma determinada instalação para detecção de raios cósmicos regista em média 4 eventos em 30 segundos. Calcule a probabilidade de se observarem em 30 segundos
 - a) zero eventos
 - b) pelo menos 1 evento
 - c) apenas 1 evento
 - d) apenas 4 eventos

R: a)
$$P(0) = 0.0183$$
 b) $P(n \ge 1) = 1 - P(0) = 0.982$ c) $P(1) = 0.0733$ d) $P(4) = 0.1954$

2.3 Com um contador Geiger-Muller fez-se um conjunto de 20 medidas, de 1 minuto cada, do número de desintegrações de uma fonte radioactiva. Os resultados obtidos foram os seguintes

```
197, 216, 182, 167, 180, 223, 190, 188, 209, 195, 186, 208, 177, 195, 198, 194, 202, 201, 200, 205
```

- a) Calcule o valor médio <x>, o desvio padrão s e o desvio padrão da média s_m da amostra.
- Faça um histograma dos dados (sugestão: divida a amostra em classes de largura igual a s).
- c) Verifique que para esta amostra é aproximadamente válida a relação $s = \sqrt{\langle x \rangle}$. Que tipo de distribuição teórica prevê que se adapte a estes dados?
- d) Usando o teste do χ^2 verifique a seguinte hipótese a um nível de significância de 0.1: a amostra foi retirada de uma população com distribuição normal de valor médio μ =196 e desvio padrão $\sigma = \sqrt{\mu} = 14$.

R: a) <x>=195.7, s=13.5, s_m=3.0. c) Distribuição de Poisson. d) Dividindo a amostra em 6 intervalos de largura igual a 14 e centrados em 196 obtemos um χ^2 =0.465. A um nível de significância de 0.1 o valor limite do χ^2_o para 4 graus de liberdade é de 7.78>0.465, logo a hipótese é aceite.

2.4 Suponhamos que três experiências concorrentes tinham medido a vida média da partícula τ tendo chegado aos seguintes resultados

experiência 1 : τ =0.302 ± 0.007 ps experiência 2 : τ =0.28 ± 0.04 ps experiência 3 : τ =0.315 ± 0.009 ps

Calcule o valor médio dos resultados das três experiências, e o erro a ele associado. É lícito neste caso, fazer-se uma média simples dos resultados? Porquê?

R: $<\tau>=0.306\pm0.005$ ps; não deve ser feita a média simples pois trata-se de resultados de experiências diferentes e com erros que não são da mesma ordem de grandeza (a experiência 2 é menos precisa que as outras duas).

2.5 ☑ Considere o declínio radioactivo de uma fonte cuja actividade é medida em intervalos de 15 s. O número de contagens feitas em cada intervalo é indicado na tabela

t/s	1	15	30	45	60	75	90	105	10	135
								38		

- a) Determine a vida média da fonte a partir de um ajuste linear aplicado à lei do declínio radioactivo.
- b) Classifique a qualidade do ajuste a partir do valor de χ^2 reduzido que obtém.

R: a) $\tau = 111.1 \pm 0.1$ s b) O χ^2 reduzido vale 1.96, valor que é um pouco alto, podendo significar que a forma da curva de ajuste não é a melhor, podendo contudo ser aceitável.

2.6 As distribuições das notas nos anos lectivos de 1990/1991 e 1992/1993 de uma cadeira de Física Experimental encontram-se no quadro

Verifique se as distribuições das notas são compatíveis com distribuições normais, a um nível de significância de 0.05 e 0.001.

R: Não.

EXPERIÊNCIA 3

Osciloscópio, Medição de DDP, Tempos e Diferenças de Fase

O objectivo deste bloco é essencialmente a familiarização com o osciloscópio. Conhecer as múltiplas situações em que este instrumento se revela um auxiliar precioso na medição de diferenças de potencial (ddp), tempos, frequências e diferenças de fase (ddf). Comparam-se as medições de ddp feitas com o osciloscópio e as feitas com multímetros. O osciloscópio permite o estudo das principais características das ddp variáveis no tempo produzidas por geradores de sinais.

Uma ddp que varia no tempo de modo periódico é caracterizada por parâmetros como

V(t)	valor da ddp em cada instante				
V_{o}	amplitude máxima				
T	período				
f = 1/T	frequência				
$\omega = 2\pi f$	frequência angular				
ф	fase				
$V_{pp} = 2V_o$	amplitude de pico a pico				
	1 6 5116 5				

 $V_{ef} = \left[\frac{1}{T} \int_{0}^{T} V^2(t)dt\right]^{1/2}$ valor eficaz ou RMS (*Root Mean Square*). É o equivalente contínuo da ddp alterna que provocaria a mesma dissipação de energia numa resistência.

Entre muitos sinais possíveis, os mais usuais em circuitos eléctricos são os sinais sinusoidais,

$$V(t) = V_0 \operatorname{sen} (\omega t + \phi)$$

em que a ddp eficaz é dada por $V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = 0.707 V_0$.

A diferença de fase φ entre dois sinais sinusoidais x(t) e y(t) de igual frequência pode ser medida a partir da sua composição, produzindo no osciloscópio a figura de um elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos\phi = \sin^2\phi$$

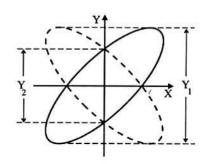
No caso de $\phi = 0^{\circ}$, $\phi = \pm 90^{\circ}$ e $\phi = 180^{\circ}$ a equação anterior assume formas particulares e se a=b a elipse transforma-se numa circunferência.

Para medir uma ddf φ arbitrária, deve fazer-se a medição das amplitudes Y_1 e Y_2 como indicado na figura. Para a elipse a cheio tem-se

$$|\phi| = \operatorname{sen}^{-1}(Y_2/Y_1)$$

enquanto que para a elipse a tracejado, alongada entre o 2° e 4° quadrantes, a ddf é dada por

$$|\phi| = 180^{\circ} - \text{sen}^{-1}(Y_2/Y_1)$$



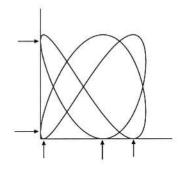
Quando se realiza a composição de dois sinais sinusoidais com frequências distintas,

$$x = A\cos(\omega_x + \phi_{0x})$$
 com $f_x = \omega_x/2\pi = 1/T_x$
 $y = B\cos(\omega_x + \phi_{0x})$ com $f_y = \omega_y/2\pi = 1/T_y$

obtemos as FIGURAS DE LISSAJOUS. Estas têm uma forma característica que de-

pende da razão entre as frequências dos sinais e do valor da diferença de fase inicial, $\Delta \varphi_0 = \varphi_{ox} - \varphi_{0y}$. A razão entre as frequências dos dois sinais é igual à razão entre o número de pontos de tangência ao eixo horizontal e vertical.

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{\text{n.° de arcos tangentes ao eixo horizontal}}{\text{n.° de arcos tangentes ao eixo vertical}}$$



3.1 Pesquisa proposta

- Observar ddp contínuas e alternas.
- 2 Medir diferenças de fase.
- 3 Medir relações entre frequências.
- 4 Medir ddp em circuitos resistivos simples.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

- O Osciloscópio (Apêndice 1);
- Multímetros (Apêndice 2);
- Fontes de Tensão e de Corrente Eléctrica (Apêndice 3);
- Primeiros parágrafos dos Circuitos Eléctricos Básicos (Leitura 4).

3.2 Equipamento necessário

Osciloscópio de dois canais de 20 MHz (OSC), multímetro digital, fonte de tensão contínua ou pilhas, dois geradores de sinais periódicos, resistências.

3.3 Experiências sugeridas

1 Regulação do ponto luminoso no ecrã do OSC

Verificar que todas as escalas estão na posição de calibradas (controlo *CAL* nos botões que seleccionam as escalas *TIME*/cm e V/cm). Ligar o OSC e obter no ecrã um traço contínuo de boa qualidade óptica usando o potenciómetro de *INTENS* e *FOCUS*. Se usar um tempo de varrimento grande (s/cm) pode observar-se em vez de uma linha um ponto a deslocar-se horizontalmente.

2 Medição da resistência interna do OSC

Com um ohmímetro digital pode medir-se a impedância de entrada seleccionando sucessivamente as entradas DC, AC e GD.

3 Medição de ddp

Com o modo *TRIGGER* seleccionado em AUTO e assegurando-se que se está no modo Y-T, podem medir-se as ddp aos terminais de pilhas ou de uma fonte de tensão contínua, escolhendo sucessivamente o comutador de entrada do OSC em DC, AC e GD. Se o OSC tiver a opção INVERSOR podemos estudar o seu efeito. A medição das mesmas ddp com um voltímetro digital nas escalas de valores máximos da ordem de 2 e 20 V permite confrontar as características destes dois medidores de ddp e discutir as diferenças e as analogias. Os valores medidos devem ser registados com o erro de leitura.

4 Funcionamento do trigger e medição de frequências

Com o *TRIGGER* no modo AUTO e usando o gerador de sinais para obter um sinal sinusoidal, pode observar o que sucede para cada posição do selector de entrada do OSC (DC, AC, GD), medir o período e calcular a frequência do sinal escolhido. Regule a frequência do sinal para um valor inferior a 1 kHz. O mesmo sinal deve ser observado com o OSC em modo *TRIGGER NORMAL*, que permite avaliar a acção do *LEVEL* e *SLOPE* +/-.

5 Características dos sinais de ddp variáveis no tempo

Observar no OSC sinais sinusoidais, triangulares e quadrados de frequências da ordem do kHz. Medir as respectivas amplitudes de pico a pico, máxima, períodos e frequências, usando o *trigger* no modo AUTO ou NORMAL. Comparar os valores das ddp com os medidos com o voltímetro digital. Registar os sinais, discutir os valores obtidos e estabelecer as relações matemáticas entre as ddp medidas com os dois aparelhos.

6 Ponta de prova

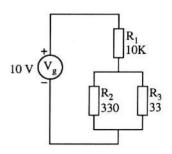
A ponta de prova é usada como atenuador de tensão, pois introduz uma resistência de 9 M Ω em série com a resistência de entrada do OSC. Se a ligarmos à entrada do OSC e observarimos por exemplo o sinal que é dado no OSC pela saída CAL 0.2 V (saída *TESTER* ou qualquer outro sinal de tensão), podemos registar a acção do comutador $\times 1$ e $\times 10$ da ponta de prova e confirmar se a resistência desta é o valor acima referido. O OSC deve ser utilizado no modo Y-T e com o *trigger* em modo AUTO.

7 Observação simultânea de dois sinais

Com o OSC em modo Y-T e DUAL, ligando duas saídas sinusoidais de um mesmo gerador de sinais às entradas Y1 e Y2 do OSC podem observar-se ambos os sinais nos modos TRIG I, TRIG II, ALT e CHOP. Medir a diferença de fase (ddf) entre ambos os sinais e estabelecer entre eles, se o gerador permitir, uma diferença de fase $\phi = 90^{\circ}$. O modo Y-X permite confirmar o valor da ddf. Regule a amplitude dos sinais de modo a obter quer uma circunferência quer uma elipse. Devem representar-se os sinais em modo Y-T e em modo Y-X.

8 Medição de ddp em circuitos resistivos

Regulando uma fonte de tensão para 10 V e aplicando esta ddp a um circuito do tipo da figura, montado numa base de contactos eléctricos, pode-se registar a ddp aos terminais de todas as resistências e discutir o valor obtido a partir da medição com o OSC e com um voltímetro digital. Este circuito também permite verificar as regras de associação de resistências.



9 Experiência * - Figuras de Lissajous e batimentos

Usando dois geradores de sinais periódicos e seleccionando dois sinais sinusoidais com as frequências f_1 e f_2 numa razão da ordem de 1/2 ou 2/3, obtêm-se figuras de Lissajous no OSC se seleccionarmos o modo Y-X. A partir delas confirma-se que é possível medir a frequência de um dos sinais sabendo o valor da do outro.

Usar dois sinais de ddp sinusoidal dados por geradores diferentes, $v_1(t) = A\cos\omega_1 t$ e $v_2(t) = A\cos\omega_2 t$, em que as frequências ω_1 e ω_2 não são muito diferentes, por exemplo numa razão de 5/4 ou 6/5. No modo *ADD* (adição de sinais) observam-se BATIMEN-TOS e confirmam-se as equações

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = A_{\text{mod}} \cos \omega_{med} t$$

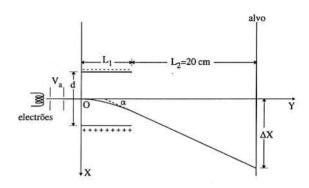
em que

O sinal final é modulado em amplitude. Esta situação é o caso mais simples da modulação porque envolve uma só frequência, ω_{mod} . Individualizar e representar a onda transportadora e a de sinal. Discutir a importância deste procedimento.

3.4 Exercícios

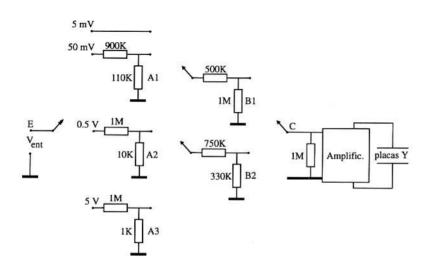
3.1 \square Considerando o esquema para o tubo de raios catódicos, estabeleça a relação entre a ddp V_r aplicada às placas e o deslocamento ΔX do ponto luminoso no ecrã. O potencial do ânodo é V_a =500 V, o comprimento das placas horizontais L_1 é 3 cm, a distân-

cia d entre elas é 0.7 cm e a distância L₂ ao alvo é de 20 cm. Confronte, se possível, estes valores com os dados no catálogo do OSC que usou no laboratório. O feixe de electrões entre as placas está sujeito a uma força constante e por isso descreve aí uma trajectória parabólica que passa a rectilínea quando sai dessa zona. Numa primeira aproximação considere que os electrões descrevem



sempre um movimento rectilíneo a partir do ponto O. Que erro se comete devido a esta simplificação?

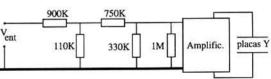
3.2 ✓ Com base no circuito do sistema de atenuadores na entrada do OSC, construído a partir de divisores resistivos, calcule a atenuação de A1, A2, A3, B1 e B2. Verifique



que em qualquer escala, o circuito de entrada do osciloscópio é aproximadamente equivalente a uma resistência de $1 \text{ M}\Omega$.

No esquema exemplifica-se o circuito equivalente quando se ligam em série os atenuadores A1 e B2.

R: A1 = 1/10, A2 = 1/100, A3 = 1/1000, B1 = 1/2, B2 = 1/4.



3.3 Considere a situação em que às placas de deflexão horizontal (eixo XX) se aplica uma tensão $V_h(t)$ correspondente à escala de 0.5 ms/cm e às placas de deflexão vertical (eixo YY) a tensão sinusoidal v(t)=2.0 sen(6283t) V. A ddp $V_h(t)$ é aplicada no instante t= t_o e nesse instante v(t) é crescente e tem o valor de 0 V.

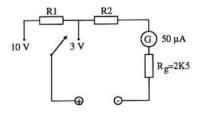
Faça um gráfico da figura que observaria no OSC, resultante da composição dos dois movimentos (sobre os eixos X e Y), indicando as escalas utilizadas.

Repita o gráfico quando a escala horizontal é de 5 ms/cm. Explique a necessidade de seleccionar as escalas de acordo com o sinal em observação.

Ainda no mesmo gráfico represente a figura que se obtém quando no instante t_0 , $v(t_0)=2$ V.

- 3.4 Na entrada horizontal (canal 2) do OSC aplica-se um ddp sinusoidal $v_1(t)$ =2 sen(6283t) V e na entrada vertical (canal 1) uma ddp também sinusoidal $v_2(t)$ =2 sen(6283t+ φ) V. Utilize a escala vertical de 1 V/cm em ambas as entradas e a escala horizontal de 0.5 ms/cm. Faça um gráfico da figura que se veria no ecrã como resultado da composição das duas ddp para diferenças de fase φ com valores 0, π /2 e π rad.
- 3.5 Considere duas ddp, $V_a = 5.0 \cos(1256t) \text{ V e } V_b = 2.0 \cos(1256t + \pi/2) \text{ V. Como}$ serão visualizadas num OSC em modo *Y-T* e em modo *X-Y* com escalas seleccionadas de 2 ms/cm e 2 V/cm.
- 3.6 Esquematize um circuito que lhe permita medir a resistência interna de uma fonte de tensão, sabendo que nominalmente esta tem um valor entre 10 e 100 Ω .
- 3.7 Com o galvanómetro da figura, pretende-se construir um voltímetro com escalas de 3 V e 10 V. A deflexão máxima ocorre para uma intensidade de corrente de 50 µA.
 - a) Quais são os valores convenientes para as resistências R1 e R2?
 - b) Na escala de 10 V qual será a resistência interna do voltímetro?
 - c) Será o voltímetro adequado para medir uma ddp aos terminais de uma resistência de 1 M Ω ? Justifique a sua opinião.

cia de 1 MΩ? Justifique a sua opinião. R: a) R2=57K5, R1=140K b) 200K c) Não, 80% da corrente passaria pelo voltímetro.



51

EXPERIÊNCIA 4

Circuitos Eléctricos Simples I

N os circuitos eléctricos resistivos, capacitivos e indutivos a relação entre a intensidade da corrente e a ddp é linear. Num circuito puramente resistivo a ddp em função da intensidade de corrente é dada por

$$v(t) = R i(t)$$

em que R é a resistência. A ddp aos terminais da resistência está em fase com a corrente que a percorre.

Num circuito com um condensador a ddp aos seus terminais está relacionada com a corrente que o percorre do seguinte modo

$$v(t) = \frac{1}{C} \left| i(t) dt \right|$$

em que C é a capacidade do condensador. A ddp está atrasada de $\pi/2$ em relação à corrente.

Num indutor a ddp aos seus terminais é dada pela derivada da corrente que o percorre

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

em que L é o valor da indutância. A ddp está adiantada em relação à corrente de $\pi/2$.

A análise destas relações conduz à formulação do conceito de impedância Z para os circuitos em que as correntes e ddp têm uma variação periódica sinusoidal. Tem-se assim para cada um dos componentes

$$Z_R = R$$
 $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ $Z_L = j\omega L$

em que j representa a unidade imaginária, $j = \sqrt{-1}$. Usando a representação complexa para sinais sinusoidais $v(t) = v_0 e^{j_\omega t + \phi}$, $i(t) = i_0 e^{j_\omega r + \phi}$, a lei de Ohm continua a verificarse, agora em termos de impedâncias

$$v(t) = Z i(t)$$

Nesta equação apenas tem significado físico a parte real (ou imaginária), e por isso, em termos de amplitudes tem-se

$$v_0 = |Z|i_0$$

A análise dos circuitos faz-se com base nas leis de Kirchhoff (lei dos nós e lei das malhas), no teorema de Thévenin e no princípio da sobreposição.

A associação de vários destes componentes lineares permite construir circuitos com objectivos precisos. Associando resistências com condensadores podem construir-se:

1 Integradores e diferenciadores de sinais consoante num circuito RC série se toma o sinal de saída aos terminais do condensador ou da resistência. As equações que descrevem estas acções são respectivamente

$$V_s(t) = \frac{1}{RC} \left[V_e(t) dt \right] = RC \frac{dV_e(t)}{dt}$$

2 Filtros de altas ou baixas frequências com uma associação RC. Em ambos os filtros a frequência de corte f_c é aquela em que se tem $V_s/V_e=1/\sqrt{2}=0.707$. Esta condição conduz a uma frequência de corte dada por $f_c=\frac{1}{2\pi RC}$. Os filtros também podem ser construídos com base em associações de resistências com indutores, circuitos RL ou de condensadores com indutores, circuitos LC.

3 Circuitos ressonantes a partir da associação de condensadores com indutores, devido ao facto destes componentes apresentarem desfasamentos opostos da ddp em relação à corrente. A frequência de ressonância f_{res} vem dada por $f_{res} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

4.1 Pesquisa proposta

- 1 Estudo de v(t) em função de i(t) em circuitos puramente resistivos. Associação de resistências e construção de divisores de tensão.
- 2 Estudo de v(t) em função de i(t) em circuitos capacitivos. Observação da diferença de fase entre ddp e corrente. Associação de capacidades. Construção de filtros RC de frequência e de circuitos diferenciadores e integradores de sinal com componentes RC.
- 3 Estudo de v(t) em função de i(t) em circuitos indutivos. Observação da diferença de fase entre ddp e corrente em circuitos RL e CL.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

- Circuitos Eléctricos Básicos (Leitura 4);
- Código de Resistências e Capacidades (TABELAS);
- Fontes de Tensão e de Corrente (Apêndice 3).

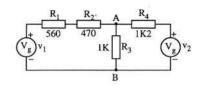
4.2 Equipamento necessário

Osciloscópio de 20 MHz, multímetro digital, fonte de tensão contínua, gerador de sinais (o gerador em uso pode apresentar uma dada resistência interna conforme o sinal escolhido), resistências, condensadores e um indutor ou um transformador em que o secundário é usado como indutor.

4.3 Experiências sugeridas

1 Relação ddp - corrente numa resistência e teorema da sobreposição

Com o circuito junto pode medir-se a ddp entre AB. Fazendo a medida com ambas as fontes ligadas e uma de cada vez, somando os valores parciais, demonstra-se a utilidade do teorema da sobreposição na resolução dos circuitos compostos de várias fontes de tensão ou de corrente. Pode iniciar-se o es-



tudo com ambas as ddp a 10 V e continuar com duas ddp v(t) = 6 sen (6280t) V em fase. Posteriormente usando a mesma amplitude em ambas as fontes mas desfasando-as de 90° e 180° . As medidas são feitas recorrendo a um osciloscópio. Se necessário, deve entrar em conta com a resistência interna das fontes na construção do circuito.

2 Relação ddp - corrente num condensador

Com um circuito análogo ao da figura, estuda-se ao osciloscópio a relação entre a corrente e a ddp no condensador quando por exemplo v(t) = 6 sen ωt e a frequência varia entre 1 kHz<f<5 kHz. A corrente é medida a partir da ddp na resistência.

 $\begin{array}{c|c} & & & \\ \hline & &$

O estudo deste circuito capacitivo pode ser feito a partir de uma tabela em que figure a frequência, a ddp aplicada, a ddp na

resistência, a diferença de fase entre i e V_C , a impedância experimental em função da frequência calculada a partir dos dados anteriores e a teórica calculada a partir dos valores nominais dos componentes ou dos valores medidos com um multímetro (alguns multímetros têm capacímetro incorporado).

Substitua-se a resistência de $100~\Omega$ por uma resistência de $1~k\Omega$. Que alteração se introduz na ddp nos dois componentes e na diferença de fase entre corrente e ddp no condensador? Para o circuito na sua totalidade qual a diferença de fase (ddf) entre a corrente e a ddp aplicada? A medição da ddf entre a corrente e a ddp no condensador é aconselhável e para tal, a medida da ddp em R e em C com o osciloscópio deve ser feita quando a ligação à massa se situa entre os dois componentes.

3 Medir capacidades

Um modo de estimar o valor de uma capacidade desconhecida é usar um circuito do tipo do antérior e determinar a impedância a partir da medida da corrente e da ddp no condensador para uma dada frequência desde que se verifique a condição $R \gg |Z_C|$, pois nesta situação a medida da ddp aos terminais da resistência permite calcular a corrente dado o valor de R.

Um outro método simples é o de, no circuito anterior, variar a frequência de modo que as amplitudes das ddp na resistência e no condensador sejam idêntiças. Nessa situação, a igualdade $R=\frac{1}{\omega C}$ permite calcular o valor da capacidade. Usando os dois métodos podemos aferir o valor nominal dado para a capacidade. As medidas realizadas devem ser afectadas dos respectivos erros. Discutir a aceitação ou não da discrepância com base nos critérios de rejeição de observações ou nos intervalos de confiança. Se não for conhecida, admita uma tolerância de 10% para o valor da capacidade.

4 Descarga do condensador

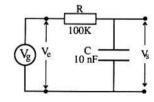
Dimensionando convenientemente um circuito RC podemos observar a descarga do condensador a partir da medida da ddp aos seus terminais pois: $V_C(t) = V_o e^{-\nu RC}$, quando o circuito é alimentado por uma ddp quadrada de 5 V de amplitude máxima e frequência da ordem de 1 kHz.

Compare-se e discuta-se o valor da constante RC nominal, com a medida com o osciloscópio a partir da leitura do intervalo de tempo necessário para que a ddp se reduza de 1/e. Porque se aconselha este intervalo de tempo? Para fazer as medições usam-se ambos os canais do OSC, o que permite a observação simultânea do sinal do gerador e do sinal aos terminais do condensador.

Quando se usam geradores de sinais não devemos esquecer que as saídas de sinais de tipos diferentes podem ter resistência de saída diversas e de valor não desprezável em relação à resistência de carga colocada no circuito.

5 Circuito integrador

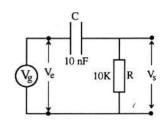
Considere-se o circuito da figura alimentado por uma ddp quadrada de 5 V de amplitude e 1 ms de período. Observe-se ao osciloscópio a ddp aos terminais do condensador e comparando-a com a do gerador pode individuar-se que tipo de operação este tipo de circuito executa. A representação na forma gráfica facilita a interpretação do que se «vê». É conveniente observar a acção deste circuito para outros tipos de sinal, por exemplo triangular e sinusoidal.



6 Filtros RC

Com o circuito RC exemplificado na figura, o estudo da amplitude da ddp aos terminais da resistência em função da frequência permite observar a acção de filtro de passa-alto, determinar a frequência de corte experimental e compará-la com o valor teórico.

O estudo da evolução da ddp aos terminais do condensador em função da frequência permite igualmente definir o comportamento de um outro tipo de filtro e compará-lo com o primeiro. Para este tipo de

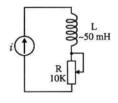


estudo sugere-se que use uma resistência de 100K. É aconselhável a representação gráfica de ambos os casos.

7 Experiência * - Relação ddp-corrente num indutor

Um circuito do tipo do esquema, em que $i=i_{max}$ sen ωt e $i_{max}=2$ mA permite estudar o comportamento do indutor. Neste estudo pode seguir-se uma metodologia idêntica à usada para estudar um condensador.

Observemos ao osciloscópio a amplitude e a fase do sinal no indutor em relação à alimentação quando se varia a frequência entre 1 kHz e 40 kHz. O que se passa aos terminais da resistência? Discuta o acordo entre a expe-



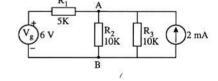
riência e o modelo matemático segundo o qual um indutor é um diferenciador de corrente.

8 Experiência * - Circuito ressonante LC

Montando um circuito com um condensador de ~10 nF em série com um indutor de ~50 mH e usando um osciloscópio para medir as ddp e ddf aos terminais do condensador e do indutor, podemos estudar o fenómeno da ressonância variando a frequência entre 2 e 5 kHz. Um miliamperímetro permite medir a intensidade da corrente e a ressonância é bem evidenciada num gráfico de i(f). O que se pode entender por ressonância? Qual a potência eléctrica dissipada neste circuito?

4.4 Exercícios

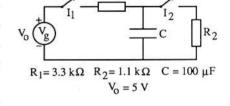
- 4.1 Considere o circuito da figura.
 - a) Usando o teorema da sobreposição esquematize os dois circuitos parciais que permitem calcular a ddp entre A e B



- b) Usando os esquemas anteriores quais serão as ddp V'_{AB}, V''_{AB} e a ddp final V_{AB}?
- c) Se medirmos a resistência R_2 com um voltímetro de resistência interna $100 \text{ k}\Omega$ e um amperímetro inserido em série no ramo de R_2 com uma resistência interna de 10Ω , qual é o erro na medição de R_2 ?

R: b)
$$V'_{AB} = 3 \text{ V}$$
, $V''_{AB} = 5 \text{ V}$, $V_{AB} = 8 \text{ V}$, c) $\pm 0.1\%$.

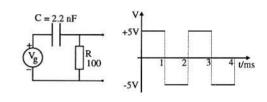
- **4.2** \square Suponha que no circuito da figura se fecha o interruptor I_1 , mantendo I_2 aberto, e que o condensador no instante inicial não está carregado.
 - a) Ao fim de quanto tempo a ddp às extremidades do condensador atinge o valor de 3 V?



- b) No instante calculado na alínea anterior, qual é a intensidade de corrente que percorre o circuito?
- c) Depois de esperar um intervalo de tempo suficientemente longo para se considerar que o condensador se encontra completamente carregado, fechou-se igualmente o interruptor I₂. Nesse instante qual é a intensidade de corrente que passa a percorrer R₂?
- d) Mantendo o circuito na configuração da alínea anterior, para que valor tenderá a ddp às extremidades do condensador?

R: a)
$$t = 0.3$$
 s, b) $i = 0.606$ mA, c) $i = 4.55$ mA, d) $V_C = V_{R2} = 1.25$ V

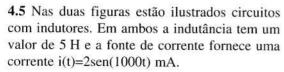
4.3 O gerador do circuito fornece uma onda quadrada $V_g(t)$ representada no gráfico. Admita que $V_R \ll V_C$. Desenhe a onda de saída $V_R(t)$ e explique o tipo de operação matemática que este circuito executa. Quais os valores máximos de ddp obtidos?



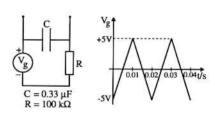
R: Derivada. O sinal será como um impulso de amplitude igual à ddp atingida no condensador durante um período. Uma vez que o condensador se carrega à ddp de entrada, o sinal de saída terá a amplitude máxima, isto é, 10 V.

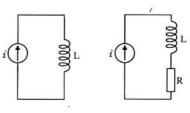
4.4 ☑ O gerador da figura fornece uma ddp triangular de acordo com o gráfico. Que operação matemática pode ser feita com este circuito? Qual o aspecto gráfico do sinal aos terminais do condensador C?

R: Integração, arcos de parábola positivos e negativos.



a) No circuito sem resistência qual a expressão da ddp aos terminais do indutor e qual o valor máximo da ddp?





b) No circuito da direita pode-se medir a ddp aos terminais de qualquer dos componentes usando um osciloscópio. Como o ligaria para controlar simultaneamente as ddp aos terminais de L e R? Para fazer uma medição de L que valores seriam os adequados para R?







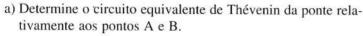
c) Dos três esquemas propostos qual representa a relação ddp-corrente num indutor? Tente explicar.

R: a)
$$V_{max} = 10 \text{ V}$$
, b) $R \le 5K$, c) B

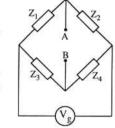
4.6 Um circuito RC série é percorrido por uma corrente sinusoidal de frequência f=100 Hz. Se for R=500 k Ω e C=1 nF poderemos usar um osciloscópio de 1 M Ω de impedância de entrada para medir a queda de tensão no condensador?

R: Neste caso não podemos usar este osciloscópio pois a impedância de entrada é da mesma ordem de grandeza da impedância do condensador $|Z_C| = 1.6 \text{ M}\Omega$.

4.7 No circuito da figura as impedâncias Z_1 , Z_2 , Z_3 e Z_4 encontram-se dispostas em ponte de Wheatstone.



b) Determine a condição de equilíbro da ponte, isto é, a relação a que têm que obedecer as impedâncias Z_i para que $V_A - V_B = 0$.



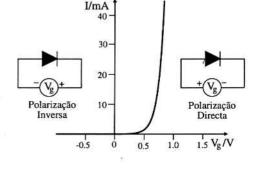
c) Suponha que dispunha de um gerador de tensão sinusoidal, e que pretendia usar a ponte para medir a capacidade C_x de um condensador, com o auxílio de um condensador de capacidade C conhecida e de duas resistências R_1 e R_y (esta de valor variável). De que forma disporia os vários elementos no circuito?



EXPERIÊNCIA 5

Circuitos Eléctricos Simples II

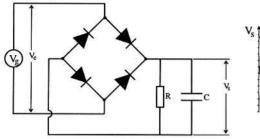
O díodo é um elemento em que não se verifica uma relação linear entre a ddp e a corrente. Quando polarizado directamente este componente deixa passar a corrente «quase» sem interferir. Quando polarizado de modo inverso a sua resistência é praticamente infinita. Na realidade, para conduzir o díodo necessita de uma ddp de polarização (cerca de 0.7 V para díodos de Si) e apresenta uma resistência de alguns ohm. A tensão de polarização, que depende do material da junção, varia com a temperatura. Para díodos de silício a variação é de aproximadamente -2.1mV/°C.

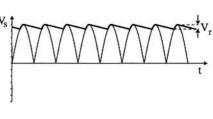


Num circuito simples de um díodo em série com uma resistência, quando aplicada uma ddp sinusoidal só um ciclo passa para o exterior: tem-se a rectificação de meia-onda.

 v_s t

A associação de quatro díodos de acordo com o esquema representado abaixo à esquerda, permite a passagem integral do sinal, é a rectificação de onda completa. A associação desta ponte de díodos com um condensador, cuja capacidade tenha um valor conveniente, permite transformar uma ddp alterna numa ddp quase contínua, como representado no esquema da direita.



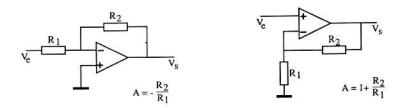


A queda da tensão de saída devida à descarga do condensador designa-se por ondulação residual e vale aproximadamente $V_r \approx V_0 \frac{T}{2RC}$, em que V_0 é a ddp máxima de saída e T é o período da ddp sinusoidal de entrada.

Um amplificador operacional (amp op) é um circuito integrado que apresenta um ganho diferencial elevado. O esquema que representa este componente (figura da esquerda) ilustra apenas os dois terminais de entrada e o terminal de saída. No amp op

ideal o ganho é infinito, $A_v = v_o/(v_+ - v_-) \approx \infty$, e as correntes de entrada são nulas, $i_+ = i_- \approx 0$. Na figura da direita identificam-se todas as ligações, incluindo as de polarização, para um amp op real.

Na configuração mais simples o amp op funciona como comparador com apenas duas ddp de saída, $+V_0$ e $-V_0$, conforme a diferença entre as entradas é positiva ou negativa. Em circuitos com realimentação, como exemplificado nos esquemas a seguir, o amp op funciona como um amplificador em que o ganho é controlado pelos componentes ligados no circuito.



O uso de amp op permite ainda executar operações elementares como por exemplo, somar sinais.

5.1 Pesquisa proposta

- 1 Estudo da relação entre ddp e corrente num díodo.
- 2 Rectificação de meia onda e total de ddp alternas.
- 3 Obtenção de ddp constante a partir de ddp alterna de tipo sinusoidal.
- 4 Construção de amplificadores de ganho controlável usando circuitos integrados.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

■ Circuitos Eléctricos Básicos a partir do parágrafo Díodos (Leitura 4).

5.2 Equipamento necessário

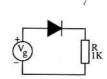
Osciloscópio de 20 MHz (OSC), multímetro, fonte de tensão contínua, gerador de sinais (o gerador em uso pode apresentar uma dada resistência interna conforme

o sinal escolhido), resistências e condensadores, díodo de silício e amplificador operacional tipo 741 ou equivalente.

5.3 Experiências sugeridas

1 Curva característica de um díodo

Com um circuito análogo ao da figura, alimentado com uma ddp de 0 a 3 V, estabelece-se a curva característica I(V) de um díodo de silício e de um díodo de arsenieto de gálio (emissor de luz vermelha). A ddp e a corrente no díodo medem-se com o multímetro digital. Porque razão se introduz uma resistência no circuito?



2 Rectificação de meia-onda

Descrever a acção de um díodo de Si quando o circuito anterior é alimentado com $v_g = 8 \text{ sen } \omega t \text{ V}$ de frequência 1 kHz, observando a ddp na resistência com o OSC em entrada DC. Qual a razão da escolha da entrada DC?

3 Alisamento

Montar um circuito análogo ao anterior mas em que a resistência é substituída por um condensador com uma capacidade de 33 nF. Observar a ddp aos terminais de C e medir a oscilação residual comparando-a com o valor esperado teoricamente (lembremo-nos que a resistência de entrada do osciloscópio é $1 \text{ M}\Omega$). O que se passa quando em paralelo com o condensador se coloca uma resistência de $100 \text{ k}\Omega$?

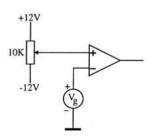
4 Rectificação de onda completa

Deve registar a acção de um circuito rectificador de onda completa quando é alimentado com uma tensão sinusoidal. Como funciona? Qual será uma das aplicações evidentes de um rectificador de onda completa associado a um condensador?

Podemos obter um efeito espectacular se em vez de uma ponte de quatro díodos de silício usarmos LEDs de cores diversas e sinais de frequência da ordem de alguns hertz.

5 Circuito comparador

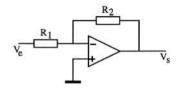
Polarize convenientemente o amp op. Com o circuito da figura observe no osciloscópio o sinal de saída e interprete a acção do circuito integrado quando à entrada inversora é aplicado um sinal $v_g = 4+5 \operatorname{sen} 2\pi ft V$, com uma frequência de 1 kHz.



6 Circuito amplificador

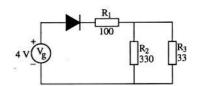
Monte o circuito da figura e polarize o amp op. Escolha o valor das resistências de modo a ter um ganho de -0.1.

Monte um outro circuito que proporcione um ganho de 11. O que significa o sinal menos no primeiro ganho?



5.4 Exercícios

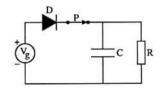
- 5.1 a) No circuito da figura o díodo é de silício e a tensão de funcionamento é 0.6 V. Qual a ddp aos terminais de R₁?
 - b) Que corrente percorre R₃?
 - c) Que potência é dissipada no díodo?





R: a) $V_{R1}=2.6 \text{ V}$, b) $i_3=24 \text{ mA}$, c) $P_D=67.7 \text{ mW}$

- **5.2** Considere o circuito rectificador de meia onda da figura, em que $R = 100 \text{ k}\Omega$, C = 100 nF, $v_g = 10 \text{ sen}(6280 \text{t}) \text{ V}$ e o díodo é ideal.
 - a) Descreva qual a função do díodo no circuito. Represente graficamente a tensão que se deve obseryar aos terminais da resistência em função do tempo.

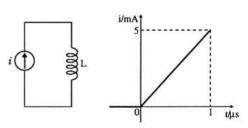


- b) Qual a amplitude da oscilação residual, fazendo as seguintes aproximações: i) a descarga do condensador através da resistência R dura um ciclo completo; ii) a corrente de descarga é constante e igual ao seu valor inicial.
- c) Supondo que o interruptor P é aberto no instante em que a ddp aos terminais do condensador atinge o máximo, qual será o tempo necessário para que se descarregue a 1% da ddp inicial?
- R: b) V=1 V, c) t=46 ms



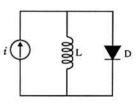
62

- 5.3 ☑ Considere o circuito da figura, em que a bobina L de indutância 1.50 H cria um campo magnético.
 - a) No momento em que se liga a fonte de corrente esta varia de acordo com o gráfico de i(t). Qual será a ddp aos terminais da bobina uma vez estabelecida a ligação.



b) A bobina é feita de um enrolamento metálico capaz de dissipar 5 W. O que sucederá à bobina quando se estabelece a ligação?

- c) Explique como um díodo de silício ligado em paralelo com a bobina, impede o acidente da alínea anterior.
- d) Porque razão o díodo só funciona durante o intervalo de tempo em que a corrente varia?



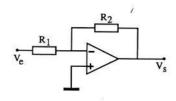
R: a) V_L =7.5 kV, b) queima-se porque teria de dissipar 18.8 W,

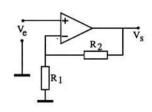
c) i_L=0.4 μA e P=0.12 μW, d) Se i não varia não se gera ddp e o díodo não se polariza.

5.4 Considere o circuito representado na figura.

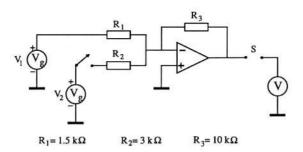
- a) Deduza a expressão de ganho do circuito. Qual é o ganho quando R₁=1K e R₂=4K7?
- b) Indique valores razoáveis para R₁ e R₂ de modo que o ganho seja −1/5. O que significa o sinal menos?
- c) Considere agora o segundo esquema. Descreva porque razão este tipo de circuito tem sempre um ganho igual ou superior a um.

R: a) $A_v = -4.7$, b) por exemplo $R_1 = 1$ K e $R_2 = 5$ K c) $A_v = (R_1 + R_2)/R_1 = R_2/R_1 + 1 > 1$.





5.5 ☐ Considere o circuito da figura

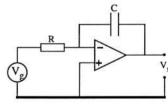


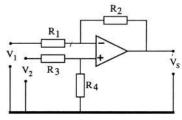
- a) Calcule o ganho do amplificador quando o interruptor se encontra aberto.
- b) Se V₁=2 V, qual será a ddp medida pelo voltímetro V?
- c) Fechando o interruptor e com V₂=1 V qual é a ddp medida pelo voltímetro?
- d) Que operação aritmética faz o amp op na situação da alínea anterior?
- e) Substituem-se V_1 e V_2 por fontes de tensão variável, em que $v_1(t)$ é uma ddp quadrada de 5 V e f=10 kHz e $v_2(t)$ uma ddp triangular de V_{max} =5 V e f=40 kHz. Represente esquematicamente a ddp de saída em função do tempo.

5.6 Mostre que para o circuito da figura a tensão de saída é proporcional ao integral da tensão de entrada.

R:
$$V_s = -\frac{1}{RC} \int V_g dt$$
.

5.7 Recorrendo ao teorema da sobreposição calcule o valor da tensão de saída V_s em função das tensões V_1 , V_2 e das resistências. Considere também o caso particular em que $\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$. Que operação desempenha neste caso?





R:
$$V_s = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_2 - \frac{R_2}{R_1} V_1 \text{ se } \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} \text{ então fica } V_s = \frac{R_2}{R_1} (V_2 - V_1).$$

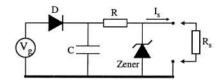
O circuito nesta configuração designa-se por amplificador diferencial.

- 5.8 a) Calcule o ganho do circuito em função da frequência.
 - b) Qual é o ganho do circuito para corrente contínua? Que conclusões tira quanto à função desempenhada pelo condensador C?

$$V_{\mathbb{R}}$$
 R_1
 C

R: a)
$$|A| = 1 + \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$$
 b) $|A| \to 1$ quando $\omega \to 0$.

5.9 Pretende-se usar um díodo de Zener à saída de uma fonte de alimentação para se obter uma tensão estabilizada a 5 V. O gerador fornece uma tensão $V_g=9 \, sen(2\pi ft) \, V \, com \, f=50 \, Hz.$



- a) Que valor deverá ter a resistência R, se a intensidade de corrente máxima que se pretende retirar da fonte for de 250 mA (admita que a queda de tensão no díodo D, quando este conduz é aproximadamente igual a 0.7 V).
- b) Calcule aproximadamente a potência dissipada na resistência R.
- c) Qual é a potência máxima fornecida pelo circuito ao exterior?

R: a) R \approx 13.2 Ω b) P=0.83 W c) P=1.25 W

Qual Será a Temperatura das Mãos?

C omo medir temperaturas sem recorrer ao clássico termómetro de mercúrio? Os transdutores eléctricos, isto é, sistemas que transformam sinais mecânicos, térmicos, magnéticos, musculares ou de qualquer outra natureza num sinal eléctrico revelam-se ideais para a construção de instrumentos de medida. Isto porque manusear sinais eléctricos é muito simples tendo em atenção os poderosos meios electrónicos que hoje existem. O uso de um simples multímetro ou osciloscópio permitirá a observação e a medição de um grande número de grandezas. O recurso a circuitos integrados como os amp op facilita a medição de pequenas variações e a implementação de sistemas de alarme e controlo.

Entre os possíveis transdutores de temperatura propomos a utilização da alteração da ddp de polarização dos díodos de silício e a variação da resistividade de certos materiais com a temperatura.

Os díodos têm uma tensão de polarização a partir da qual conduzem sem introduzir quase resistência no circuito. Esta tensão de polarização é uma característica do material de que é feito o díodo, sendo aproximadamente 0.7 V para díodos de silício. Este valor pode sofrer pequenas variações consoante o método de fabrico mas ele é essencialmente função da temperatura, apresentando para o díodo de silício um coeficiente $\Delta V/\Delta T \approx -2.1 \ mV/^{o}C$.

A resistência eléctrica R de um condutor filiforme é directamente proporcional ao seu comprimento L e inversamente proporcional à sua secção recta S: $R = \rho L/S$. A constante de proporcionalidade ρ designa-se por resistividade e depende das características materiais do condutor, mas não da sua forma geométrica. A resistividade depende também da temperatura a que o condutor se encontra. Para muitos condutores metálicos a resistividade (e consequentemente a resistência) apresenta uma variação com a temperatura do tipo

$$\rho(T) = \rho_0(1 + \alpha \Delta T + \beta \Delta T^2 + ...)$$

onde ρ_0 é a resistividade do condutor medida a uma temperatura T_0 , α e β são constantes e $\Delta T = T - T_0$. Para pequenos intervalos de temperatura, e dependendo do tipo de material, podemos escrever uma forma mais simples dada por

$$\rho(T) = \rho_0(1 + \alpha \Delta T)$$

onde a passa a ser designado por coeficiente de temperatura da resistividade.

Os termístores são componentes semicondutores cuja resistência é também função da temperatura, embora não de uma forma linear. Para os termístores de coeficiente

negativo de temperatura (NTC) a resistência pode ser aproximadamente determinada pela fórmula

$$R = R_0 e^{\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)}$$

em que β é uma constante positiva, R_0 é a resistência do termístor à temperatura T_0 e T é a temperatura absoluta em kelvin. A temperaturas «altas» esta fórmula pode ser simplificada

$$R = R_0 e^{\beta/T}$$

O coeficiente de temperatura da resistência α pode ser definido para um termístor a partir da expressão

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = -\frac{\beta}{T^2}$$

6.1 Pesquisa proposta

- 1 Construir um circuito transdutor que dê uma temperatura na forma de ddp.
- 2 Calibrar o sistema transdutor estabelecendo a relação V(T).
- 3 Uso de termómetros de resistência.
- 4 Construção de alarmes.
- 5 Linearização de gráficos.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

- Análise, Aquisição e Tratamento de Dados (Leitura 1);
- Circuitos Eléctricos Básicos, a partir do parágrafo sobre Díodos (Leitura 4);
- O que é Temperatura (Leitura 5).

6.2 Equipamento necessário

Termómetro de mercúrio, sistema térmico com temperatura variável entre 0 e 100°C, fonte de corrente construída com base num transístor e um díodo Zener, fonte de ddp contínua, multímetro digital, circuito integrado 741 ou equivalente, díodo de Si e de AsGa, um fio de tungsténio, resistências de vários valores e um termístor NTC (por exemplo PHILIPS ref. 2322640/90005).

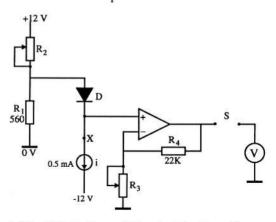
1 Montagem de um circuito electrónico para transdutor de temperatura

Nesta experiência usa-se um díodo como sensor de temperatura. Para que o díodo funcione correctamente, a corrente que o atravessa deve-se manter constante e para isso usa-se uma fonte de corrente. Esta obtém-se associando um díodo Zener a um transístor e polarizando-os de acordo com o esquema da figura.

O díodo Zener quando polarizado inversamente apresenta aos seus terminais uma ddp constante que é característica do díodo usado. Assim, os potenciais da base e do emissor do transístor ficam fixos porque $V_{\rm BE}$ =0.7 V com o transístor em condução. Ajustando a resistência do emissor obtém-se a corrente desejável e estabilizada.

O circuito seguinte constitui um transdutor de temperatura em que o sensor é, como já referimos, um díodo. No esquema a fonte de corrente anteriormente explicada é ligada a este circuito no ponto X.

A primeira operação a realizar é a calibração do termómetro, isto é, estabelecer a relação V(T). Para isso começamos por calibrar o sistema nos extremos da escala. A medida das temperaturas padrão é feita com um termómetro de mercúrio convencional ao qual o díodo deve ser ligado termicamente ¹. Ajustando-se R₂ é possível ter à saída uma ddp nula a 0°C (temperatura do gelo fundente). Colocando o díodo em contacto com água em ebulição (cerca de 100°C), faz-se o ajuste do ganho do amp op através das resistências R₃ e R₄ por forma a



obter um transdutor em que a sensibilidade é 10 mV/°C. A medição da ddp de saída faz-se usando um voltímetro digital. Deve escolher a escala de maior sensibilidade compatível com a medição.

2 Determinação da curva de calibração de um transdutor

Como não temos garantias que o nosso transdutor seja linear, torna-se necessário medir a ddp em função da temperatura para uma série de valores intermédios da escala. Fazendo variar a temperatura do banho entre 100 e 0°C obtém-se um conjunto de pontos V(T), a *curva de calibração*. O método dos mínimos quadrados deve ser usado para determinar os coeficientes da melhor recta que se ajusta aos pontos experimentais.

10K X 0.5 mA 10K -12 V

¹ O díodo deve ter as extremidades soldadas a fios eléctricos e a parte não isolada, díodos e contactos, deve ser protegida com uma cola «Araldite» ou verniz, por exemplo.

Discuta se os desvios observados entre os valores experimentais e os valores ajustados têm um carácter puramente estatístico, ou se também têm um carácter sistemático.

Compare, usando o teste de χ^2 , os dois modelos estudados para descrever a variação da resistência com a temperatura: modelo linear para condutores e modelo exponencial para termístores. (Note que com I constante, a resistência R é inversamente proporcional à ddp).

Qual é o erro máximo que se obtém com este termómetro?

3 Circuito comparador como sistema de alarme

À saída do circuito anterior pode juntar-se um comparador que forneça um sinal que polarize um LED. O circuito pode ser concebido por forma a assinalar a situação em que a temperatura medida no díodo ultrapassa a temperatura média das mãos, valor da ordem dos 34°C.

4 Termómetros de resistência

O termístor NTC, o fio de tungsténio e o termómetro de mercúrio são colocados, acoplados termicamente, dentro do vaso com água e gelo. Após ter-se atingido a temperatura de equilíbrio entre a água e o gelo (ou seja 0°C) é medido o valor da resistência do termístor e do fio de tungsténio com o ohmímetro digital. Inicia-se então o aquecimento do conjunto, e mede-se com o ohmímetro digital os valores das resistências a várias temperaturas.

Deverá ter-se em atenção que o valor máximo suportado por algumas NTC é inferior a 100°C e deve ser respeitado!

Com os dados experimentais são construídos dois gráficos, um para a resistência de tungsténio, e outro para a NTC, aos quais se podem ajustar respectivamente as expressões

$$R(T) = R_0(1 + \alpha \Delta T)$$
 e $R = R_0 e^{\beta/T}$

Podem discutir-se os problemas de linearização gráfica de funções não lineares como é o caso da exponencial, o valor dos parâmetros e os erros com que estes são determinados.

6.4 Exercícios

- **6.1** Considerando a figura apresentada na experiência 1 calcule o valor de R_2 de modo a que a tensão no cátodo do díodo D_1 seja 642 mV. Considere que para 20°C a tensão ânodo/cátodo é de 600 mV. Calcule R_3 de modo a ter uma sensibilidade de 10 mV/°C quando R_4 =33 k Ω .
- **6.2** Uma lâmpada de filamento de tungsténio apresenta uma resistência eléctrica $R_o = 65 \Omega$, quando medida à temperatura ambiente (20°C). Sabendo que em condições

- ?
- normais de funcionamento com a tensão alterna da rede de 220 V a lâmpada dissipa por efeito de Joule 60 W, estime a temperatura atingida pelo filamento. O coeficiente de temperatura da resistividade do tungsténio é $\alpha = 0.0045\,^{\circ}C^{-1}$.
- ?

R: $T = 1177 \,{}^{\circ}\text{C}$.

6.3 Um condutor de cobre apresenta uma resistência $R = 0.50 \Omega$ quando medida a 20°C. Sabendo que o coeficiente de temperatura é $\alpha = 0.0038$ °C⁻¹, determine o valor da resistência quando medida a 100°C.

R: 0.65Ω .

6.4 • Um transdutor de comprimento é formado por um fio de diâmetro constante, com contactos eléctricos nas duas extremidades e ao qual se ligou um cursor que permite um contacto eléctrico nos pontos intermédios. Pelas suas características, a resistência eléctrica do fio é directamente proporcional ao seu comprimento. Pretende-se construir um circuito amplificador de forma a medir num voltímetro digital uma ddp, que em mV seja numericamente igual ao valor do comprimento a medir.

Admita que o fio transdutor apresenta um comprimento total de 110 cm e uma resistência eléctrica igual a $5.5\,\Omega$. O circuito transdutor deverá ser alimentado por uma ddp de 12 V. Considere ainda que o «zero» da escala de comprimento se encontra a 5 cm do fim do fio. No circuito de amplificação deverá constar um ajuste do zero da escala do voltímetro (i.e. quando o cursor se encontra na posição «zero» da escala de comprimentos, deverá ler-se 0 V no voltímetro).

6.5 Para medir a intensidade de um feixe de raios X construiu-se um transdutor semelhante ao detector Geiger. Este é formado por um tubo cilíndrico em cujo eixo existe um filamento.

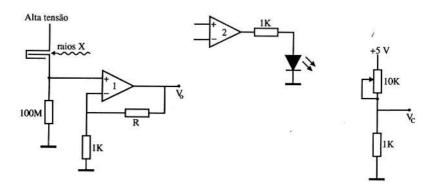
Entre a parede do tubo e o filamento estabelece-se uma elevada ddp, o transdutor e electrónica associada estão representados na figura.

O feixe de raios X atravessa o transdutor paralelamente ao seu eixo, sem incidir nas paredes, e interactua com moléculas do gás que enche o tubo, formando iões positivos e electrões que ao se deslocarem sob a acção do campo eléctrico, originam uma corrente eléctrica. O feixe é suficientemente intenso para que esta corrente se possa considerar contínua.

- O feixe dá origem à produção de 10^{10} electrões por segundo ($q_e = -1.6 \times 10^{-19}$ C).
- a) Determine a corrente que atravessa a resistência de $100 \text{ M}\Omega$ e a tensão aplicada à entrada não-inversora do operacional (considere o operacional como ideal).
- b) Calcule o valor da resistência R para que a tensão à saída do amplificador seja de 1V.
- c) Exprima a sensibilidade do circuito completo em Volt por nA.
- d) Pretende-se associar à saída do circuito anterior um comparador ligado a um díodo emissor de luz (figura), por forma que se acenda uma luz de alarme quando o número de electrões produzidos exceder o valor de 2.5×10¹⁰. A tensão de com-

paração $V_{\rm c}$ deve ser fornecida pelo divisor de tensão esquematizado à direita da figura. Faça o esquema do circuito completo explicando sumariamente o seu funcionamento.

e) Diga qual o valor de R' adequado para se atingir o objectivo proposto em d).



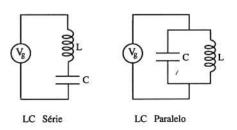
- R: a) I = 1.6 nA, V = 0.16 V
- b) R = 5K3
- c) 1/1.6
- d) Ligar o ponto a $V_{\rm o}$ à entrada + do amp op 2 e o ponto a $V_{\rm c}$ à entrada inversora do mesmo amp op.

EXPERIÊNCIA 7

Vamos Ouvir Rádio!

O facto dos indutores introduzirem uma diferença de fase entre a corrente e a ddp que é simétrica da que é introduzida pelos condensadores, permite construir circuitos ressonantes. Os circuitos LC série ou paralelo têm aplicações que exploram este comportamento.

Usando as representações complexas, as impedâncias do indutor e do con-



densador são respectivamente dadas por $Z_L = j\omega L$ e $Z_C = -j/\omega C$. Assim, a impedância complexa de um circuito LC série é dada por

$$Z_{LC} = j\omega L - \frac{j}{\omega C}$$

e do circuito LC paralelo por

$$Z_{LC} = \frac{j}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}$$

Em qualquer dos casos a frequência de ressonância é igual a

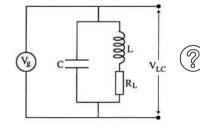
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
 ou $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

No caso do circuito LC série $Z_{LC} \rightarrow 0$ quando $\omega \rightarrow \omega_0$, e no caso do circuito LC paralelo $Z_{LC} \rightarrow \infty$ quando $\omega \rightarrow \omega_0$.

A impedância total de um circuito RLC é $Z = R + Z_{LC}$.

Num circuito simples LC paralelo ao aplicarmos uma ddp V_g obter-se-ia para a frequência de ressonância f_0 que $V_{LC} \rightarrow V_g$. Na realidade isto não sucede porque o indutor possui sempre uma pequena resistência R_L . A figura dá uma representação realística do indutor.

A resistência do indutor impede que o valor de |Z_{LC}| se torne infinito, desta forma V_{LC} nunca atinge o valor V_g. Se representarmos a razão da ddp de saída pela de entrada V_{LC}/V_g em função da frequência f obtém-se um

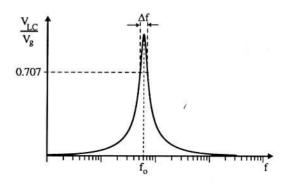


71

entrada V_{LC}/V_g em função da frequência f obtém-se uma curva com um máximo para a frequência de ressonância $f = f_0$.

Os circuitos LC série estudam-se de modo análogo aos LC paralelo. Devido ao seu comportamento em função da frequência estes circuitos são usados como filtros de passa banda de frequência, isto é, permitem sintonizar estreitas faixas de frequência, cuja sensibilidade de selecção é dada pelo factor de qualidade Q.

Sejam f_1 e f_2 as frequências para as quais se tem $V_{LC}/V_g = 1/\sqrt{2}$. Define-se factor de qualidade Q, como $Q = f_0/\Delta f = f_0/(f_2 - f_1)$ em que $\Delta f = f_2 - f_1$ é a largura da curva. O factor de



qualidade é assim uma medida relativa da largura da curva. Quanto mais elevado é o valor do Q mais "apertada" é a curva, logo mais selectivo é o filtro. No filtro R-LC paralelo tem-se Q = ω_0 RC e para o filtro RLC série Q = ω_0 $\frac{L}{R}$.

7.1 Pesquisa proposta

- 1 Obtenção de curvas de ressonâncias.
- 2 Determinação do factor de qualidade Q de filtros de passa banda.
- 3 Construção de um receptor de rádio simples.
- 4 Estudo de caos com circuitos simples.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

- Ondas (Leitura 6);
- Circuitos Eléctricos Básicos (Leitura 4);
- Bandas de Radiofrequência (TABELAS).

7.2 Equipamento necessário

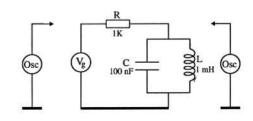
Um gerador de sinais sinusoidais, um osciloscópio, componentes várias (resistências, condensadores e indutor). Para o rádio: fio para fazer a bobina e uma ferrite, condensador de capacidade variável, díodo de Ge, resistências, condensadores, um amp op e um par de auscultadores.

7.3 Experiências sugeridas

1 Curva de ressonância do circuito LC paralelo

Na figura é proposta uma configuração em que uma resistência de carga R se encontra em série com um circuito LC paralelo. Propõe-se a obtenção da curva de ressonância com o osciloscópio.

Para se obter V_{LC}/V_g em função da frequência f aconselha-se o uso da ponta de prova do canal 1 para medir a



ddp à saída do gerador de sinais e a ponta de prova do canal 2 colocada de forma a medir a ddp entre a entrada do circuito LC e a massa. Variando a frequência do gerador medese no osciloscópio os valores máximos de V_{LC} , V_g , e o período do sinal. Deve escolherse um número de medições suficientemente grande para que a curva se apresente bem definida. Os intervalos em frequência entre duas medições consecutivas não necessitam ter sempre a mesma largura, sendo conveniente serem mais apertados em torno do máximo.

2 Factor de qualidade do filtro LC paralelo

O circuito da experiência anterior pode ser usado como um filtro passa-banda. Para avaliar da sua sensibilidade deve determinar-se experimentalmente o factor Q de qualidade do circuito e comparar com o valor teórico previsto $2\pi f_0 RC$.

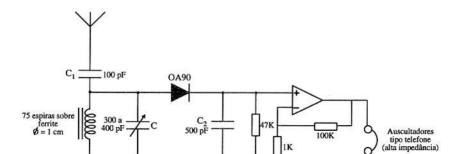
Se não coincidirem, qual pode ser a razão da diferença?

3 Curva de ressonância do circuito LC série

Para o circuito LC série pode ser feito um estudo análogo ao do circuito LC paralelo já realizado na primeira experiência. Quais as diferenças de comportamento? Qual a sensibilidade deste filtro? O factor de qualidade experimental concorda com o teórico $2\pi f_0 L/R$?

4 Um circuito de rádio simples

A experiência consiste na montagem de um circuito muito simples de rádio. O circuito proposto na figura pode dividir-se em quatro blocos básicos: antena, circuito de sintonização, circuito de desmodulação e amplificação.

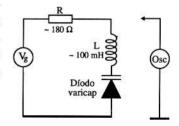


No bloco de sintonização reconhece-se o circuito LC paralelo da experiência 1, mas agora dotado de um condensador de capacidade variável que permite escolher a frequência de ressonância. Este circuito é alimentado pelas correntes induzidas na antena pelas ondas electromagnéticas emitidas pela estação que pretendemos sintonizar. No caso de estarmos num local em que existem emissões de rádio muito potentes, poderemos usar como antena um pedaço de fio de 1 ou 2 m de comprimento. Caso contrário é aconselhável usar uma antena de maior comprimento. A ligação do ponto de massa do circuito sintonizado à terra melhora em alguns casos as condições de recepção.

O acoplamento entre a antena e o circuito sintonizado LC pode ser feito através de um condensador C_1 de pequena capacidade (10-100 nF). Este acoplamento evita o aparecimento de uma capacidade parasita em paralelo com o circuito de sintonização (introduzida pelo circuito antena-terra), o que reduziria a selectividade do aparelho. Por outro lado desta forma também se isola a antena de quaisquer componentes contínuas da fonte de alimentação. Uma vez seleccionada a frequência da onda portadora de radiofrequência (RF) com o circuito LC, é necessário desmodular a onda a fim de retirar a componente de audiofrequência. A desmodulação da onda está a cargo do díodo que detecta a onda e de um condensador C_2 que filtra a componente de RF. O sinal audio é então amplificado, e a escuta pode ser feita com um par de auscultadores.

5 Experiência ** - O caos em física 1

Um circuito RLC pode funcionar como oscilador anarmónico caótico na variável ddp se no circuito existir um componente de comportamento não linear. Este componente pode ser um condensador. Se usarmos um díodo varicap, a capacidade que este apresenta é função da ddp aplicada de acordo com



$$C(V) = \frac{C_o}{(1+V/\varphi)^{\gamma}}$$

em que ϕ e γ são parâmetros característicos do díodo. Neste caso o sistema de equações que rege o comportamento do circuito é

$$L \frac{di}{dt} + iR + v_D = V(t)$$

$$C \frac{dv_D}{dt} = i \text{ se o díodo não conduz}$$
0 se o díodo conduz

em que i é a corrente no circuito e $v(t) = v_o \text{sen} 2\pi f t$, f a frequência de ressonância, v_D ddp no díodo e C a capacidade do díodo.

¹ Para saber mais sobre Sistemas Dinâmicos e Caos consultar os artigos originais de M. J. Feigenbaum publicados no J. Stat. Phys. 19 (1978)25 e J. Stat. Phys. 21 (1979)665 e o artigo relacionado com o trabalho proposto *Period doubling and chaotic behaviour in a driven anharmonic oscillator*, P. Linsay Phys. Rev. Lett. 47 (1981)1349.

Um circuito do tipo do representado no esquema, em que o gerador fornece uma ddp sinusoidal regulável até 2 MHz e em que a tensão varia de forma contínua entre 0 e 10 V permite estudar o comportamento caótico. Começa-se por ajustar o gerador para a frequência de ressonância do circuito com uma ddp da ordem de 100 mV.

Quando a amplitude do sinal de entrada é pequena, o sinal à saída é atenuado mas tem a mesma frequência do de entrada. À medida que se for aumentando a amplitude da entrada, o sinal de saída começa por apresentar duas componentes com frequências e amplitudes diversas, e sucessivamente quatro, oito até que atinge uma forma complexa que pode conduzir a um comportamento caótico. Toda a análise deste circuito pode ser feita com um osciloscópio em modo Y-T e Y-X.

Registando a amplitude dos sinais nos pontos de bifurcação, pode observar-se a partir de certa altura se a relação entre amplitudes sucessivas

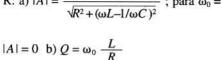
$$\frac{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}{\Lambda_{n+2} - \Lambda_{n+1}} \approx \delta$$

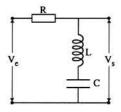
é válida. Podendo determinar-se a ordem da «constante universal» δ , cujo valor é 4.6692016.

7.4 Exercícios

- 7.1 Mostrar que o factor Q para o circuito LC paralelo é dado por $Q = \omega_0 RC$.
- 7.2 a) Calcule a atenuação | A | = |V_s/V_e| do filtro RCL da figura. Para que frequência se obtém a atenuação mínima?
 b) Calcule o factor de qualidade O do filtro.

R: a)
$$|A| = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$
; para $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ tem-se



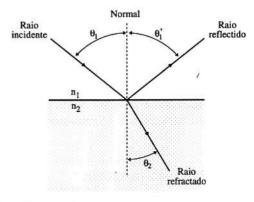




EXPERIÊNCIA 8

Observação ao Longe e ao Perto

O comportamento de um grande número de sistemas ópticos, que podem ser estudados com base na óptica geométrica, é regido por equações bastante simples. Quando um raio luminoso incide numa superfície de separação entre dois meios de índices de refracção distintos n_1 e n_2 (na figura $n_2 > n_1$) pode sofrer reflexão e/ou refracção. Todos os raios se encontram no mesmo plano e os ângulos medidos em relação à normal obedecem à lei da reflexão: $\theta_1 = \theta'_1$ e à lei da refracção: $n_1 sen \theta_1 = n_2 sen \theta_2$.

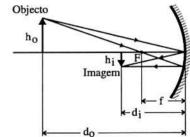


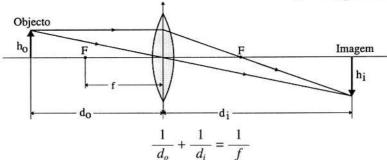
A reflexão com espelhos esféricos rege-se pela equação

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$

em que d_o é a distância objecto, d_i é a distância imagem e f a distância focal.

Para lentes delgadas convergentes ou divergentes tem-se uma equação análoga





Não se deve esquecer que as distâncias são positivas ou negativas conforme as convenções usadas quer para os espelhos quer para as lentes.

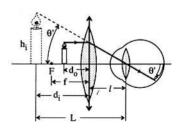
A potência de uma lente é o inverso da sua distância focal em metro e a unidade de potência, em óptica fisiológica, é a dioptria. A ampliação transversal de um espelho ou de uma lente é dada por

$$M_{\rm T} = \frac{\text{altura da imagem (h_i)}}{\text{altura do objecto (h_o)}} = \pm \frac{d_i}{d_o}$$

A ampliação angular de uma lente delgada é dada por

$$M = \frac{\theta'}{\theta} = \left(1 - \frac{d_i}{f}\right) \frac{N}{L}$$

N é a distância de visão mínima, L a distância imagem-olho e θ o ângulo segundo o qual se vê o objecto sem o auxílio da lente. Esta expressão toma aspectos particulares para o caso do telescópio e do microscópio.



8.1 Pesquisa proposta

- 1 Estudar a formação de imagens dadas por espelhos e lentes.
- 2 Determinação de distâncias focais e da ampliação transversal e angular.
- 3 Construção de protótipos de microscópio e telescópio, e determinação das suas características.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

Óptica Geométrica (Leitura 7).

8.2 Equipamento necessário

Banca de óptica, fonte de luz branca ou laser, diafragmas, espelhos côncavos e convexos, prismas, lentes delgadas convergentes e divergentes, objectos luminosos, alvos, escalas graduadas, transferidor, nível de bolha.

8.3 Experiências sugeridas

Experiência 0 – Estudo do comportamento óptico de espelhos planos e curvos, prismas e filtros

Recorrendo a uma fonte de luz ou a um laser associados a um diafragma com 3 ou mais fendas gera-se um sistema de raios paralelos que permite o estudo da reflexão, refracção, reflexão total, determinação directa do índice de refracção de meios transparentes. No caso dos espelhos curvos podem determinar-se as distâncias focais e os raios de curvatura. A combinação de filtros permite o estudo da noção de cor.

O registo das observações faz-se sobre folhas de papel onde se marca o trajecto dos raios luminosos.

1 Determinação da distância focal das lentes

Na banca de óptica, bem nivelada, coloca-se a lente e obtém-se a imagem de um objecto convenientemente colocado em relação à lente. Para além deste processo directo pode seguir-se o método de Bessel, no qual se recorre à formação de duas imagens no mesmo ponto movendo a lente em relação ao objecto, que se mantém fixo. Neste caso a potência é dada por $P = 4 d/(d^2 - \varepsilon^2)$ em que ε é a distância entre as duas posições da lente e d a distância objecto-imagem.

A potência (ou distância focal) das lentes divergentes P_d é obtida a partir da associação destas com lentes convergentes de potência conhecida P_c . Para uma associação de lentes coladas tem-se $P_d = P_{ass} - P_c$, P_{ass} é a potência da associação de lentes.

No caso de as lentes estarem separadas

$$P_{d} = \frac{1}{d_{1}} - \frac{P_{c}d_{2} - 1}{d_{2} - d(P_{c}d_{2} - 1)}$$

em que d é a distância entre as duas lentes, d_1 a distância do objecto à lente divergente, d_2 a distância da lente convergente à imagem final e P_c a potência da lente convergente.

2 Construção de um microscópio

Um modo simples de construir um microscópio composto é usar duas lentes convergentes de distâncias focais pequenas (entre 0.03 e 0.15 m), montadas numa banca de óptica de tal forma que a distância entre elas permita a formação de uma imagem ampliada do objecto.

O objecto a ver deve ser colocado para além do foco da lente mais convergente mas muito vizinho deste. Com este cuidado observar patas ou asas de mosca, ou qualquer outro objecto de pequenas dimensões. Determinar a ampliação e comparar com o valor previsto teoricamente.

Explicar a acção do olho como transdutor de visão.

3 Construção de um telescópio

Pode montar-se um protótipo de telescópio recorrendo simplesmente a uma lente convergente fraca (objectiva de $f \approx 0.50$ m) e uma fortemente convergente (ocular $f \approx 0.05$ m), dispostas na banca de óptica de modo a permitir a visualização de objectos longínquos, como janelas, antenas parabólicas, etc.

Explicar a escolha proposta para as lentes. Estudar a ampliação angular utilizando, se disponível uma escala graduada e iluminada. Comparar o valor obtido com o previsto teoricamente. Qual é o papel do olho humano?

Construção de um telescópio de refracção capaz de dar uma imagem direita. Estudar a acção de uma terceira lente convergente de modo a tornar o telescópio mais curto.

8.4 Exercícios

8.1 Suponhamos que duas raparigas usam óculos, uma devido a miopia e outra a vista cansada. Em caso de piquenique num prado qual dos óculos pode servir para atear uma fogueira usando a luz do Sol?

R: Os de vista cansada. É uma lente convergente.

8.2 Uma lente divergente pode ser usada como lupa? Justifique com um esquema. R: Não.

8.3 De dois telescópios de refracção que diferem simplesmente no comprimento, qual possui maior ampliação angular? Porquê?

R: A ampliação é igual porque depende apenas da razão entre as distâncias focais.

8.4 Como funciona um projector de diapositivos?

8.5 Pensa-se que as imagens virtuais são menos importantes que as reais, o que não corresponde à realidade. Dos seguintes instrumentos diga quais são os que dão imagens virtuais: projector de diapositivos, máquina fotográfica, lupa, lentes de contacto, microscópio, telescópio astronómico, binóculos?

R: lupa, microscópio, telescópio e binóculos.

8.6 Z Calcule o índice de refração de um prisma de vidro e o erro estatístico que o afecta, sabendo que um raio luminoso ao passar do ar $(n_{ar} = 1.000)$ para o vidro sofre uma refração. O ângulo de incidência no ar é $\theta_1 = 61\pm2^{\circ}$ e o de refração é $\theta_2 = 36\pm1^{\circ}$. R: a) $n_{vidro} = 1.5\pm0.1$

8.7 Um raio de luz incide numa face do diamante (n_d=2.42), é refractado no seu interior e atinge uma das faces opostas com um ângulo de incidência de 28°.

- a) Com o diamante rodeado de ar, diga se o raio é parcialmente ou totalmente reflectido (este último caso encontra-se exemplificado na figura).
- b) Responda à mesma questão para um diamante mergulhado em água (n_{água}=1.33).
- c) Com base nos resultados anteriores diga justificando, em qual dos meios o diamante brilha mais, ar ou água.

Raio incidente

Ângulo crítico

Ar

Diamante

R: a) É totalmente reflectido. b) Não é totalmente reflectido. c) Brilha mais no ar porque é onde um maior número de raios é totalmente reflectido.

EXPERIÊNCIA 9

Célula Fotovoltaica como Conversor de Energia Solar em Energia Eléctrica

N uma célula fotovoltaica obtém-se energia eléctrica iluminando a zona sensível da célula com radiação de comprimento de onda (cdo) adequado. A relação $I_C(V_C)$, em que I_C é a corrente eléctrica que atravessa a célula e V_C a diferença de potencial aos seus terminais, permite determinar em que condições a célula pode fornecer potência. Esta relação, também designada característica da célula fotovoltaica, varia com as condições de iluminação da célula e pode ser determinada construindo um circuito que permita simultaneamente medir as duas grandezas I_C e V_C .

9.1 Pesquisa proposta

- 1 Estudo do efeito fotovoltaico.
- 2 Cálculo da potência eléctrica de uma célula fotovoltaica.

A prossecução desta pesquisa implica o estudo de

Células Fotovoltaicas (Leitura 8).

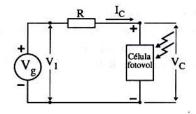
9.2 Equipamento necessário

Uma célula fotovoltaica p-n de silício, dois multímetros digitais, uma fonte de tensão contínua e uma resistência de 100Ω .

9.3 Experiências sugeridas

1 Determinação da curva característica da célula fotovoltaica

Para determinar a curva característica montar o circuito da figura. A resistência R representa a resistência de carga da célula e deve ter um valor tal que a corrente I_C não exceda o limite máximo permitido para a célula em questão (R $\approx 100~\Omega)$. A corrente I_C mede-se com um amperímetro digital introduzido no ramo da célula e aos terminais desta deve ler-se a ddp V_C com um voltímetro digital.



Representa-se na forma gráfica a característica $I_C(V_C)$ para uma célula fotovoltaica fazendo variar a ddp aplicada ao circuito, V_1 entre -8~V~e~+2~V. Deve ter cuidado e atenção com os sinais da ddp e o sentido da corrente medidos pelos respectivos multímetros. Considerar as seguintes situações:

- sem iluminação,
- iluminada por uma lâmpada de candeeiro,
- se possível varie o cdo da radiação, por exemplo interpondo filtros adequados.

2 Cálculo da potência de uma célula fotovoltaica

Com a convenção de sinais indicada no circuito anterior, a potência fornecida pela célula pode ser calculada pelo produto $-V_CI_C$. Usando os valores determinados na experiência anterior, calcula-se a potência em função de V_C ou I_C para a situação da célula iluminada

3 Célula como fonte de corrente

Determinar a impedância de saída para a qual a potência fornecida é máxima e discutir se este tipo de célula pode ser considerada como uma fonte de corrente.

9.4 Exercícios

- 9.1 Se a potência solar média recebida ao nível do solo disponível para conversão em energia eléctrica for da ordem de 1000 W/m^2 , para células fotoeléctricas com uma eficiência $\varepsilon = 15\%$, qual é a área que necessitamos para fazer funcionar:
 - a) Uma calculadora que consome 0.001 W
 - b) Um rádio que consome 20 W

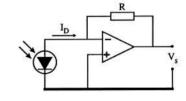
R: a) 0.07 cm² b) 1333 cm².

9.2 Uma célula fotoeléctrica quando iluminada directamente por luz solar apresenta uma ddp em circuito aberto de 1.25 V e debita uma intensidade de corrente igual a 100 mA quando em curto-circuito. Se o factor FS da célula for igual a 0.75, qual é a potência máxima que pode ser retirada da célula?

R: P = 0.094 W.

9.3 Se o fotodíodo representado no circuito da figura fornecer uma intensidade de corrente $I_D=10$ mA quando iluminado, quanto vale a ddp de saída V_s se R for igual a 560 Ω .

R: $V_s = -5.6 \text{ V}$.



LEITURAS



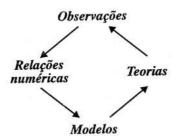
Aquisição, Análise e Tratamento de Dados

A Física pretende explicar os fenómenos da natureza. Designamos por fenómeno qualquer acontecimento, facto ou objecto externo observado directamente ou através de dispositivos particulares. A ciência está intimamente ligada com a observação dos fenómenos e a medição das grandezas que os representam.

A observação e a medição devem ser objectivas e independentes da pessoa que as faz. A objectividade não é certamente fácil, basta pensarmos que cada um de nós é parte activa no processo de conhecimento e estamos sempre condicionados pelos nossos sentidos e experiências precedentes.

Podemos dizer, ainda que de um modo simplista, que a metodologia da Física se baseia esquematicamente no seguinte:

- selecionar ou definir o fenómeno a estudar:
- descrever o fenómeno em termos de um certo número de características designadas por grandezas físicas, às quais se pode atribuir um valor numérico a partir do confronto com a grandeza padrão. Este confronto é designado por medição e o resultado de uma medição por medida. Medir uma grandeza significa atribuir um número que expressa a relação entre ela e um padrão a que chamamos unidade;
- obter a partir das medições, informações que permitam estabelecer como as diversas grandezas se relacionam;
- formular leis que governem o fenómeno observado ou confrontar previsões teóricas já existentes com os dados obtidos experimentalmente.



Das considerações feitas é fácil concluir que os dados experimentais ou as medições são a base do conhecimento científico. Assim é muito importante formular metodologias que nos permitam medir com objectividade, mas é fácil imaginar a quantidade de factores que nos influenciam o processo de medida.

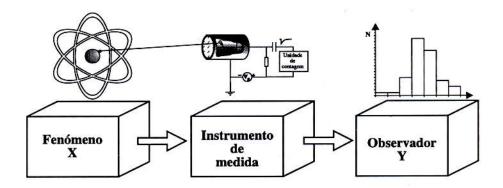
Aquisição de dados e instrumentos

Como vimos um dos aspectos fundamentais da metodologia da Física consiste na aquisição de dados (medição) e na avaliação da sua validade. Uma vez estabelecida a metodologia, os instrumentos são um elemento muito importante no processo de medida.

Permitem confrontar a grandeza em estudo com o padrão dando uma resposta quantitativa. Podemos esquematizar os instrumentos como constituídos por:

- µm elemento revelador, sensível à grandeza a medir sinal de entrada;
- um transdutor, que transforma a informação obtida pelo revelador numa grandeza de fácil manipulação por parte do experimentador;
- um dispositivo que dá visualmente ou graficamente o resultado da medida sinal de saída.

De forma genérica um instrumento de medida funciona como um transdutor que transforma um sinal qualitativo e/ou inacessível aos nossos sentidos num que podemos quantificar.



O fenómeno X no exemplo da figura é a desintegração de um núcleo atómico, o instrumento de medida é um detector Geiger-Muller que através da ionização do gás traduz a passagem de uma partícula num impulso eléctrico, o sinal de saída, cuja contagem é interpretada pelo observador Y através da elaboração de um histograma.

Na relação entre X e Y está implícito o princípio da causalidade, podendo dizer-se que X é a causa de Y. As dimensões físicas do estímulo e da resposta não têm de ser as mesmas.

Por exemplo, se o sistema em questão for um osciloscópio, ao sinal de entrada, uma diferença de potencial, corresponde um sinal de saída, que é uma distância. Num termómetro de mercúrio tem-se igualmente como resposta a uma temperatura um sinal de saída que tem as dimensões de um comprimento, a altura da coluna de mercúrio.

Para um transdutor funcionar como instrumento de medida é fundamental a existência de uma TÁBUA DE CALIBRAÇÃO que permita fazer uma correspondência bijectiva entre os sinais de entrada e de saída $X \leftrightarrow Y$. De uma forma mais ou menos explícita, uma medição é sempre uma comparação com um padrão.

A operação CALIBRAÇÃO é em geral obtida através de ensaios, em que se tomam como sinais de entrada valores conhecidos de X (padrões de medida) e se obtêm como sinais de saída os valores de Y. Muitas vezes verifica-se que a dependência $X \leftrightarrow Y$ é

susceptível de representação analítica, o que permite obter a validação da curva de calibração a partir de um número muito reduzido de pontos. Uma vez realizada a calibração admite-se que esta se mantém invariante no decurso do tempo.

Quando se utiliza um certo instrumento temos de conhecer as seguintes características:

- intervalo de funcionamento;
- tempo de resposta;
- sensibilidade:
- exactidão ou fidelidade:
- precisão ou rigor.

Conforme a natureza das grandezas a medir, ou o objectivo da medição, assim se dá maior relevância a um ou a outro dos atributos do instrumento, já que é impossível a existência de um instrumento de medida perfeito. Um instrumento muito sensível é em geral, pouco rigoroso ou pouco fiel. Um instrumento fiel é em geral pouco sensível.

Analisemos cada uma destas propriedades.

INTERVALO DE FUNCIONAMENTO refere-se ao valor mínimo e máximo que se pode medir de modo que o aparelho não seja danificado e que garanta que a resposta está ainda relacionada com o estímulo, isto é, define a dinâmica do instrumento onde os valores de *X* podem ser correctamente medidos, porque a curva de calibração se mantém válida.

TEMPO DE RESPOSTA é o tempo necessário para o instrumento responder ao estímulo, o qual deve ser breve de modo a que quando receba um segundo estímulo já tenha respondido ao anterior. O tempo de resposta ou característico deve ser sempre inferior ao tempo de variação das grandezas.

Por exemplo num osciloscópio de 10 MHz podemos medir sinais que se sucedem em intervalos de 10-7 s.

Existem situações em que se quer saber o valor num dado intervalo, e nestes casos convém um tempo de resposta longo.

SENSIBILIDADE define-se como a razão entre a variação na resposta Y a uma variação muito pequena do estímulo X, $S = \frac{dY}{dX}$.

Um instrumento é muito sensível quando uma pequena variação do estímulo X provoca uma grande variação na resposta Y.

A sensibilidade também pode ser caracterizada pelo PODER RESOLVENTE, por este entende-se o menor intervalo do estímulo ΔX que provoca variação na resposta do instrumento. Dois estímulos que ocorram num intervalo inferior ao poder resolvente são indescerníveis para o aparelho de medida. O poder resolvente é tanto maior quanto menor for ΔX .

EXACTIDÃO ou FIDELIDADE – um instrumento é exacto ou fiel quando realiza a transdução perfeita do sinal de entrada X num sinal de saída Y, isto é, reproduzindo exactamente a forma de X. Na prática não é necessária a reprodução do próprio sinal desde que se conheça a tábua de calibração para se recuperar o estímulo X a partir da

resposta Y. A este valor estimado podemos chamar x, um aparelho será tanto mais fiel quanto menor for a diferença entre o valor estimado x e o valor verdadeiro X, ou seja, quanto menor for o erro de fidelidade $e_f = |x-X|$.

PRECISÃO ou RIGOR é a propriedade que caracteriza a dispersão das respostas *Y* ao mesmo estímulo *X*. A resposta *Y* não depende só de *X* mas também de limitações intrínsecas ao próprio aparelho como atrito de molas, flutuações de níveis de tensão, histerese magnética, oscilações mecânicas, etc. Estes factores fazem com que a resposta do aparelho a estímulos idênticos não seja sempre a mesma, sendo necessárias diversas medições e analisar como se distribuem em torno de um dado *Y*.

A sensibilidade de um instrumento pode ser melhorada sem introduzir modificações radicais no instrumento. Aumentar o comprimento da agulha num multímetro analógico, ou associar um nónio a uma escala são exemplos de como a melhorar. O mesmo já não acontece com a precisão. Melhorar esta implica em geral a escolha de outro instrumento. Acontece que quando a sensibilidade é muito grande e a precisão baixa temos de fazer várias determinações para controlar a dispersão dos resultados. Quando o aparelho tem uma sensibilidade pobre este facto pode ocultar a falta de precisão.

Em geral na construção dos aparelhos procede-se de modo que uma das propriedades não oculte a outra.

Vejamos o seguinte exemplo, quando se quer medir o comprimento de uma barra de aço geometricamente bem definida, com uma régua vulgar cuja menor divisão é 1 mm, podemos falar de sensibilidade ou poder resolvente de 0.5 mm. No entanto a precisão na leitura pode ser facilmente superior, donde ser inútil repetir a medição. Se associarmos à escala principal da régua um nónio de 50 divisões a sensibilidade passa a ser de 1/50 mm. Então a precisão de leitura já será inferior e justificam-se várias medições.

Uma situação diferente é o caso de querermos medir na horizontal as posições do pêndulo em repouso e a um certo ângulo de afastamento da vertical. Devido às dificuldades de posiocionamento do centro do pêndulo a precisão do valor medido vai ser o factor dominante e não se justifica o uso de uma régua de grande sensibilidade, nem a associação de um nónio.

Devido ao postulado da invariância espaço-temporal das leis físicas seria de esperar que para um aparelho de grande sensibilidade e precisão as medições fossem perfeitamente reprodutíveis. Isto não acontece em geral devido ao fenómeno em si próprio, que pode depender de um grande número de factores e na medição consideramos só parte desses factores.

Por exemplo, no estudo do período de oscilação do pêndulo em função do comprimento, desprezam-se em geral factores como: temperatura e humidade ambiente, impulsão do ar ou massa do fio de suspensão.

Adiante na análise de dados estudaremos como interpretar e contabilizar a não reprodutibilidade dos resultados.

Além das propriedades que já enumerámos sobre os instrumentos deve tomar-se ainda em consideração o facto que, a operação de medida pode alterar as propriedades do sistema que pretendemos medir.

Ao nível microscópico, esta limitação tem um carácter fundamental consubstanciada no princípio de incerteza de Heisenberg e nos fundamentos da Mecânica Quântica.

À escala macroscópica a medição também pode alterar o sistema a medir.

No caso da medida da espessura de um fio fino com um *palmer* é fácil, ao colocar e ajustar o fio entre as esperas, apertar aquele e alterar o diâmetro que queremos medir.

Devemos estar atentos a estas fontes de erro e se não as pudermos eliminar deve tentar-se reduzi-las e quantificá-las. Na maior parte das situações e em função da precisão requerida, um pouco de bom senso, um pouco de conhecimento sobre como funcionam os aparelhos e um pouco de física ajudam quer a melhorar um dado processo de medida quer a encontrar o processo de medida adequado aos objectivos a atingir com a medição.

É óbvio que existem outros casos em que as medições são muito difíceis e a sua realização é um verdadeiro golpe de génio.

Em resumo, medir uma grandeza significa, por interposição entre o fenómeno e o observador de uma metodologia e de instrumentos, atribuir um número (valor numérico) à grandeza referido a um padrão (unidade). Como analisámos, este valor vem afectado pelas limitações e imprecisões dos instrumentos e métodos (erro).

MEDIDA = [VALOR NUMÉRICO] ± [ERRO] [UNIDADE]

Análise de dados

A realização de uma experiência implica a tomada de dados, que pode ser mais ou menos automatizada. Uma vez adquiridos, estes dados têm de ser analisados de modo a poder ter-se um resultado para a experiência, isto é, atribuir um valor numérico à grandeza e saber medir o erro com que foi determinado.

Tenhamos em atenção que os processos de aquisição e análise de dados, não são perfeitamente estanques. O melhor modo de controlar o desenrolar da própria experiência é simultaneamente com a aquisição fazerem-se registos na forma de tabelas e, ainda que de uma forma preliminar, traçar gráficos e efectuar cálculos. Estas operações deverão ser feitas de modo tão claro que possamos detectar situações inesperadas que exijam outras tomadas de dados ou correcções ao dispositivo experimental em funcionamento.

Conforme a natureza do fenómeno em estudo assim se deve optar por fazer uma ou várias medições das variáveis e decidir sobre a precisão a exigir da medição. O exemplo seguinte ilustra a importância do conhecimento do erro com que é feita uma medida.

Consideremos a situação em que numa experiência se suspeita que a velocidade da luz no vazio não tenha o valor estabelecido, isto é c = 2.99792458×10 8 m s $^{-1}$. Admitamos, para facilitar a escrita, que c é conhecido apenas com uma precisão de milésimos, ou seja 2.998 × 10 8 m s $^{-1}$. O resultado da nova experiência deu o valor 3.000×10 8 m s $^{-1}$. Medimos um valor maior para c do que aquele correntemente aceite, 3.000 > 2.998. Será uma grande novidade?

Para respondermos que sim temos de saber algo mais: a precisão do novo valor. Vejamos três situações possíveis, no estudo das quais se omite o factor $\times 10^8$ m s⁻¹.

1.ª Situação

O erro ou incerteza que acompanha a medida é de 0.005. Isto significa que podemos dizer que a velocidade da luz tem um valor compreendido entre 3.000 - 0.005 < c < 3.000 + 0.005, isto é,

Portanto esta medida não põe em causa o valor 2.998, já atribuído.

2.ª Situação

A medição deu um valor de 3.000 ± 0.1. Neste caso a nova experiência propõe

Este valor é ainda compatível com o já conhecido, mas a precisão com que foi expresso está incorrecta e não tem qualquer sentido físico. Se uma grandeza é conhecida com uma precisão de milésimas, uma experiência que conduza a uma imprecisão nas décimas não permite pôr em causa o valor aceite.

3.ª Situação

A experiência é feita com um erro de ±0.001. Tem-se neste caso

Se o erro fosse mesmo 0.001 e se a experiência estivesse bem feita representaria uma grande descoberta! Talvez fosse premiada com o prémio Nobel!

Em resumo, quando se obtém um dado resultado para um parâmetro as reacções podem ser:

- A física convencional está em boa forma;
- É preciso refazer a experiência;
- Fizemos uma grande descoberta.

Qualquer destes resultados está condicionado pelo erro estabelecido para a medida. Se a medição é feita pela primeira vez o resultado só terá igualmente interesse se soubermos qual a sua precisão. A moral da fábula é:

«Quando medir calcule o erro que afecta a medição ou a sua experiência não servirá para nada.»

Embora, devido à nossa justa ambição de perfeição, seja contra a nossa natureza reconhecermos que fazemos erros, comecemos por analisar de que forma podemos cometer erros, com o objectivo de os reduzir ao menor número possível e minimizar aqueles que não conseguimos evitar.

Erros experimentais

A incerteza que acompanha um valor obtido experimentalmente é designada por ERRO EXPERIMENTAL.

Estes podem classificar-se em 2 categorias:

- Sistemáticos:
- Acidentais ou Estatísticos.

Estudemos com algum detalhe a origem destes erros, como se medem e como influenciam o resultado de uma medida.

Erros sistemáticos

Os erros sistemáticos referem uma perturbação que influencia igualmente todas as medições de uma mesma quantidade. Este tipo de erro implica que o valor medido é sempre maior ou menor que o valor real. Se conhecidos devem ser contabilizados ou eliminados. Um erro por excesso deve ser subtraído e um erro por defeito adicionado ao valor medido.

Tipos de erros sistemáticos:

- Observacional: como a paralaxe na leitura de uma escala devido ao mau posicionamento relativamente ao observador. Reduzem-se bastante em sistemas automáticos de aquisição, onde a intervenção humana é praticamente eliminada.
- Ambiental: quando um factor externo à experiência influencia a medida de modo sistemático.

Por exemplo uma tomada de terra deficiente numa instalação eléctrica que introduz um nível de tensão de referência diferente de zero, ou uma temperatura ou pressão diferentes das previstas para a validade de uma dada constante ou parâmetro.

Teóricos: a introdução de uma simplificação no modelo matemático usado para medir uma grandeza de forma indirecta.

Por exemplo, desprezar o efeito do atrito na determinação da aceleração da gravidade a partir das oscilações de um pêndulo simples.

Instrumentais, de calibração e de zero: são inerentes ao aparelho de medida e reflectem falta de exactidão ou fidelidade. Vamos ver como se podem identificar e contabilizar recorrendo a alguns exemplos baseados em situações que ocorrem no desenrolar das experiências propostas neste manual.

Os erros instrumentais são devidos ao valor dos parâmetros que caracterizam internamente o aparelho de medida, podendo em certas circunstâncias alterar a própria grandeza que se quer medir.

O exemplo mais flagrante é a resistência interna dos multímetros usados na medição de grandezas eléctricas. Quando se usa um voltímetro para medir uma ddp aos terminais de uma resis-

tência R temos de nos assegurar que a sua resistência interna R_i na escala escolhida seja muito maior que R. Se for dez vezes superior, a resistência equivalente à associação da resistência e do voltímetro vale $R_{eq} = \frac{10 \text{R} \times \text{R}}{10 \text{R} + \text{R}} = 0.91 \text{R}$. Isto significa que no pior dos casos estaremos a cometer um erro sistemático de 9% por defeito na medição da ddp que deve ser contabilizado. Se as duas resistências forem iguais o erro pode atingir 50%.

O erro de calibração provém de uma tabela de correspondência mal feita.

Por exemplo ao construir um termómetro marcar-se o traço de 100° na posição de 98° e dividir o comprimento entre o 0 e 98 em 100 partes. Será detectado quando se comparar o termómetro em uso com um padrão. Neste exemplo o erro sistemático é por excesso e vale 2% em qualquer posição da escala.

O erro de calibração é um erro sistemático de difícil detecção uma vez que não é frequente o confronto do instrumento com os padrões.

O erro de zero consiste no posicionamento incorrecto do início da escala.

Como exemplos temos o caso do zero da escala do tambor do *palmer* não coincidir com o da escala principal ou ainda a situação em que se faz uma medida eléctrica com um multímetro analógico em que na escala escolhida a agulha não se posiciona em zero antes de se proceder à medição. A diferenca deve ser medida e contabilizada no resultado final da medição.

Um experimentalista tenta identificar, quantificar e se possível eliminar os erros sistemáticos. Por vezes estes erros podem ser eliminados ou bastante reduzidos com uma alteração no processo de medição.

Se a leitura de um comprimento está afectada de um erro sistemático constante, como o erro de zero, então a medição da distância entre duas posições não terá qualquer erro sistemático porque estes cancelam-se quando se faz a diferença entre a leitura dos dois pontos da escala.

Erros acidentais, aleatórios ou estatísticos

Estes erros revelam-se quando ao repetirmos uma medição de uma mesma grandeza obtemos diferentes valores, reflexo da falta de precisão ou rigor do instrumento de medida. Uma parte dos valores obtidos é inferior e outra é superior ao valor real da grandeza. Designa-se esta oscilação indiferentemente por acidental, aleatória ou estatística.

Podem ser ocasionados por:

Observação: sempre que há intervenção subjectiva do observador no processo de medição.

Como exemplo temos a leitura de uma escala, o accionar de um cronómetro ou o posicionamento de um cursor.

Ambiente: todos os factores externos que influenciam o desenrolar de uma experiência.

Por exemplo as flutuações de tensão numa fonte de alimentação devida a oscilações da temperatura.

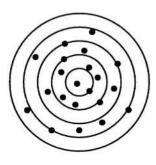
Natureza estatística intrínseca do processo.

Por exemplo as desintegrações de núcleos radioactivos, num dado intervalo de tempo.

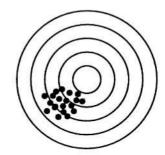
Estes erros só têm significado quando se procede a um número de observações superior a um. Ao contrário dos sistemáticos, os erros acidentais podem ser controlados recorrendo à análise estatística se o número de observações for razoável. Daí se designarem igualmente por estatísticos.

Nas experiências em que se faz uma única medição, apesar de não ter sentido falar em erro estatístico, é óbvio que a medição não é exacta, dependendo desde logo da sensibilidade do instrumento usado. O erro que se comete na leitura de uma medida devido ao limitado poder resolvente da escala designa-se por ERRO DE LEITURA. Este vale metade da menor divisão estimada nas escalas contínuas, como a de uma régua ou multímetro analógico, e uma unidade de escala nas discretas, como a de um cronómetro ou num multímetro digital. O erro de leitura representa o limite superior da incerteza na medida.

A figura esquematiza a diferença entre erros sistemáticos e acidentais, exactidão e precisão numa medida. Os pontos representam a distribuição a duas dimensões de valores experimentais obtidos em observações repetidas da mesma grandeza.



Acidental



Sistemático

Na representação da esquerda os valores distribuem-se aleatoriamente em torno de um valor central ou esperado que quase coincide com o verdadeiro valor da grandeza no centro do alvo. Não há erro sistemático. As orbitais dão uma ideia de como os valores se espraiam. A medida da esquerda é exacta ou fiel, mas pouco precisa.

À direita os valores apresentam uma menor dispersão, o erro acidental é menor e a medida é mais rigorosa. No entanto todos os pontos estão sistematicamente deslocados do valor verdadeiro, o erro sistemático é elevado e a medida é pouco fiel.

Numa experiência real podem ocorrer simultaneamente os dois tipos de erros.

Erros absolutos e erros relativos

O valor do erro que acompanha o resultado de uma medição pode ser expresso nas unidades da própria grandeza medida, situação em que se fala de erro absoluto.

Por exemplo, na medição de um comprimento com uma régua graduada em milímetros em que apenas se pode estimar o erro de leitura, o erro absoluto vale 0.05 cm e a medida representa-se por $l = 3.20 \pm 0.05$ cm.

Aquela representação do erro não é a mais adequada para realizar a comparação do rigor na medida de grandezas distintas. É por isso preferível muitas vezes usar uma representação adimensional do erro, que se obtém fazendo a razão entre o erro experimental e o valor medido expressa em percentagem. Este quociente designa-se por erro relativo. A precisão da medida é mais intuitiva quando se dá a incerteza na forma de erro relativo.

No exemplo anterior o erro relativo vale $\frac{0.05}{3.20} = 0.03$ ou 3% e o comprimento representa-se por l = 3.20 cm $\pm 3\%$.

Análise estatística dos erros acidentais

«Não percebo como uma má medição pode ser transformada numa boa só porque a repetimos 1000 vezes.»

H. Bouasse (Professor na Universidade de Toulouse, 1924)

Esta frase é demasiado simplista. Quando uma medição é feita com um bom método e quando os erros sistemáticos estão controlados, a estatística tem um papel importante no controlo dos fenómenos aleatórios, como vamos ver.

Histogramas e curvas de distribuição

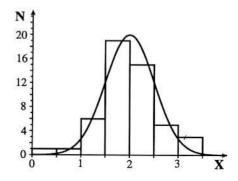
Ao fazer várias medições da mesma grandeza podem ter-se resultados que são próximos ou que apresentam uma grande dispersão entre si. No primeiro caso temos uma boa reprodutibilidade ou boa precisão e menos boa no segundo.

Para ter uma ideia clara e rápida da dispersão dos resultados devemos visualizá-los e um dos métodos mais usado com este objectivo é a histogramação. Para construir um HISTOGRAMA divide-se o grupo de medidas em intervalos de uma dada amplitude ou bin, e conta-se o número de vezes que o resultado da medição ocorre nesse intervalo. O quociente entre este número (frequência) e o número total de medições é a probabilidade no intervalo. Num sistema de eixos ortogonais podemos representar a frequência de ocorrência f(x) em função de intervalos da variável.

O histograma ou gráfico de barras indicará como se distribuem as medidas feitas.

Se o número de medições for grande e se os intervalos forem pequenos o histograma aproxima-se de uma curva contínua designada por CURVA DE DISTRIBUIÇÃO ou simplesmente DIS-TRIBUIÇÃO.

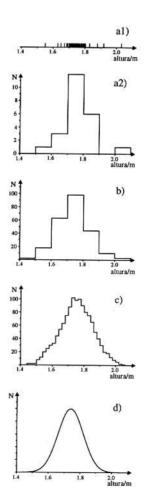
A curva apresenta um perfil conforme a natureza da grandeza a medir e, uma vez definido que tipo de distribuição controla a situação, a estatística permite um tratamento analítico dos resultados da experiência.



Consideremos que se quer estudar a distribuição das alturas dos alunos do primeiro ano da Universidade. Podemos tirar conclusões diversas conforme o número de observações.

Dos gráficos juntos podemos dizer que:

- a1) a representação de cada valor medido num eixo horizontal de alturas não é a mais adequada para a visualização da dispersão dos dados;
- a2) o histograma da situação anterior permite detectar uma aglomeração de alturas no intervalo entre 1.7 e 1.8 m, mas o número de dados é insuficiente e a representação é rudimentar;
- b) o número de dados é agora 10 vezes maior e o histograma é mais regular, sugerindo uma possível distribuição para as alturas. Pode dizer-se que a média se situa entre 1.70 e 1.80 m;
- c) aumentando o número de observações e reduzindo a dimensão do intervalo podemos visualizar melhor os dados e ver que as alturas se distribuem quase simetricamente em torno de um valor médio com uma dada dispersão;
- d) o número de medições é maior, donde poder dividir-se os dados num grande número de intervalos. A grandeza assume uma variação quase contínua, permitindo-nos falar de distribuição contínua.



Esta dispersão dos resultados de uma experiência demonstra o carácter aleatório do processo de medida, o que nos permite encarar o resultado de uma medição como sendo uma variável aleatória.

O universo de todas as concretizações possíveis desta variável é designado por PO-PULAÇÃO e o seu estudo estatístico é feito em termos de distribuições de probabilidades.

Em qualquer experiência dispomos de um conjunto finito de n observações ($x_1, x_2, ... x_n$) que designamos por AMOSTRA.

Comecemos por definir alguns conceitos básicos de estatística como: média, variância e desvio padrão.

Definição de parâmetros estatísticos - média e desvio padrão

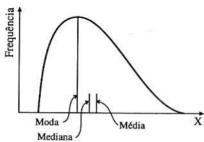
Se temos uma amostra esta é caracterizada por um conjunto de parâmetros estatísticos, dos quais os mais úteis são o valor médio ou média, a variância e o desvio padrão.

O valor médio ou MÉDIA da amostra de n elementos é dado por

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum x_i$$

Quando num sinal de somatório (Σ) não se representa os limites de soma, subentende-se que é de um até ao valor máximo do índice.

Se a distribuição não é simétrica a média não corresponde ao valor mais frequente (máximo da distribuição) a que chamamos MODA. Define-se ainda por vezes a MEDIANA que é o valor da variável para o qual as áreas da distribuição à esquerda e à direita dele são iguais. Nas distribuições simétricas as três variáveis coincidem.



No caso em que se tem medidas repetidas ou quando estas se representem na forma de histograma o valor médio de x é dado por

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i$$

em que ω_i é o número de vezes que se obteve o valor x_i , ou seja, o conteúdo do intervalo (frequência), m o número total de classes e n o número total de acontecimentos.

A segunda característica importante numa distribuição é a dispersão dos valores em torno da média, a qual dá uma ideia da precisão da experiência. Para a dispersão podemos usar no caso de uma amostra a noção de variância s² e de desvio padrão s (root mean square), dado pela raiz quadrada da variância,

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2}{(n-1)}}$$

O desvio padrão é expresso na mesma unidade que a grandeza.

O valor médio <x> e desvio padrão da amostra s são considerados como estimadores do valor médio μ e do desvio padrão σ da população.

A média <x> da amostra é igualmente uma variável aleatória. A variância s²_m desta grandeza é dada pela média da variância da amostra

$$s_m^2 = \frac{s^2}{n}$$

em que s_m é o desvio padrão da média.

Médias ponderadas

A definição de média foi dada considerando que as várias medidas tinham igual precisão. Mas se tivermos diversas medidas, x₁, x₂,..., da variável X com diferente rigor, o valor médio de X deve ser calculado de modo que os valores contribuam para a média de acordo com o seu peso. Quanto mais precisos maior peso devem ter, definindo-se média ponderada

$$\langle x \rangle = \frac{\sum \frac{X_i}{s_i^2}}{\sum \frac{1}{s_i^2}}$$
 $e \frac{1}{s^2} = \sum \frac{1}{s_i^2}$

em que $\frac{1}{s_i^2}$ é o peso da medida i e s_i o desvio padrão de cada medição.

Quando nos referimos a uma amostra ou população usamos símbolos diferentes para referir média e variância. Em resumo, os símbolos utilizados são:

μ – média real de uma distribuição ou de uma população.

<x> - média estimada para uma amostra.

σ² – variância real de uma distribuição ou população.

s² – variância estimada para uma amostra.

s_m² - variância estimada para uma média.

Resultado de uma medição

Numa amostra com n medições da mesma grandeza, em que $n \ge 10$, o resultado final da medição é a média < x >, afectada do seu desvio padrão s_m

$$\langle x \rangle \pm s_m$$

Para as amostras com um número pequeno de observações não tem sentido o cálculo do desvio padrão e deve usar-se como medida de incerteza o maior desvio em relação à média Δx, ou o valor médio dos desvios em relação à média

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum |x_i - \langle x \rangle|$$

Sendo o resultado final da medição dado por

$$< x > + \Delta x$$
 on $< x > + \Delta$

É obvio que nenhuma das expressões anteriores se aplica a experiências de um evento.

Nesta situação o erro que afecta a medida é o erro de leitura, definido anteriormente, e que se considera como o limite superior do erro estatístico. Em certos casos podemos ainda definir o erro estatístico estimado pelo observador. Erro devido à intervenção humana introduzir uma alteração superior ao erro de leitura.

Consideremos o seguinte exemplo. Se medirmos um intervalo de tempo com um cronómetro de centésimas de segundo o erro de leitura é 0.01 s e o erro cometido pelo experimentalista no disparo manual é seguramente maior, da ordem de 0.1 s para um observador treinado. Assim, o erro que afecta a medição é o erro estatístico provável da ordem de 0.1 s.

Nas situações em que o erro de leitura é superior ao erro estatístico estimado, pode tentar-se reduzir o de leitura aumentando a sensibilidade da escala.

Por exemplo, aumenta-se a sensibilidade de uma escala milimétrica associando-lhe um nónio.

Quando numa medição se individuam o erro estatístico e o sistemático o resultado final deve expressar separadamente cada um deles anotando em parênteses a sua natureza,

[grandeza] = [valor numérico] ± [erro estatístico] + (ou –) [erro sistemático] [unidade]

Se os limites dos erros à esquerda e à direita do valor médio não forem iguais, o que é provável quando existem erros sistemáticos, pode evidenciar-se a ocorrência usando a notação,

Não existem «receitas» para o cálculo dos erros. Em cada situação tem de se fazer um balanço entre o bom senso, as potencialidades do equipamento, o tempo disponível e o objectivo da medição.

Adiante, no parágrafo dos algarismos significativos, discute-se o problema de como apresentar numericamente o resultado de uma medição.

Intervalo de confiança

Ao representarmos o resultado de uma medição da grandeza X por,

valor médio ± erro

estamos a afirmar que, se por um lado ignoramos o verdadeiro valor da grandeza X medida, podemos no entanto afirmar com uma dada confiança, designada por probabilidade P, que o valor exacto de X se encontra no intervalo [valor-erro,valor+erro]. Este define-se por INTERVALO de CONFIANÇA para a grandeza X.

O grau de confiança α exigido numa dada estimativa é variável, podendo ser da ordem de 65%, 80%, 90% ou outros. No caso mais simples, em que se procede a uma medição por leitura num instrumento de medida, se Δx é o valor de metade da menor divisão, ao representar a medição por valor $\pm \Delta x$ define-se um intervalo com 100% de confiança. Quando se representa o resultado por valor $\pm s_m$ isto significa que, se a distribuição for normal, o nosso intervalo de confiança corresponde a uma probabilidade de ocorrência de 68.3% do verdadeiro valor da grandeza no intervalo [valor $-s_m$, valor $+s_m$].

Distribuição de probabilidades

Quando temos uma variável aleatória, a probabilidade de uma nova medida na amostra se situar num dado intervalo pode ser prevista através da distribuição de probabilidade da população.

Para distribuições contínuas têm-se as seguintes propriedades:

- P(x)dx dá a probabilidade de uma medição ter um resultado entre x e x+dx;
- $\iint_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1 da a \text{ probabilidade do resultado ocorrer entre } -\infty e +\infty.$

A certeza de um acontecimento corresponde à probabilidade um.

Sabendo a probabilidade de ocorrência P(x) pode calcular-se o valor médio da variável aleatória $\mu = \int x P(x) dx$.

No caso da variável ser discreta, isto é, apenas pode tomar N valores distintos x_i , os integrais de probabilidade passam a somatórios e tem-se:

- p_i probabilidade da variável tomar o valor x_i;
- $m \sum p_i = 1;$
- \mathbf{m} o valor médio da variável é dado por $\mu = \sum p_i x_i$.

As distribuições de probabilidade mais comuns em Física são:

- Distribuição binomial;
- Distribuição de Poisson:
- Distribuição normal ou de Gauss;
- Distribuição t de Student;
- Distribuição de χ².

Entre estas vamos utilizar especialmente a distribuição de Gauss e de Student, a primeira válida para amostras grandes e a segunda para amostras pequenas. Para *n* da ordem de vinte, as duas distribuições começam a confundir-se.

Distribuição binomial

A distribuição binomial descreve processos em que num dado número de tentativas idênticas se têm duas possibilidades, ditas por exemplo sucesso e insucesso. Como exemplo temos os lançamentos de uma moeda, com a possibilidade de obter caras ou coroas. Se a probabilidade de sucesso é p, a de insucesso é 1-p. Quando o número de eventos for N, a probabilidade de ter n sucessos é dada pela distribuição de probabilidade binomial

$$P(n,p,N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Propriedades desta distribuição:

- valor médio de sucessos: < n > = Np;
- w variância: $\langle n^2 \langle n \rangle^2 \rangle = Np(1-p)$ e portanto o desvio padrão é dado $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$.

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson descreve processos que têm também a possibilidade de um sucesso ou insucesso, mas em que não se controla o número de acontecimentos N. Por exemplo, quando uma amostra de um dado elemento radioactivo se desintegra,

conhece-se só a probabilidade de desintegração. Como saber quantos serão (não quais são) os núcleos que se vão desintegrar num dado intervalo? Este tipo de processo pode ser descrito pela distribuição binomial, desintegra-se ou não se conhecermos o número total de núcleos em jogo, ou pela distribuição de probabilidades de Poisson, se conhecermos apenas o número médio de desintegrações.

$$P(n, \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

em que n é o número de sucessos e μ o número médio de ocorrências no intervalo de observação. No cálculo das probabilidades deve começar-se por calcular $P(0,\mu)$, que é a probabilidade de ocorrência de nenhum sucesso.

A distribuição de Poisson é o limite da distribuição binomial quando o número de eventos é grande e a probabilidade p de ocorrência de cada evento isoladamente é pequena. O número médio de ocorrências é μ=Np.

Propriedades desta distribuição:

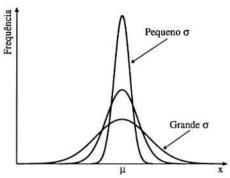
- **m** o valor médio de acontecimentos $\langle n \rangle = \mu$;
- \blacksquare a variância é μ e portanto desvio padrão será $\sigma = \sqrt{\mu}$.

Este último resultado é muito interessante – nos processos tipo Poisson a incerteza é dada directamente pela raiz quadrada do número de sucessos obtidos.

Distribuição normal ou gaussiana

A distribuição de Gauss descreve o comportamento de um grande número de acontecimentos aleatórios com pequenas oscilações à esquerda e à direita do valor esperado. É simétrica e apresenta uma forma característica de sino, dada por uma expressão do tipo

$$P(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$



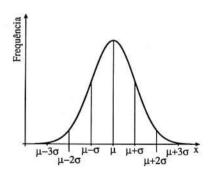
A constante $\frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma}}$ é um factor de normalização. O valor de σ controla a largura da curva, se σ for grande a curva é larga, se σ for pequeno a curva será estreita, de modo a manter a condição de normalização, isto é, probabilidade total igual a um.

Propriedades desta distribuição:

- a variância da distribuição é σ²;
- a altura da curva para $x = \mu \pm \sigma$ é $\frac{1}{\sqrt{e}}$ do valor máximo e a largura da curva a meia altura (full width half maximum) é dada por FWHM=2.35 σ ;
- o valor máximo da distribuição é $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$;
- os valores 1σ, 2σ,... dividem a área sob a curva em várias regiões. Uma vez que as áreas representam probabilidades, as áreas parciais são uma medida de probabilidade de obter medidas nestes intervalos.

Esta distribuição de probabilidades prevê que as medidas ocorram do seguinte modo

19.15% entre [
$$\mu$$
 , $\mu+\sigma/2$]
34.13% entre [μ , $\mu+\sigma$]
68.27% entre [$\mu-\sigma$, $\mu+\sigma$]
95.45% entre [$\mu-2\sigma$, $\mu+2\sigma$]
99.73% entre [$\mu-3\sigma$, $\mu+3\sigma$]



O desvio padrão σ não cobre toda a dispersão da variável aleatória, mas sabemos que a probabilidade de ocorrerem valores para além de $\mu\pm2\sigma$ é baixa, sómente 5% e para além de $\mu\pm3\sigma$ só 0.3%. Isto é equivalente a dizer que a probabilidade acumulada de ocorrência em $\mu\pm3\sigma$ é 99.7%.

Uma mudança de variável do tipo $x' = \frac{x - \mu}{\sigma}$ permite escrever a distribuição normal numa forma padrão, com média μ =0 e variância σ^2 =1, designada por distribuição normal reduzida,

$$P(x') dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx'$$

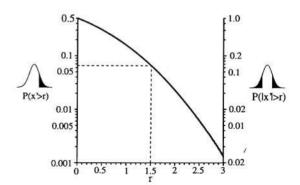
Existem tabelas, e gráficos baseados nas tabelas, que dão a probabilidade acumulada para a distribuição normal reduzida

$$F(x) = \int_{0}^{r} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^{2}}{2}} dx' = P(x' \le r)$$

A figura é a representação gráfica da probabilidade de excedência unilateral (eixo das ordenadas à esquerda) ou bilateral (eixo à direita).

Como
$$P(x'>r) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} > r) =$$

= $P(x - \mu > \sigma r)$ o eixo das abcissas representa o número de desvios padrão.

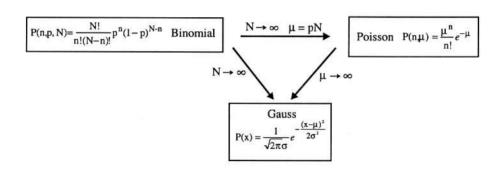


Para clarificar a utilidade da probabilidade acumulada analisemos o seguinte exemplo. O resultado de 100 contagens do número de desintegrações por segundo de uma fonte de 137 Cs foi de 300 ± 20 , em que 20 é o desvio padrão. A probabilidade do verdadeiro valor ser maior que 330 é 7.5%. Este resultado obtém-se a partir do gráfico anterior considerando o ponto $x' = \frac{|300-330|}{20}$ ou seja, r = 1.5. Perante aquele resultado podemos concluir que é pouco provável que o verdadeiro valor seja 330.

A análise de Gauss deve aplicar-se com cuidado, exigindo como condições:

- experiência bem feita de modo a que a média seja de confiança;
- cálculo correcto do desvio, em especial quando reflecte o resultado da medida de várias grandezas;
- dispor de um número de medições que permita calcular correctamente os valores anteriores. Se o número for pequeno é preferível usar a distribuição t de Student de que falaremos adiante.

Em certas condições a maioria dos processos apresentam um comportamento normal ou gaussiano quando o número de acontecimentos é grande. A distribuição de Poisson e binomial tendem naturalmente para a normal quando o número de acontecimentos é grande. Como vimos a distribuição de Poisson também é um limite da binomial. O quadro mostra como as distribuições se relacionam.

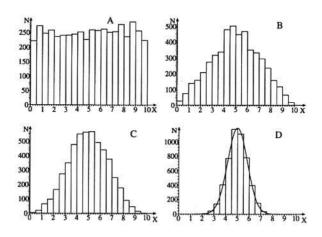


Teorema do limite central

Vejamos porque razão o estudo da distribuição de Gauss ou normal é tão importante, quando estamos tentando controlar os resultados das experiências. Já referimos que as medições envolvem erros acidentais de várias origens (leitura, ambientais, ...) assim o erro final é uma resultante de todos os erros parciais, cada um com a sua distribuição. Nesta situação revela-se muito útil o teorema do limite central. Segundo este teorema uma soma X que tem origem em variáveis independentes x_i , com i=1,2,3,...N, que obedecem a distribuições de média μ_i e desvio padrão σ_i , rege-se de acordo com uma distribuição que tem valor médio <x> = $\Sigma \mu_i$, variância $\sigma^2(x) = \Sigma \sigma_i^2$ e qúe se torna gaussiana quando $N \rightarrow \infty$.

O exemplo seguinte ilustra este teorema. Se tivermos um processo de geração aleatória de 5000 números entre 0 e 10 obteremos uma amostra de média 5 e variância 10. A sua representação gráfica revela uma distribuição horizontal. Consideremos outros 5000 eventos que são a média de dois dos anteriores, isto é $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$. A nova distribuição já não é plana, mas sim triangular de média 5 e espraiando-se simetricamente entre 0 e 10. Se começarmos a fazer as médias primeiro com três, depois quatro números e assim sucessivamente vemos que a distribuição passa a gaussiana. A média de 12 variáveis geradas aleatoriamente é já uma gaussiana de média 5 e variância 0.703. Os gráficos A, B, C e D representam respectivamente a distribuição

para o caso $X = x_1$, $X = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $X = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$ e $X = \frac{\sum x_i}{12}$.



Distribuição t de Student

Esta distribuição revela-se particularmente útil para estabelecer níveis de confiança para amostras de pequena dimensão.

A distribuição de Gauss permitiu comparar o valor <x> médio medido para uma dada grandeza com o valor esperado μ usando tabelas que dão a probabilidade dessa ocorrência. Contudo, em muitas situações, não se dispõe de um número de observações

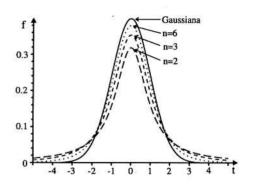
N que nos permita ter uma estimativa fiável do desvio padrão, mas tão somente uma estimativa aproximada que designamos por s_m . Nesta situação teremos uma variável t dada por $t=\frac{x-\mu}{s_m}$ que segue a distribuição t de Student e que nos vai permitir estabelecer níveis de confianca nas amostras pequenas

$$f\left(t,n\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

em que n é o número de graus de liberdade.

Algumas propriedades da distribuição:

- w valor médio $\mu = 0$;
- \mathbf{m} variância $\sigma^2 = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{n} 2}$;
- m para pequenos valores de N é mais larga que a gaussiana;
- muito sensível ao número de observações N, quando N→∞, σ²→1 e portanto esta distribuição tende para a distribuição normal reduzida.



O número de graus de liberdade é n=N-1 porque um dos parâmetros da distribuicão, o desvio padrão da média, é estimado a partir da amostra.

Os intervalos de confiança são construídos a partir da distribuição para um dado valor t_0 , calculando a área unilateral $P(t>t_0)$, ou a bilateral $P(t|t>t_0)$.

Na tabela de probabilidade da distribuição t de Student são dados os valores críticos de t_0 para vários valores de níveis de significância e diferentes graus de liberdade n. O valor de t_0 tabelado tem o significado de um desvio t_0s_m em relação à média, já que se tem no intervalo unilateral $P(x<\mu+t_0s_m)$ e no bilateral $P(\mu-t_0s_m< x<\mu+t_0s_m)$, como se pode ver no excerto seguinte da tabela.

P _{bilateral}	0.200	0.400	0.600	0.800	0.900	0.960	0.980
Pmonolateral	0.600	0.700	0.800	0.900	0.950	0.980	0.990
n							
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	15.895	31.820
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.849	6.965
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.482	4.541
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.999	3.747
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.757	3.365
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.612	3.143

Convém notar que se x foi obtido fazendo várias medições, então $s_{\scriptscriptstyle m}$ estima o erro

da média
$$s_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$
, onde $s^2 = \frac{1}{N-1} \sum (x_i - \langle x \rangle)^2$

Exemplo de aplicação do critério t de Student na medição da resistência de um lote de 5 componentes cujo valor nominal dado pelo fabricante é $100~\Omega$. O resultado de 5 medições deu um valor médio de $105~\Omega$ e um desvio padrão da amostra s=7 Ω . Será aceitável o valor medido? De acordo com o excerto da Tabela de probabilidades da distribuição t de Student, considerando 5-1 graus de liberdade, temos para t = $(105-100)/7/\sqrt{5} = 1.60$, uma probabilidade correspondente a um grau de confiança em torno dos 80%, o que é razoável.

Uma outra forma de usar a distribuição t de Student seria na obtenção de um intervalo de confiança a 96% para o verdadeiro valor nominal do lote de resistências. O valor crítico dado na tabela para 4 graus de liberdade vale t=2.999 e teríamos um intervalo de confiança dado por <x>±3.0s_m como s_m=3.1, ter-se-ia 96<R<114.

Se tivéssemos adoptado a distribuição gaussiana, o intervalo de confiança seria mais estreito <x>±1.96s_m e portanto 99<R<111, o que não expressaria toda a incerteza na medição.

A distribuição t de Student é também usada como teste de verosimilhança quando se pretende avaliar, dispondo de poucos dados, a probabilidade de um ajuste ou modelo matemático representar uma grandeza.

Distribuição de χ^2

Se considerarmos uma sequência de variáveis aleatórias x_1, x_2,x_n, cada uma obedecendo à distribuição normal com média μ_i e variância σ_i^2 , então a soma

$$\chi^2 = \sum \frac{[x_i - \mu_i]^2}{\sigma_i^2}$$

tem uma distribuição de probabilidade χ^2 com n graus de liberdade.

$$P(\chi^{2},n) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \chi^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{\chi^{2}}{2}}$$

Propriedades desta distribuição:

- w valor médio μ = n;
- w variância $\sigma^2 = 2n$.

Note-se que cada parcela do somatório que define χ^2 tem uma distribuição normal reduzida. É possível verificar a partir deste resultado que $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$, expressão que envolve a variância σ^2 e o seu estimador s^2 para uma amostra normal, tem uma distribuição χ^2 com n-1 graus de liberdade. Aqui o número de graus de liberdade pode ser entendido como o número de parcelas independentes no somatório χ^2 .

Esta distribuição tem particular importância na determinação da confiança no ajuste de modelos aos dados de uma experiência. Os valores da probabilidade de χ^2 , encontram-se sob a forma de tabelas na secção TABELAS.

Rejeição de observações

Será que todas as observações feitas são de conservar?

Um critério de rejeição possível é o de Chauvenet. Se a probabilidade de uma dada medição for inferior a $\frac{1}{2^n}$, n é o número de medições, pode rejeitar-se esse valor e recalcular a média e desvio padrão do lote dos restantes resultados.

Outro critério de rejeição possível consiste em não conservar todos os valores cujos desvios fiquem para além dos $\pm 3\sigma$. Estes representam só 0.33% no caso da distribuição normal e os desvios maiores que $\pm 4\sigma$ apenas uma probabilidade de ocorrência de 6 x 10^{-5} .

Em certas situações também é aceitável rejeitar as medidas que se encontrem nos extremos de uma determinada grandeza física, pois esses valores podem corresponder aos limites do aparelho de medida.

Por exemplo medidas de temperatura vizinhas de 100°C com um termómetro que só está graduado até 100°C.

Os critérios de rejeição são por vezes deixados ao bom senso do experimentalista e não devem ser muito severos, para não se eliminarem resultados que, por pouco esperados, são desprezados correndo-se assim o risco de deitar para o lixo nova física.

Propagação de erros

Na maioria das experiências, para atribuir um valor a uma grandeza medem-se várias quantidades independentes, e se cada uma delas está afectada individualmente de uma certa incerteza, estas incertezas parciais contribuirão para a incerteza final com que se determina a grandeza. No caso da medição da aceleração da gravidade com o pêndulo simples tem-se $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ e portanto g é função do quadrado do período T^2 e do comprimento l. A incerteza na medida de T e l contribuem para a incerteza de g.

Assim, quando um valor é obtido a partir de operações algébricas, feitas sobre valores medidos com um certo erro, a incerteza final desse valor é um reflexo (propagação) dos erros parciais.

Vejamos como tratar analiticamente casos simples de propagação dos erros. Consideremos a medida da grandeza z a partir da medição da variável x. Se z=x e x apresentar uma incerteza $\pm \delta x$ (este erro pode ser o desvio padrão, o desvio máximo ou o desvio médio) a incerteza que afecta z será $\delta z = \delta x$, mas se $z=x^2$

$$(z\pm\delta z)=(x\pm\delta x)^2=x^2\pm2x\delta x+(\delta x)^2$$

como δx é pequeno o seu quadrado ainda será mais pequeno. Desprezando $(\delta x)^2$, obtemos $(z\pm\delta z)=x^2\pm2x\delta x$, donde z ser calculado com um erro $\delta z=2x\delta x$.

Na forma de erro relativo vem

$$\frac{\delta z}{z} = \frac{2x\delta x}{x^2} = 2\frac{\delta x}{x}$$

Tentemos encontrar um modo analítico que seja utilizável para qualquer tipo de relação entre duas ou mais variáveis.

Quando medimos uma grandeza o valor que se obtém f(x), não é o valor exacto da grandeza que designamos por $f(x_0)$.

A diferença entre dois pontos vizinhos de uma função pode ser expressa em série de Taylor

$$f(x) = f(x_o) + (x - x_o) \frac{\partial f}{\partial x} \bigg|_{x = x_o} + \frac{1}{2!} (x - x_o)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \bigg|_{x = x_o} + ... + \frac{1}{n!} (x - x_o)^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \bigg|_{x = x_o}$$

Aplicando esta relação ao caso de uma medição em que o valor exacto é $f(x_o)$ e o medido f(x), se $\frac{x-x_o}{x_o} \ll 1$, o que é de esperar como resultado de uma experiência bem feita, tem-se

$$f(x) \approx f(x_0) + (x-x_0) \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0}$$
 ou $\delta f = f(x) - f(x_0) \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x} \delta x$

Vejamos como esta aproximação permite deduzir regras de propagação de erros. Se f é função de várias variáveis: x, y, z... independentes e medidas experimentalmente com um certo erro, o erro $\delta f = f(x,y,z,...) - f(x_0,y_0,z_0,....)$ é dado por

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \, \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \, \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \, \delta z + \dots$$

Na equação anterior os valores δx , δy , δz são o erro estatístico dado pelo desvio padrão da média ou um seu estimador, conforme se tem muitas ou poucas medidas. Para um pequeno número de medições (ou apenas uma) as medidas são afectadas do maior desvio em relação à média ou do desvio médio ou do erro de leitura: $x \pm \Delta x$, $y \pm \Delta y$, $z \pm \Delta z$, ... Então,

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z \ \, \text{d\'a o LIMITE SUPERIOR DO ERRO para f.}$$

Sempre que a dimensão da amostra o permita, pode determinar-se o erro estatístico das variáveis e deve tomar-se a variância da função para o cálculo do erro estatístico final

$$\sigma^2(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma^2(y) + \dots$$

Esta expressão obtém-se quadrando a equação que dá of aproximado pelo desenvolvimento em série de Taylor, e desprezando os produtos cruzados, porque admitimos que as diferentes variáveis não estão correlacionadas entre si.

Casos particulares para a expressão $\sigma^2(f)$ e Δf

$$\begin{split} f &= x \pm y & \sigma^2\left(f\right) = \sigma^2\left(x\right) + \sigma^2(y) & \Delta f = \Delta x + \Delta y \\ f &= x \cdot y & \frac{\sigma^2(f)}{f^2} = \frac{\sigma^2(x)}{x^2} + \frac{\sigma^2(y)}{y^2} & \frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} \\ f &= \frac{x}{y} & \frac{\sigma^2(f)}{f^2} = \frac{\sigma^2(x)}{x^2} + \frac{\sigma^2(y)}{y^2} & \frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|} \\ f &= x^n & \frac{\sigma^2(f)}{f^2} = n^2 \cdot \frac{\sigma^2(x)}{x^2} & \frac{\Delta f}{|f|} = n \frac{\Delta x}{|x|} \\ f &= \text{sen } x & \sigma^2(f) = \cos^2(x) \cdot \sigma^2(x) & \Delta f = |\cos x|\Delta x \text{ ou } |\cos x| \text{ sen } \Delta x^1 \\ f &= k \log x & \sigma^2(f) = k^2 \cdot \frac{\sigma^2(x)}{x^2} & \Delta f = |k| \frac{\Delta x}{x} \end{split}$$

Quando nas expressões matemáticas intervêm constantes numéricas não exactas estas devem ser escritas com um número de algarismos tal que o erro relativo que introduzem no valor da grandeza seja inferior, pelo menos uma ordem de grandeza, à contribuição dos erros das outras variáveis.

Recorrendo ainda ao exemplo do cálculo da aceleração da gravidade temos $g=\frac{(2\pi)^2 l}{T^2}$ em que $\pi=3.141593...$. Pela lei de propagação para o limite superior do erro, em termos dos desvios médios das diferentes grandezas tem-se, $\frac{\Delta g}{g}=2\frac{\Delta\pi}{\pi}+\frac{\Delta l}{l}+2\frac{\Delta T}{T}$. Se $\frac{\Delta l}{l}\sim\frac{\Delta T}{T}\sim10^{-3}$ então $\frac{\Delta\pi}{\pi}$ deve ser da ordem de 10^{-4} e o valor de π a tomar é 3.1416 porque neste caso o erro relativo introduzido pela aproximação de π é $\approx 3 \times 10^{-5}$.

O que são algarismos significativos

Quando se determina uma grandeza, quer a partir de uma medição directa, quer de cálculos sobre grandezas medidas, o valor numérico final usado na representação da medida deve expressar a imprecisão inerente ao resultado, ele deve conter apenas algarismos significativos. Entendem-se por ALGARISMOS SIGNIFICATIVOS aqueles cujos valores são conhecidos com certeza mais o primeiro coberto pelo erro.

Na contagem dos algarismos significativos, procede-se da esquerda para a direita, começando no 1.º dígito não nulo e terminando no 1.º algarismo que é afectado pela incerteza.

No caso do primeiro dígito à esquerda ser superior ou igual a cinco vale como dois algarismos significativos.

O zero à direita do ponto decimal tem significado, enquanto que os zeros à esquerda do ponto decimal não contam.

¹ Com as grandezas trigonométricas devem ter-se precauções especiais. Quando um ângulo é pequeno o seu valor em radianos pode substituir o seno, isto é, em unidades de radiano sen $\theta \approx \theta$.

Por exemplo se a altura de um estudante é 1.78 m, diz-se que o número tem três algarismos significativos, isto quer dizer que o erro na determinação é da ordem de 1 cm. Se afirmássemos que a altura era de 1.780 m a medida teria quatro algarismos significativos. Em física 1.78 m e 1.780 m são diferentes, mas 0.00178 km e 1.78 m têm o mesmo significado.

O conhecimento dos algarismos significativos de uma medida permite a manipulação de valores com incerteza, sem o conhecimento explícito do valor do erro.

Quando dois ou mais valores são usados num cálculo o número de algarismos do resultado final depende do número de algarismos significativos das parcelas.

Em todos os casos, o último algarismo à direita no resultado é dado pelo primeiro afectado de erro.

Na soma e subtracção de números, o número de casas decimais do resultado é o menor de entre todas as parcelas.

Se tivermos três massas determinadas com precisões diversas, como por exemplo m_1 =67 g, m_2 =0.0005 g e m_3 =7.45 g a massa total m_1 , só tem a precisão da medida com maior erro absoluto, neste caso um grama, correspondente à medida de m_1 .

Fazendo a conta como nos primeiros anos de escola, e assinalando com um sublinhado o algarismo afectado de erro, vê-se facilmente a razão de ser da regra enunciada

$$67 \\
0.0005 \\
+ 7.45 \\
\hline
74.4505$$

Consideremos ainda outro exemplo em que os valores estão explicitamente afectados de erro. O peso de 1 dm³ de água é determinado com uma balança cuja precisão é de $\frac{1}{100}$ g e o contentor é um frasco de vidro pesado com a mesma balança. Os resultados das pesagens foram, para a massa do frasco 120.340 \pm 0.001 g e para a água mais o frasco 1120.345 \pm 0.001 g. O peso do decímetro cúbico de água é 1000.005 \pm 0.002 g. O erro foi calculado com base na soma dos desvios das duas pesagens e define o último algarismo significativo.

Quando se multiplicam ou dividem números, o resultado final tem um número de algarismos significativos igual ao de menor número das parcelas.

Se medirmos a sala de aula e obtivermos 7.3 m para a largura e 8.4 m para o comprimento ao calcular a área da sala com uma calculadora obtém-se 61.32 m². Como qualquer dos valores iniciais só tem três algarismos significativos a operação aritmética não pode por si dar mais precisão ao resultado, donde a área ser 61 m². Sigamos a mesma filosofia que usamos para a soma para evidenciar este resultado

$$\begin{array}{r}
7.3 \\
\times 8.4 \\
\hline
292 \\
584 \\
\hline
61.32
\end{array}$$

Nos outros tipos de operações, como a raiz quadrada, o cálculo de exponenciais, logaritmos, funções trigonométricas ou outras, o número de algarismos significativos do resultado é igual ao dos valores de partida.

Por exemplo, $\log 3.004 = 0.4777$, $e^{3.004} = 20.17$ e $\sqrt{3.004} = 1.733$.

Se nas expressões intervêm constantes não exactas como π , usa-se um número de decimais de modo ao erro relativo introduzido ser inferior em uma ordem de grandeza ao menor erro relativo introduzido pelas variáveis, como referido no parágrafo da propagação dos erros. Em geral basta considerar a constante com mais um dígito que o número de algarismos significativos da variável com melhor precisão.

Se manipularmos números muito grandes ou muito pequenos devemos usar a notação científica, em que o valor é dado por um número com um só dígito antes do ponto decimal seguido pelos restantes dígitos significativos e multiplicado por uma potência de dez adequada. Em notação científica 0.000543 e 1003.51 escrevem-se respectivamente 5.43×10⁻⁴ e 1.00351×10⁺³.

A notação científica é ainda particularmente conveniente para atribuir um número de dígitos correcto num cálculo.

Se tomarmos para o raio equatorial da terra ~ 6 378 000 m e para o raio do átomo de hidrogénio 0.000 000 000 0529 m a razão entre eles com base nesta escrita seria um cálculo impossível com a maioria das calculadoras, pois estas só admitem 10 dígitos. Em notação científica $r_T=6.378\times10^6$ m, $r_H=5.29\times10^{-12}$ m e $\frac{r_T}{r_H}=1.206\times10^{18}$.

?

O quadro apresentado a seguir é um resumo de como contar, em diferentes representações, o n.º de algarismos significativos do resultado de uma medição.

valor medido	algarismos significativos	observações
2	1	
5 2		 1.º dígito ≥ 5 conta como 2 algarismos significativos (convenção deste manual)
2.0	2	
2.00	3	
0.136	3	o zero serve só para posicionar o ponto decimal
2.483	4	
2.483×10 ³	4	
310	3(?)	o zero pode ter sido usado apenas para posicionar o ponto decimal e neste caso só temos 2 algarismos significativos
3.10×10 ²	3	representação sem ambiguidade
3.1×10 ²	2	

Ao truncar um número deve ter-se em atenção se o primeiro dígito desprezado é igual ou superior a cinco. Se for o caso, o último algarismo significativo que se considera deve ser incrementado de uma unidade.

Nos cálculos intermédios deve considerar-se sempre o maior número de algarismos para evitar erros de truncatura.

Vejamos como numa experiência real devemos proceder no respeitante a algarismos significativos. Analisemos a seguinte situação. Fizeram-se 15 medidas de um comprimento com uma régua graduada em milímetros. O erro de leitura é de 0.05 cm donde as medidas poderem ter algarismos significativos até à décima de milímetro. Os resultados obtidos estão representados na tabela

15.20	15.20	15.25	15.15	15.35
15.25	15.20	15.10	15.15	15.20
15.10	15.30	15.25	15.25	15.25

Qual o resultado da experiência?

A melhor estimativa do verdadeiro valor do comprimento é a média da amostra. As oscilações que se observam nos valores medidos são de natureza aleatória, donde se distribuirem provavelmente de modo gaussiano. O número de medições não sendo muito grande permite uma razoável aproximação a este tipo de distribuição.

Procuramos o valor do comprimento na forma

O valor da média é <x> = 15.2133, nesta fase preliminar do cálculo tomam-se vários algarismos para evitar erros de truncatura. Será o desvio padrão da média a reger qual o número de algarismos significativos que devem acompanhar o resultado final. Os algarismos com significado no desvio são um ou num limite superior dois.

O desvio padrão da amostra s =
$$\sqrt{\frac{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2}{(n-1)}}$$
 = 6.2396×10⁻² e portanto, o desvio padrão

da média
$$s_m = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.01611$$
.

O resultado da experiência tem 4 algarismos significativos e é

$$15.21 \pm 0.02$$
 cm

Sem aumentar a precisão, mas definindo melhor o intervalo de confiança pode apresentar-se o resultado como 15.213±0.016 cm.

Este exemplo revela que ao repetir a experiência 15 vezes se ganhou uma maior precisão, passou-se de uma precisão dada por um erro de leitura de 0.05 cm, que afectaria o resultado se tivessemos uma só medida, para um erro estatístico de 0.02 ou 0.016 cm.

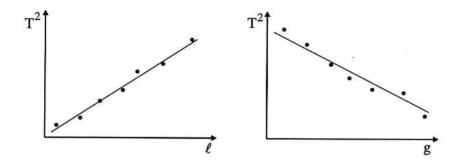
Por outro lado, vemos que a dispersão dos valores tabelados (s = 0.06 cm) é superior ao erro de leitura de uma só medição, o que revela que existem causas aleatórias que influenciam a medição. Mas esses fenómenos só foram evidenciados porque se fizeram várias medidas. Com isto queremos chamar à atenção que as experiências de uma só medição com aparelhos fiéis, podem não conduzir necessariamente a resultados mais precisos.

Tratamento de dados

Como estabelecer uma relação entre grandezas

Quando se tem um dado fenómeno este pode depender de diversas grandezas. Para simplificar consideramos só duas. Estas grandezas podem ser independentes, isto é, quando

uma varia não provoca qualquer variação na outra (como por exemplo o valor do período de oscilação de um pêndulo ideal e a temperatura) ou pelo contrário podem ser correlacionadas, e neste caso a correlação pode ser positiva ou negativa, consoante variam no mesmo sentido ou em sentidos contrários. Por exemplo o período do pêndulo simples aumenta quando aumenta o comprimento deste, estamos perante uma correlação positiva como representado no gráfico da esquerda. O gráfico da direita mostra uma correlação negativa como é o caso, meditando sempre sobre o pêndulo simples, da relação do período de oscilação com a aceleração da gravidade medida em diferentes pontos do globo.



Se existir uma correlação entre duas grandezas de um fenómeno a relação funcional pode ser conhecida ou não. Nesta segunda hipótese arbitramos uma dada função para interpretar os dados experimentais e designa-se o processo por ajuste ou *fit*. É nesta fase que se faz o confronto dos modelos com as leis físicas conhecidas, ou se provoca o aparecimento de novas leis.

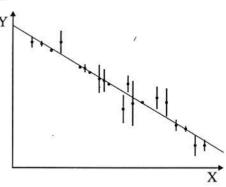
As situações mais frequentes de ajuste são do tipo: i) estimar o melhor valor de uma grandeza medida várias vezes; ii) determinar a constante de proporcionalidade do tipo Y=KX; iii) estabelecer uma relação entre duas grandezas; a mais simples é a recta Y=A+BX; iv) determinar os parâmetros de uma relação não linear como $Y=A+BX^2$ ou $Y=Ke^{AX}$ recorrendo primeiro a uma linearização através de uma transformação de variáveis $(Y=A+BZ \text{ com }Z=X^2 \text{ e ln}Y=\text{ln}K+AX)$ e depois ao ajuste; v) determinação de uma dependência funcional não linearizável do tipo $Y=A+BX+CX^2$.

Quando a relação entre duas ou mais grandezas é linear, o processo para estabelecer uma equação que as relacione é designado por REGRESSÃO LINEAR. Se a relação não for do tipo linear, nem linearizável, os processos para obter a melhor equação são vários e podem designar-se genericamente de regressão não linear. A técnica mais vulgarizada para determinar os parâmetros que melhor adaptam a equação aos valores disponíveis é o MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS.

Método dos mínimos quadrados

É uma técnica geral, que se aplica para determinar os parâmetros de uma relação funcional entre duas ou mais grandezas de um fenómeno ou o valor mais provável de uma única grandeza medida várias vezes. A única exigência do método consiste em que os erros que afectam as medicões sejam aleatórios.

Tendo em atenção os dados experimentais representados na figura, a relação funcional apresentada é do tipo linear, e o bom senso aconselha que se trace uma recta que minimize a soma dos desvios absolutos dos pontos à recta traçada. Contudo, analiticamente minimizar a soma dos módulos dos desvios é mais complicado que a soma dos quadrados dos desvios, donde no método dos mínimos quadrados se optar pela minimização da última função.



Assim, segundo o método dos mínimos quadrados o valor esperado ou o valor mais verosímil para a grandeza Y a partir de N medidas y_i , é aquele que minimiza a soma dos quadrados das diferenças entre Y e y_i , isto é, $D=\Sigma(Y-y_i)^2$ deve ser mínimo.

Uma situação vulgar é a relação linear do tipo Y=A+BX. Apliquemos o método a este caso.

A variável a minimizar é como referimos $D=\sum (A+Bx_i-y_i)^2$, cujo mínimo se obtém exigindo que a primeira derivada em ordem aos parâmetros A e B seja nula. Esta condição conduz a um sistema de duas equações a duas incógnitas A e B, permitindo portanto o cálculo destes parâmetros.

$$A = \frac{-\sum x_i^2 - \sum y_i - \sum x_i - \sum x_i y_i}{\Delta} \qquad \qquad e \qquad \quad B = \frac{-N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$

com $\Delta = N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$

O erro com que se determina A e B é calculado com base na lei de propagação do erro estatístico já analisada.

Se f=f(x, y, z) então
$$\sigma^2(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma^2(y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma^2(z)$$
. No modelo

linear consideramos que cada medição y_i é a concretização de uma variável aleatória de média A+Bx_i. Assim, sua variância estimada a partir do ajuste vale:

$$\sigma^{2}(y_{i}) \equiv \sigma^{2} = \frac{1}{N-2} \sum (y_{i} - A - Bx_{i})^{2}$$

Tomando os parâmetros A e B como funções de yi, tem-se:

$$\sigma^2(A) = \sum \left(\frac{\partial A}{\partial y_i} \right)^2 \, \sigma^2(y_j) \quad \ e \quad \ \sigma^2(B) = \sum \left(\frac{\partial B}{\partial y_i} \right)^2 \, \sigma^2 \, (y_j)$$

Calculando as derivadas parciais
$$\frac{\partial A}{\partial y_j}$$
 e $\frac{\partial B}{\partial y_j}$

$$\frac{\partial A}{\partial y_i} = \frac{\sum x_i^2 - x_j \sum x_i}{\Delta}$$
 e $\frac{\partial B}{\partial y_i} = \frac{Nx_j - \sum x_i}{\Delta}$

e com um pouco de cálculo 1 tem-se finalmente

$$\sigma^{2}(A) = \sigma^{2} \frac{\sum x_{i}^{2}}{\Lambda} \quad e \quad \sigma^{2}(B) = \sigma^{2} \frac{N}{\Lambda}$$

Na prática lidamos com amostras e não com populações. Por isso, para manter uma notação coerente deveríamos escrever a e b que seriam os estimadores dos verdadeiros valores A e B, e em vez das variâncias os seus estimadores $s^2(y_i)$, $s^2(A)$ e $s^2(B)$.

As calculadoras possuem programas que permitem obter os parâmetros de um ajuste linear e os computadores, além dos lineares, possuem em geral programas para uma grande variedade de ajustes não lineares. Para perceber bem como funcionam os programas, aconselhamos que, pelo menos uma ou duas vezes e para ajustes lineares, o estudante faça os cálculos e compare os resultados obtidos com os da calculadora ou computador.

Método dos mínimos quadrados aplicado a Y = KX

Quando se tem uma relação de proporcionalidade Y=KX, para determinar a constante de proporcionalidade K minimiza-se a soma dos quadrados dos desvios $D = \sum (y_i - Kx_i)^2$, como se explicou para o ajuste de uma recta. Da condição de mínimo obtém-se

$$K = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \quad e \quad \sigma(K) = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} \, \sigma(y_i)$$

Este modo de proceder é diferente do de fazer um ajuste linear Y= A+BX, e esperar que o coeficiente A assuma um valor nulo ou que o desvio padrão dele englobe o ponto zero. No caso da proporcionalidade não existe um balanço entre dois parâmetros, um deles é à partida fixo.

Ao ajustar uma função aos dados experimentais pode suceder que a função que se propõe não seja a mais correcta, por exemplo, em vez de uma recta pode ser uma parábola de grande abertura. Para determinar a confiança nos modelos de dependência funcional devemos aplicar critérios de verosimilhança entre os dados de partida e o resultado final. Um dos critérios de ajuste é o teste de χ^2 que referiremos a seguir. Para relações lineares a qualidade do ajuste pode ser dada pelo coeficiente de regressão linear.

$$\begin{split} ^{1}\,\sigma^{2}(A) &= \, \frac{\sigma^{2}}{\Delta^{2}} \, \, \Sigma(\Sigma x_{i}^{2} - x_{j} \Sigma x_{i})^{2} = \frac{\sigma^{2}}{\Delta^{2}} \, \left[N(\Sigma x_{i}^{2})^{2} + \Sigma x_{i}^{2} (\Sigma x_{i})^{2} - 2\Sigma x_{i}^{2} (\Sigma x_{i})^{2} \right] \\ &= \, \frac{\sigma^{2}}{\Delta^{2}} \, \, \Sigma x_{i}^{2} [N\Sigma x_{i}^{2} - (\Sigma x_{i})^{2}] = \, \frac{\sigma^{2}}{\Delta} \, \, \, \Sigma x_{i}^{2} \end{split}$$

Coeficiente de correlação

Ao aplicar o método dos mínimos quadrados partiu-se do pressuposto que entre as duas variáveis existia uma relação linear, Y varia linearmente com X, e que X era conhecido exactamente enquanto que Y vinha afectado de incerteza. Tinha-se então na regressão em X

$$Y = A + BX$$
 e $B = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$

Para aferir em que medida esta relação é válida deve calcular-se o coeficiente de regressão linear que nos permite avaliar se X também varia linearmente com Y. Se a relação for bijectiva, a condição de regressão escreve-se X = A' + B'Y com $B' \neq 0$.

Procedendo como anteriormente para obter A e B tem-se para a regressão em Y

$$B' = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}$$

Resolvendo a 2.ª regressão em ordem a Y e igualando à 1.ª regressão tem-se

$$Y = -\frac{A'}{B'} + \frac{X}{B'} = A + BX$$

Para que a igualdade se verifique é necessário que

$$A = -\frac{A'}{B}$$
 e BB' = 1

Na situação ideal a correlação é igual a um ou de 100%. Ao fazer-se um ajuste real, os parâmetros B e B' têm uma certa incerteza que se reflecte no valor do produto.

Define-se como COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO o valor R = √BB'.

As máquinas de calcular em geral ajustam os valores a uma função por regressão linear e a avaliação final do ajuste é dada pelo valor do coeficiente de correlação. Este parâmetro não nos fornece no entanto, qualquer informação sobre a confiança com que o modelo linear pode ser usado para estimar valores de Y a partir de X ou sobre a variância dos parâmetros estimados.

Intervalos de confiança na regressão linear

Quando se usa o modelo linear Y=A+BX obtido pelo método dos mínimos quadrados é necessário ter em conta que de facto o que se obtém são estimadores *a* e *b*.

O valor estimado y=a+bx é uma variável aleatória com média Y=A+BX e variância função de x calculada a partir de

$$\sigma_y^2(x) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(\langle x \rangle - x)^2}{\sum (x_i - \langle x \rangle)^2} \right]$$

O intervalo de confiança para o verdadeiro valor Y pode ser obtido a partir da variável

$$t = \frac{a + bx - Y}{\sigma_{v}(x)}$$

que tem uma distribuição t de Student com n-2 graus de liberdade. Recorrendo à tabela da distribuição e escolhendo um grau de confiança α adequado, por exemplo 90% obtém-se o valor crítico t_0 . Isto significa ter uma probabilidade $P(-t_0 \le t \le t_0) = \alpha$ ou um intervalo de confiança α dado por

$$a+bx-t_0\sigma_v(x) \le Y \le a + bx+t_0\sigma_v(x)$$

Teste do X2

O teste do χ^2 é um dos testes mais importantes no que se refere à frequência de uma dada medida e à validade de um ajuste. A aceitação ou não da hipótese de que o ajuste ou medida são válidos pode incorrer em dois tipos de erros:

- aceitar a hipótese quando é falsa;
- rejeitar a hipótese sendo esta verdadeira.

Define-se nível de significância $(1-\alpha)$ de um teste como a probabilidade de rejeitar a hipótese quando ela é verdadeira. É desejável ter um valor baixo para $1-\alpha$, mas não demasiado baixo para não aumentar o risco de cometer o outro tipo de erro. Os valores mais comuns são de 5% ou 10%. No teste χ^2 recorremos a tabelas que fornecem o valor crítico χ_0^2 para vários níveis de significância.

A hipótese deve ser rejeitada desde que $\chi^2 > \chi_0^2$.

Aplicação do teste \(\chi^2\) em medidas repetidas

Quando se dispõe de uma amostra de dimensão N que se admite obedecer a uma dada distribuição ou modelo de ajuste, é possível dividir o intervalo de dispersão dos valores em n subintervalos. Para cada um desses intervalos i conta-se o número de pontos da amostra, a frequência observada f_i^{medida} , e calcula-se pelo método das probabilidades a frequência esperada $f_i^{esperada}$. Se for p_i a probabilidade calculada, tem-se $f_i^{esperada} = Np_i$.

Para grandes amostras a variável

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i^{esperada} - f_i^{medida})^2}{f_i^{esperada}}$$

tem no limite uma distribuição χ^2 com n-1 graus de liberdade (retira-se um grau de liberdade devido à exigência de normalização, isto é, Σ f_i = N). Se a probabilidade teórica depende de r parâmetros que devem ser estimados a partir da amostra, o número de graus de liberdade é n-1-r.

Ao fazer diversas medidas x_i de uma dada grandeza e para saber se a dispersão observada é aceitável ou verosímil pode considerar-se que esta dispersão é do tipo gaussiano, atendendo à diversidade de efeitos que afectam a medição e ao teorema do limite central.

Assim, se estimarmos a média $\langle x \rangle$ e o desvio padrão s(x), podemos aplicar o teste do χ^2 com n-3 graus de liberdade, em que n é o número de intervalos considerados no cálculo das frequências.

Aplicar o teste do χ^2 significa começar por calcular as frequências experimentais num dado intervalo (em geral toma-se como largura do intervalo o valor do desvio padrão, uma fracção ou um múltiplo deste), e as frequências previstas pela distribuição normal no mesmo intervalo. Com estes valores determina-se o valor da grandeza χ^2 .

A dispersão nas frequências só será aceite se este valor for inferior ao valor crítico χ_0^2 , isto é, se $\chi^2 < \chi_0^2$. O valor χ_0^2 obtém-se nas TABELAS em função do n.º de graus de liberdade e do nível de significância $(1-\alpha)$ escolhido.

Consideremos um exemplo para melhor compreender que tipo de controlo nos permite o teste do χ^2 . Numa amostra de 100 observações a média calculada é <x> e o desvio padrão s. Calculouse o número de observações que se situam nos intervalos definidos pelos desvios \pm s, \pm 2s e \pm 3s e compararam-se as frequências de ocorrência experimentais com as previstas teoricamente pela distribuição normal. Os resultados foram:

intervalo dos desvios	frequência medida	frequência esperada
[-s , 0]	$f_{lmed} = 36.1$	$f_{1esp} = 34.15$
[-2s,-s]	$f_{2\text{med}} = 36.1$	$f_{2esp} = 34.15$ $f_{2esp} = 13.60$
[-3s, -2s]	$f_{3med} = 3.9$	$f_{3esp} = 2.10$
[0,s]	$f_{4med} = 25.9$	$f_{4esp} = 34.15$
[s, 2s]	$f_{5med} = 15.8$	$f_{5esp} = 13.60$
[2s, 3s]	$f_{6med} = 2.0$	$f_{6esp} = 2.10$

Calculando a variável χ^2 obteve-se o valor 4.6. Escolhendo um nível de significância $(1-\alpha)$ de 5%, obtém-se para 3 graus de liberdade o valor crítico χ_0^2 de 7.815, $P(\chi^2 > \chi_0^2) = 0.05$. Como o valor obtido é inferior a hipótese é aceite, isto é, os valores distribuem-se de acordo com uma distribuição gaussiana.

No caso particular de medições de uma grandeza que obedece a uma estatística particular, como seja a desintegração radioactiva, que segue a estatística de Poisson, os parâmetros como a média e o desvio padrão assumem valores particulares. O desvio padrão σ é dado por $\sigma=\sqrt{n}$. Ao aplicar o teste do χ^2 fazemos um duplo teste: controla-se se a dispersão tem a probabilidade prevista pela gaussiana e, se os intervalos forem feitos com base em $\sigma=\sqrt{n}$, simultaneamente testamos se a estatística de Poisson é aceitável. Devemos ter em atenção, que neste caso o número de graus de liberdade é n-2, porque impusemos que $\sigma=\sqrt{n}$, só a média foi calculada a partir da amostra.

Aplicação do teste x2 em ajustes

Quando ajustamos uma função Y=Y(x) a um conjunto de N dados x_i e y_i , em que os valores x_i são exactos e os y_i são medidos com um certo erro, podemos testar a validade do ajuste a partir do valor do somatório

$$\chi^2 = \sum \frac{[y_i - Y(x_i)]^2}{\sigma_i^2}$$

Recordemos que a soma do quadrado de variáveis aleatórias com distribuição normal reduzida obedece à distribuição de χ^2 , e daí a designação deste somatório.

O número de graus de liberdade que se deve considerar é dado pelo número de dados menos os m parâmetros da função ajustada aos pontos experimentais, incluindo a normalização se necessário.

Ao ajustar uma recta a um conjunto de 10 pontos experimentais o número de graus de liberdade é 8=10-2, pois a partir dos dados determinaram-se os dois parâmetros A e B da recta.

Uma forma rápida de testar o ajuste é usar a variável χ^2 reduzida que se obtém dividindo χ^2 pelo número de graus de liberdade n. Como o χ^2 reduzido tem média 1 e variância $\frac{2}{n}$, considera-se um bom ajuste aquele em que $\frac{\chi^2}{n}$ é próximo de 1.

Valores muito elevados para χ^2 (muito maior que o n.º de graus de liberdade) podem significar que os erros estão subestimados ou que a função escolhida não descreve bem os dados.

Um χ^2 pequeno pode significar que os erros estão sobrestimados, ou que os dados foram selecionados de modo a obter só determinados valores ou muita sorte.

O teste χ^2 não é muito indicativo da verosimilhança do ajuste linear Y=A+BX quando os desvios σ não são medidos, mas estimados a partir do ajuste. Neste caso obtemos sempre um valor de $\chi^2=n-2$, o qual não dá qualquer informação. O ajuste será sempre bom!

Devido à importância dos ajustes e à sua avaliação através do teste do $\overline{\chi}^2$, vamos de seguida desenvolver um exemplo.

Pretende-se determinar as características do movimento de um corpo que se move presumivelmente sem atrito ao longo de uma pista horizontal. Para este efeito, é marcada a posição do corpo de segundo a segundo, e em seguida é medida a sua distância em relação à origem. Tratando-se de uma experiência de uma única medição para cada posição, devemos estimar o erro estatístico ou o limite superior do erro. O tempo é marcado electronicamente com um cronómetro de grande precisão que por isso poderemos considerar exacto. De segundo a segundo um dispositivo mecânico é accionado por forma a marcar, com um traço de tinta no chão da pista, a posição do móvel. A distância é medida com grande precisão, erro de leitura de 1 cm, por intermédio de um distomat, sistema usado em topografia e que se baseia na medição do tempo de percurso de um feixe de infravermelhos que se reflecte num alvo apropriado. No entanto, o procedimento de marcação da posição não é instantâneo e introduz por isso uma

imprecisão na medida da distância que é superior ao erro de leitura. O erro estatístico estimado subjectivamente a partir da dimensão de cada traço vale 1 m. Na tabela apresenta-se o resultado da medição de 25 posições do móvel.

t (s)*	x±1** (m)	t (s)*	x±1** (m)
3	30	16	135
4	37	17	142
5	45	18	150
6	53	19	156
7	64	20	165
8	70	21	172
9	78	22	178
10	88	23.	186
11	96 .	24	192
12	103	25	201
13	110	26	206
14	121	27	211
15	129		

(*) considerado exacto, (**) erro estatístico estimado

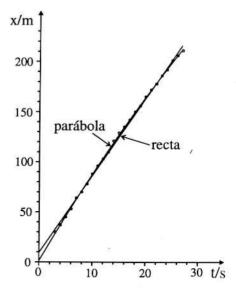
A representação gráfica destes dados sugere uma dependência linear entre a posição e o tempo, ou seja, o movimento pode ser uniforme $x=x_0+vt$. A melhor recta que ajusta os dados é calculada por regressão linear aplicando o método dos mínimos quadrados. Obtêm-se os seguintes resultados:

$$A=x_0=9.5 \text{ m}$$
 $\sigma(A)=1.2 \text{ m}$ $B=v=7.68 \text{ m s}^{-1}$ $\sigma(B)=0.07 \text{ m s}^{-1}$

portanto x=9.5+7.68t com x em metro e t em segundo.

O coeficiente de correlação desta regressão linear é R=0.999. O erro estatístico estimado a partir da dependência linear é s=2.5 m, valor que é mais do dobro do estimado experimentalmente, embora de forma subjectiva. A representação gráfica desta recta mostra que o ajuste é bom embora existam desvios sistemáticos que sugerem que talvez a dependência linear não seja a melhor forma de descrever os dados experimentais. Assim, observa-se que para os tempos entre os 10 e 20 s a posição medida está acima da recta enquanto que nas extremidades do gráfico sucede precisamente o oposto. A qualidade do ajuste é avaliada através do χ^2 que tem o valor de 146.6. Com 25 dados e ajustando os dois parâmetros da recta têm-se 23 graus de liberdade. O χ^2 reduzido vale 6.4 e o ajuste é bastante mau apesar do excelente valor do coeficiente de correlação. Consultando as tabelas, conclui-se que o nível de significância deste ajuste é inferior a 0.1%. Como foi discutido, este facto pode ser interpretado de diferentes maneiras. Ou os erros na medição se encontram subestimados, ou então a dependência linear não é a mais adequada para descrever os dados.

Deve por isso, ensaiar o ajuste dos dados a um polinómio do 2.º grau, $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, representando um movimento uniformemente retardado. Obtém-se a parábola x=1.40+9.09t- $\frac{1}{2}$ 0.094t². Como se observa pelo gráfico o ajuste parece mais equilibrado para todos os pontos, o que se reflecte no desvio padrão estimado s=1.1 m e no valor de χ^2 =27.3. O número de graus de liberdade é agora 22=25-3 e o x² reduzido é 1.2. O nível de significância do ajuste é agora de 20%, o que é bastante satisfatório. A qualidade do ajuste polinomial do 2.º grau é bastante superior à do ajuste linear. Podemos dizer com confiança que o movimento é uniformemente retardado tendo como causa provável a existência de um pequeno efeito de atrito.



Com este exemplo pudemos verificar como o teste do χ^2 é um auxiliar precioso na aferição da qualidade de um ajuste linear, enquanto que o coeficiente de correlação apenas dá uma informação qualitativa que pode ser até enganosa pois não toma em consideração a precisão com que se realizam as medições. Como vimos, um valor elevado para o χ^2 significou neste caso que o ajuste linear não era o mais adequado à descrição dos resultados experimentais, sendo preferível uma relação funcional através de um polinómio do $2.^{\circ}$ grau.

Gráficos

O estudo de uma grandeza em função de outras pode ser feito qualitativamente recorrendo ao traçado de gráficos. Se os gráficos forem bem feitos é inclusive possível um estudo quantitativo.

Os gráficos podem ser construídos a partir de relações funcionais conhecidas ou de conjuntos de dados experimentais em que uma ou as duas variáveis são conhecidas com um dado erro. Na maioria dos casos que referiremos os gráficos serão bidimensionais, isto é gráficos que representam uma grandeza em função de outra.

O interesse dos gráficos é múltiplo. Mencionemos algumas vantagens:

- visualiza como uma grandeza varia em relação à outra, evidenciando se é uma relação linear ou não, rápida ou lenta, se existem descontinuidades, se existem valores experimentais com grandes oscilações de comportamento;
- permite determinar valores intermédios de uma das grandezas para um dado valor da outra, sem sermos obrigados a novos cálculos ou medidas experimentais.

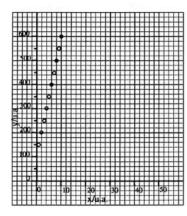
Sempre que se faz um gráfico deve proceder-se do seguinte modo:

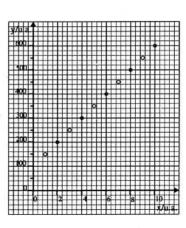
- escolher as grandezas a representar em abcissa e em ordenada. Cada eixo deve ser identificado na sua extremidade pela designação da grandeza representada e da unidade utilizada, separadas pelo símbolo /;
- escolher criteriosamente as escalas de modo ao aspecto global ser harmonioso:
 - evitar a aglomeração ou dispersão excessiva dos pontos;
 - a precisão de marcação dos pontos nos dois eixos deve ser equivalente;
 - os gráficos não têm de começar obrigatoriamente na coordenada (0,0);
 - as escalas dos eixos n\u00e3o t\u00e8m de ser obrigatoriamente da mesma natureza, se conveniente pode usar-se uma escala milim\u00e9trica e a outra logar\u00eattmica;
- se os valores são acompanhados de erro, estes devem ser representados no gráfico na forma de barras horizontais e verticais, conforme reflectem o erro na abcissa ou na ordenada. A amplitude das barras é proporcional ao erro de acordo com a escala, e marcam-se simetricamente a partir do valor;
- o número de pontos nos quais se baseia o traçado deve ser, na medida do possível, suficientemente grande para não haver dúvidas ao fazer o desenho;
- dar um título sucinto ao gráfico;
- os computadores possuem programas que permitem traçar gráficos com base nos dados, contudo numa fase de aprendizagem os gráficos devem ser feitos manualmente.

Gráficos de relações funcionais

A relação mais simples é a recta y = a + bx.

A figura dá um exemplo de um bom traçado, à direita, e de um mau, à esquerda, para a situação de a = 100, b = 50 e x a variar de 1 a 10. Considera-se x e y dados em unidades arbitrárias que se representam por u.a.

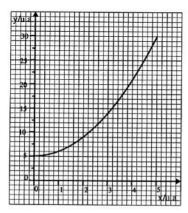


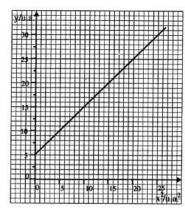


Dos gráficos traçados correctamente podemos obter diversas informações sendo a mais corrente o declive da recta e a ordenada na origem. Se no exemplo dado na figura anterior não soubéssemos o valor do declive da recta, este seria facilmente determinado a partir da razão entre a diferença de ordenadas e a diferença de abcissas para dois pon-

tos do gráfico $b=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. A ordenada na origem é dada a partir do valor que y assume para x=0 ou, uma vez conhecido o declive, fazendo $a=y_1-bx_1$ para um dos pontos do gráfico.

Relação não linear, mas linearizável graficamente como $y=ax^2+b$





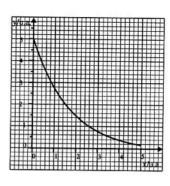
No gráfico da esquerda com as escalas lineares em y e x obtém-se uma parábola enquanto que no da direita usando em abcissas directamente os valores de x^2 se obtém uma recta. A partir desta recta, os parâmetros a e b da relação funcional são obtidos como anteriormente.

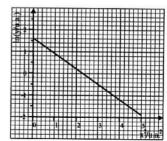
Relação não linear, mas linearizável como y=yoe -ax



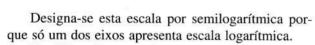
Nesta situação várias opções são possíveis, para concretizar considere-se que $y_0=3$, a=0.6 e x varia entre 0 e 5:

- traçar o gráfico normalmente depois de saber entre que valores varia x e y para escolher as escalas, como se mostra no gráfico. A dependência funcional não é clara, apenas y₀ pode ser estimado directamente a partir do gráfico;
- linearizar primeiro a expressão, com uma transformação de variáveis do tipo logarítmico em que Y=ln y, Y_o=ln y_o, donde a equação anterior assumir a forma de Y=Y_o-ax. Estamos perante uma situação linear que é representada no gráfico. A relação funcional é explícita e Y_o e a medem-se directamente;

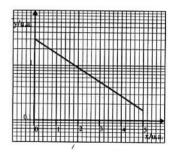




metro a é dado a partir de $a = -\frac{\ln y_2 - \ln y_1}{x_2 - x_1}$ re v_0 lê-se directamente.



Na última figura o eixo X é linear e o Y é logarítmico.



Se a relação anterior fosse a ddp aos terminais de um condensador em função do tempo $V=V_0e^{-\frac{t}{RC}}$, o 2.º e 3.º gráfico permitiriam determinar o coeficiente angular ou declive da recta, o qual daria o valor de 1/RC. Deve ter-se em atenção que se tomam os logaritmos das ordenadas; não podem ser usados os valores lidos directamente num eixo logarítmico!

$$\frac{1}{RC} = \frac{\Delta \ln V}{\Delta t} = \frac{\ln V_1 - \ln V_2}{t_1 - t_2} = \frac{\ln y_1 - \ln y_2}{x_1 - x_2}$$

Numa escala logarítmica o eixo tem anotados segmentos proporcionais ao logaritmo do número numa dada base. O número um corresponde a um segmento de comprimento zero $(\log_b 1=0)$, o número dois a um segmento proporcional a $\log_b 2$, o dez a um proporcional a $\log_b 10$ e 10^n a um segmento proporcional a $\log_b 10$. Este segmento é sem dúvida mais curto que um proporcional a 10^n . As escalas logarítmicas são também de grande utilidade quando uma grandeza varia ao longo de várias ordens de grandeza. Note-se que neste tipo de escala não existe o zero, porque logaritmo de zero é infinito e as grandezas com valores negativos também não são representáveis.

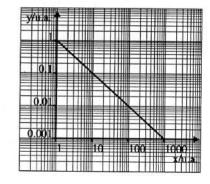
Este tipo de escala evita o cálculo dos logaritmos de y como na segunda situação, evitando consequentemente erros de cálculo. Esta opção é a usada no último gráfico.

Quando se passa de uma escala logarítmica a outra basta utilizar um factor de escala porque $x=a^{\log_a x}=b^{\log_b x}$ e portanto, $\log_a x=\log_a b\log_b x=c^{\log_b x}$, e por isso é indiferente a base que é usada na representação.

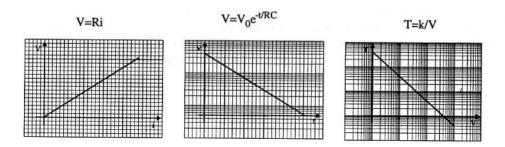
Outras relações não lineares frequentes são por exemplo $y=\log x$, $\log y=a+\log x$,

$$y = \frac{k}{x}$$
, $y = a + bx^2$, etc...

Na maioria dos casos são relações linearizáveis. No caso de $y = \frac{k}{x}$ aplicando logaritmos, temos uma relação linear do tipo log $y = \log k - \log x$. O uso de uma escala bilogarítmica ou log-log permite uma representação cómoda da relação anterior como se mostra na figura em que x varia entre 1 e 1000 e k = 1. Assim, o declive é de \pm 45°.



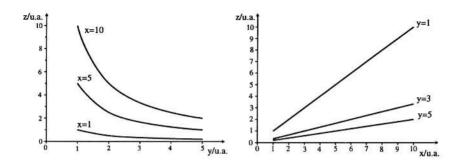
As três figuras seguintes apresentam gráficos de relações funcionais nos três tipos de escala referidos



Relação entre três grandezas.

Consideremos a relação zy=ax

Se continuarmos a fazer uma representação plana só conseguimos representar a variação de duas grandezas conservando a terceira constante. Para representar o fenómeno na sua globalidade devemos fazer pelo menos dois gráficos para vários valores da grandeza fixada. Neste caso por exemplo z em função de y para x=1, x=5 e x=10 e de z em função de x para y=1, y=3 e y=5. A relação entre y e x pode ser obtida dividindo o primeiro gráfico pelo segundo. O exemplo dado considera que a=1, x varia entre 1 e 10 e y entre 1 e 5.



Um fenómeno que envolve mais de duas grandezas é o comportamento de um gás em função da pressão, volume e temperatura, relação conhecida por equação dos gases perfeitos dada por pV=nRT. Outro exemplo é a frequência de ressonância de um circui-

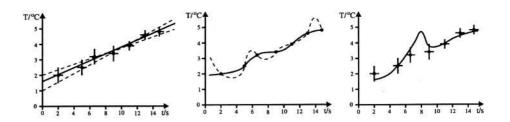
to LC,
$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$
.

Gráficos sobre valores experimentais

Quando se dispõe de um conjunto de valores experimentais (x_i, y_i) , pode-se, com base numa escala conveniente, que tome em consideração os limites entre os quais ambas as grandezas variam, traçar um gráfico de y_i em função de x_i . Se uma ou ambas as medidas são conhecidas com o respectivo erro, este deve igualmente ser representado no gráfico e revela-se de grande utilidade quando se ajusta uma função aos dados experimentais. Consideremos a seguinte tabela de valores experimentais da temperatura de um corpo em função do tempo.

t±∆t (s)	T ± ΔT (°C)	T/°C ↑								2
2.0±0.6	2.0±0.5	5-						-	⊢ ⁻	-
5.0±0.6	2.5±0.5	4 -					ı	-		
6.6±0.6	3.2±0.5	3-			. +	7				
9.0±0.6	3.4±0.5		-1		- '					
11.0±0.6	3.9±0.3	2 -	1	,						
13.0±0.6	4.6±0.3	1-								
14.8±0.6	4.8±0.3	0 1	2	4	6	8	10	12	14	t/s

Múltiplos gráficos podem ser traçados a partir dos dados. Consideremos alguns exemplos.



Vejamos as conclusões ou análises que cada um deles proporciona.

O gráfico da esquerda, com os respectivos erros assinalados na forma de barras verticais e horizontais, permite prever uma relação linear entre as duas grandezas (linha a cheio), se bem que uma certa incerteza exista, como visualizado pelas linhas a tracejado, as quais são traçadas unindo as extremidades das barras de erro que mais se afastam da recta traçada. A constante de proporcionalidade entre as duas grandezas pode ser calculada a partir do declive da recta traçada manualmente. O seu valor é dado por

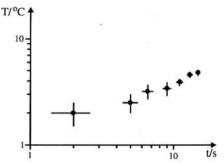
$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$
 e a ordenada na origem é b.

A partir do declive das rectas de inclinação máxima e mínima traçadas considerando as barras de erro (rectas a tracejado) pode calcular-se aproximadamente o erro nos parâmetros *a* e *b* dados respectivamente por

$$\frac{a_{\text{max}} - a_{\text{min}}}{2}$$
 e $\frac{b_{\text{max}} - b_{\text{min}}}{2}$

O gráfico do meio, desenhado sem as barras de erro, põe mais dúvidas ao traçado de uma curva. As representações feitas que se limitam a unir os pontos experimentais são fantasiosas. É pouco provável um dado fenómeno ter uma evolução tão tortuosa. Mesmo sem barras de erro pode-se prever que a variação mais justa seja a recta. O gráfico à direita mostra uma outra hipótese que só pode adquirir plausibilidade se forem determinados mais pontos na zona de comportamento irregular.

Muitas vezes, para analisar o tipo de relação, mesmo que supostamente linear, fazem-se representações semilogarítmicas ou mesmo log-log das variáveis. Neste exemplo em log-log detecta-se um comportamento menos regular para o primeiro ponto (que já indiciava uma ligeira anomalia no traçado normal) cuja interpretação implicaria a obtenção de mais dados.

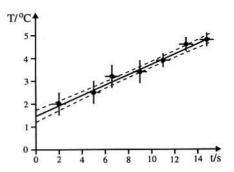


Será de muito interesse o gráfico que se pode fazer a partir de um prévio ajuste de uma recta, T = at + b, aos pontos experimentais (t_i, T_i) usando o método dos mínimos quadrados.

Os valores que se obtêm são:

$$a=0.225 \pm 0.014$$
 e $b=1.51 \pm 0.13$

Ao traçarmos a recta vemos que ajusta bem os dados experimentais, como o confirma o valor de χ^2 =0.72. No gráfico estão também representados a tracejado os intervalos de confiança a 90%, para o ajuste.



128

Cábula para análise de dados

Parâmetros estatísticos e distribuições

População	Discreta	Contínua
Probabilidade	x_i, p_i	x, p(x)
Média μ	$\mu = \sum x_i p_i$	$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx$
Variância σ^2	$\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i$	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx$
		77

Desvio padrão σ

Amostra de n elementos x_i

Média estimada
$$\bar{x} \equiv \langle x \rangle$$
 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i} x_{i}$
Variância estimada s^{2} $s^{2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i} (x_{i} - \bar{x})^{2}$

Desvio padrão estimado s

Desvio padrão da média
$$s_m = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Média ponderada
$$\bar{x}$$
 $< x > = \frac{\sum \frac{x_i}{s_i^2}}{\sum \frac{1}{s_i^2}}$

Num histograma de n elementos com m classes x_i de frequências ω_i

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i \qquad \qquad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{m} \omega_i (x_i - \overline{x})^2$$

Distribuição binomial
$$P(n,p,N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

Distribuição de Poisson
$$P(n,\mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$
 $(\mu = Np)$

Distribuição normal ou de Gauss
$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

normal reduzida $x' = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $P(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Distribuição t de Student
$$f(t,n) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Variável t de Student
$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{s_m}$$

$$P(\chi^{2},n) = \frac{2^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \chi^{2^{\frac{n}{2}-1}} e^{-\frac{\chi^{2}}{2}}$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sigma_i^2}$$

$$\chi^2 = \sum_{i}^{k} \frac{(f_i^{medido} - f_i^{esperado})^2}{f_i^{esperado}}$$

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(y_i - Y(x_i))^2}{\sigma^2}$$

Intervalos de confiança na distribuição normal

$$[\mu - \sigma, \mu + \sigma] = 68.3\%$$

$$[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma] = 95.5\%$$

$$[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma] = 99.7\%$$

Resultado de uma medição

[Medida] = [valor da grandeza] ± [erro] [unidade]

valor mais provável: média $\overline{x} = \langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

Medição com n>10

erro estatístico: desvio padrão da média
$$s_m = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Medição com 1<n<10

erro: estimador do erro estatístico ou limite superior do erro média dos desvios em relação à média: $\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|$ máximo desvio em relação à média: $\Delta x = \max\{|x_i - \overline{x}|\}$

Medição com n = 1

erro Δx : o máximo de entre

- estimador do erro estatístico

Erro relativo:
$$\frac{s_m}{\overline{x}} \times 100\%$$
 ou $\frac{\Delta}{\overline{x}} \times 100\%$ ou $\frac{\Delta x}{\overline{x}} \times 100\%$

Propagação dos erros

f(x,y)

Erro estatístico

$$\sigma^{2}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{2} \sigma^{2}(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{2} \sigma^{2}(y)$$

$$f = x \pm y$$
 $\sigma^2(f) = \sigma^2(x) + \sigma^2(y)$

$$f = x \cdot y \qquad \frac{\sigma^2(f)}{f^2} = \frac{\sigma^2(x)}{x^2} + \frac{\sigma^2(y)}{y^2}$$

$$f = \frac{x}{y} \qquad \frac{\sigma^2(f)}{f^2} = \frac{\sigma^2(x)}{x^2} + \frac{\sigma^2(y)}{y^2}$$

$$f = x^n \qquad \frac{\sigma^2(f)}{f^2} = n^2 \frac{\sigma^2(x)}{x^2}$$

$$f = \operatorname{sen} x$$
 $\sigma^2(f) = \cos^2 x \cdot \sigma^2(x)$

$$f = p \ln x$$
 $\sigma^2(f) = p^2 \cdot \frac{\sigma^2(x)}{x^2}$

Limite superior do erro

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y$$

$$\Delta f = \Delta x + \Delta y$$

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$$

$$\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta y}{|y|}$$

$$\frac{\Delta f}{|f|} = n \, \frac{\Delta x}{|x|}$$

$$\Delta f = |\cos x| \, \Delta y$$

$$\Delta f = |p| \frac{\Delta x}{x}$$

Ajuste linear de n dados experimentais (x_i, y_i)

Mínimos quadrados aplicados ao ajuste Y = A + BX

$$A = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n\Delta}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{\sigma^2}{\Delta} \sum x_i^2$$



$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\Delta}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{\sigma^2}{\Lambda} n$$

$$\Delta = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$$

$$\Delta = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \qquad \sigma^2 = \sigma^2 (y_i) = \frac{1}{n-2} \sum (y_i - A - Bx_i)^2$$

Para o ajuste X = A' + B'Y basta fazer a troca $x \mapsto y$ nas expressões anteriores. Coeficiente de correlação $R = \sqrt{BB'}$

Mínimos quadrados aplicados ao ajuste Y = KX

$$K = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$\sigma_K = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} \ \sigma(y_i)$$

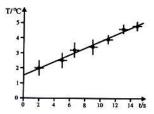


Representação de dados

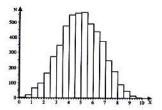
Tabelas

t(s)	Δt (s)	T(°C)	ΔT(°C)
2.0	0.6	2.0	0.5
5.0	0.6	2.5	0.5
6.6	0.6	3.2	0.5
9.0	0.6	3.4	0.5
11.0	0.6	3.9	0.3
13.0	0.6	4.6	0.3
14.8	0.6	4.8	0.3

Gráficos



Histogramas



LEITURA 2

Estudo do Pêndulo Simples

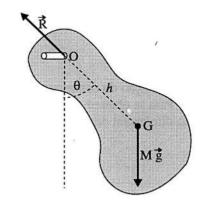
Equações básicas e pequenas oscilações

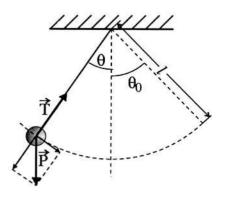
D esigna-se genericamente por pêndulo um sólido que pode girar em torno de um eixo horizontal sujeito simplesmente à acção do seu peso e das forças de ligação.

Para um corpo de massa M suspenso, as forças aplicadas resumem-se ao peso $M\vec{g}$ aplicado no centro de gravidade G e à força de ligação \vec{R} exercida no eixo O. Na posição de equilíbrio o centro de gravidade situa-se na vertical do eixo de suspensão. Esta configuração designa-se por pêndulo composto.

O pêndulo simples é uma simplificação do pêndulo anterior, sendo constituído por uma massa de pequena dimensão suspensa na extremidade de um fio inextensível de massa desprezável. Neste caso a força de ligação é a tensão \vec{T} no fio de comprimento l_t . Sendo a massa esférica de raio r, o comprimento do pêndulo vem dado por $l=l_f+r$. Se afastarmos a massa da sua posição de equilíbrio e a abandonarmos sem velocidade inicial, ela oscilará no plano vertical descrevendo um arco de circunferência. A amplitude do afastamento da vertical é medido pelo ângulo θ ou pelo comprimento do arco $s = l\theta$. O movimento é regido pela equação de Newton $\vec{F} = M\vec{a}$ em que a força resultante \vec{F} e a aceleração \vec{a} são grandezas vectoriais.

Analisando a figura podemos escrever





$$M\vec{g} + \vec{T} = M\vec{a}$$
 ou
$$\begin{cases} -Mg \operatorname{sen}\theta = M\frac{d^2(l\theta)}{dt^2} \\ -Mg \operatorname{cos}\theta + T = M\frac{v^2}{l} \end{cases}$$

se θ for pequeno ($\theta < 5^{\circ}$) então sen $\theta \approx \theta$ e a equação precedente assume a forma

$$Mg\theta + Ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$
 ou $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$

Esta é a equação do oscilador harmónico simples cuja solução geral é do tipo

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$
 com $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{I}}$

sendo θ_0 a amplitude máxima do movimento, ω_0 a frequência angular e φ a fase inicial que depende da posição inicial de lançamento, $\theta(0) = \theta_0 \cos \varphi$.

O período de oscilação $T_0 = 2\pi/\omega_0$ vem então dado por

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

sendo função do comprimento do pêndulo e do valor da aceleração da gravidade.

Para se obterem as expressões precedentes basta substituir a solução geral na equação diferencial do oscilador harmónico simples. Na realidade

$$Mg\theta_0\cos(\omega_0 t + \phi) + Ml\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\theta_0\cos(\omega_0 t + \phi)\right) = 0$$

conduz a $g = l\omega^2$ e portanto ao valor acima atribuído para T_0 . Para as pequenas oscilações o período não depende de θ e designamo-las por oscilações isócronas.

Período para grandes oscilações

Se não usarmos a aproximação sen $\theta \approx \theta$ estabeleceremos a equação diferencial que rege o movimento para qualquer ângulo de oscilação. Neste caso o período do pêndulo é uma função também da amplitude máxima do movimento, $T = T(\theta_0)$.

Um modo de determinar $T(\theta_0)$ é estudar o movimento do pêndulo considerando a conservação de energia.

A energia total do pêndulo em qualquer ponto da sua trajectória vem dada por

$$E = \frac{1}{2} M l^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + Mgl(1 - \cos\theta) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2 \cos\theta + \frac{2E}{Ml^2} - \frac{2g}{l}$$

Se o pêndulo for abandonado sem velocidade inicial com um afastamento inicial θ_0 a expressão anterior pode tomar então a forma

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Note-se que para evitar a circulação do pêndulo tem que se ter $-\pi < \theta_0 < \pi$ mas se o fio não for rígido, deve-se ter $-\pi/2 \le \theta_0 \le \pi/2$. O período T do pêndulo pode assim ser calculado como quatro vezes o tempo que ele demora a ir da posição de equilíbrio $\theta = 0$ à posição de amplitude máxima $\theta = \theta_0$. Da expressão anterior podemos escrever

$$dt = d\theta / \sqrt{2 \omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0)}$$

e o período obtém-se pelo integral

$$T = \frac{4}{\sqrt{2} \omega_0^2} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Este integral não se pode resolver analiticamente. No entanto a sua solução encontra-se tabelada para diferentes valores de $K = \text{sen}(\theta_0/2)$ e admite um desenvolvimento sob a forma de uma série dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^2 K^{2n} \right]$$

Explicitando os primeiros termos tem-se

$$T = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \frac{9}{64} \operatorname{sen}^4 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) + \dots \right]$$

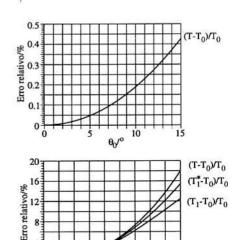
Para amplitudes moderadas e atendendo à precisão que é possível obter no laboratório, basta considerar apenas a forma aproximada do 1.º termo fazendo sen $^2\alpha \approx \alpha^2$

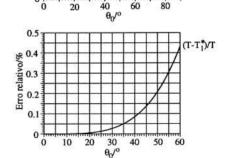
$$T_1^* = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 \right)$$

Pelo exame dos dois gráficos ao lado, podese concluir que o princípio do isocronismo das pequenas oscilações resultante da aproximação sen $\theta \approx \theta$ apenas é válido dentro dos seguintes limites:

erro relativo	amplitude
0.01%	2°
0.1%	7°
1%	25°
8%	60°

Observe-se ainda como o uso do primeiro termo sob a forma aproximada T_1^* permite obter para o período um valor com erro inferior a 0.1% até à amplitude de 42°, sendo esta expressão mais precisa que a aplicação do 1.º termo sem aproximação $T_1 = T_0 \left[1 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_0}{2} \right) \right]$.





Efeitos que alteram o valor do período

O estudo correcto do comportamento do pêndulo deve ter em atenção outros factores para além da amplitude máxima da oscilação, se bem que com contribuições distintas para o valor do período. Os outros efeitos a ter em consideração seriam a impulsão do ar, a massa do fio de suspensão e o atrito.

A acção da impulsão do ar sobre a massa do pêndulo provoca a diminuição do valor do peso do pêndulo e portanto do valor da força que provoca o movimento. A força efectiva passaria assim a ser

$$F' = (M - m_{ar})g = Mg(1 - m_{ar}/M) = Mg'$$

e que pode ser interpretada pela acção de uma aceleração da gravidade efectiva função das densidades do pêndulo e do ar

$$g' = g \left(1 - \frac{m_{ar}}{M} \right) = g \left(1 - \frac{\rho_{ar}}{\rho_{pend}} \right)$$

A alteração no valor do período correspondente é dada por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g\left(1 - \frac{\rho_{ar}}{\rho_{pend}}\right)}} = T_0 \left(1 - \frac{\rho_{ar}}{\rho_{pend}}\right)^{-1/2} \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_{ar}}{\rho_{pend}}\right)$$

Para um pêndulo de latão de densidade 8.4 e com a densidade do ar de valor 1.2×10^{-3} , ter-se-á $T=T_0\Big(1+\frac{1}{14000}\Big)$. Isto corresponde a uma correcção de apenas 0.007% que se poderá desprezar. Numa medida integrada num intervalo de tempo considerável como um dia, este efeito introduz um erro de 6 s.

O pêndulo ideal tem uma massa M e o fio de suspensão uma massa m considerada nula o que não é verdade, se bem que m seja muito inferior a M (m < M). Para estudar o efeito do valor não nulo de m convém considerar agora o pêndulo como composto (fio rígido) para o qual o período vem dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{red}}{g}}$$
 com $l_{red} = \frac{I}{(M+m)h}$

onde I é o momento de inércia do pêndulo em relação ao ponto de suspensão, h é a distância entre o eixo de oscilação e o centro de gravidade e l_{red} é o comprimento reduzido do pêndulo composto. Para um fio de comprimento l e tomando a massa do pêndulo M como pontual tem-se

$$h = l \left(\frac{\frac{m}{2} + M}{\frac{m}{m + M}} \right) \qquad \text{e} \qquad I = l^2 \left| M + \frac{m}{3} \right|$$

135

e

$$l_{red} = l \quad \frac{M + \frac{m}{3}}{M + \frac{m}{2}} = l \quad \frac{1 + \frac{1}{3} \frac{m}{M}}{1 + \frac{1}{2} \frac{m}{M}}$$

desenvolvendo em série obtém-se $l_{\text{red}}^{1/2} \approx l \left(1 - \frac{1}{12} \frac{m}{M}\right)$

O efeito no período é assim dado aproximadamente por

$$T = T_0 \left(1 - \frac{m}{12M} \right)$$

Para um fio de massa 1 g e um pêndulo de 100 g, a correcção correspondente vale apenas – 0.08%.

- O estudo do atrito pode ser feito de uma forma mais simplificada no caso da aproximação das pequenas oscilações em que o pêndulo se comporta como um oscilador harmónico. Genericamente, um oscilador harmónico simples é definido com um corpo que
 - tem movimento em torno de um ponto onde a resultante das forças sobre o sistema é nula.
 - a força de reacção é proporcional ao afastamento do ponto de equilíbrio,
 - o movimento é periódico.

Se for x a coordenada que mede o afastamento do oscilador da sua posição de equilíbrio tem-se

$$F_{apl} = -Kx$$
 e $F_{apl} = Ma = M \frac{d^2x}{dt^2}$

a que corresponde a equação diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{com} \qquad \omega_0^2 = \frac{K}{M}$$

A solução da equação anterior é como vimos um movimento periódico.

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Além do deslocamento angular do pêndulo são ainda osciladores harmónicos o deslocamento linear de uma mola elástica, a torção de um fio, a corrente eléctrica num circuito oscilador LC entre outros. Um modelo simples para a força de atrito exercida sobre um corpo movendo-se num fluido é considerar que esta é proporcional à velocidade do corpo

$$F_{at} = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

A equação diferencial do oscilador passa a ser

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_o^2 x = 0 \quad \text{com} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{M}$$

e a sua solução é a de um movimento periódico amortecido

$$x = x_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \phi)$$

A combinação das duas equações anteriores permite obter a expressão para os coeficientes de amortecimento e para a frequência angular do movimento amortecido

$$\beta = \frac{1}{2\tau}$$
 $\omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2$ $e \quad T = T_0 \left[1 - \left(\frac{T_0}{4\pi\tau}\right)^2\right]^{-1/2}$

O tempo de relaxação τ representa a metade do tempo necessário para que a envolvente da amplitude se reduza a 1/e do seu valor inicial, ou então o tempo para que a energia potencial ($\frac{1}{2} Kx^2$) se reduza na mesma razão. Se for N o número de oscilações em que a amplitude se reduz a metade, tem-se

$$\tau = \frac{NT}{2 \ln 2}$$

e o aumento relativo no período de pêndulo vem dado aproximadamente por $\frac{1}{160~{
m N}^2}$. Mesmo para N=10 o efeito no período seria inferior a 0.01%.

Medição da aceleração da gravidade

O pêndulo simples pode ser utilizado no laboratório para medir o valor da aceleração da gravidade. A precisão que se obtém nesta medição é tipicamente da ordem de 0.5%. Com o pêndulo composto atingem-se precisões de 10^{-4} %. O valor obtido deve então ser comparado com a gravidade normal para o local. Esta como é sabido varia não só com a latitude do lugar mas também com a altitude e ao longo do tempo.

Existem diversas formas aproximadas para a aceleração da gravidade atendendo à complexidade dos efeitos considerados. Na aproximação mais simples, o globo é considerado esférico com a massa $M_{\rm T}$ toda concentrada no seu centro, pelo que a lei da atracção universal aplicada a uma massa pontual permite escrever

$$g = \frac{GM_T}{R^2}$$

Para se ter a aproximação de ordem zero é necessário entrar-se em conta com a velocidade de rotação do globo ω incluindo o efeito da força centrífuga que depende da latitude φ

$$g^{(0)} = \frac{GM_T}{R^2} (1 - b\cos^2\phi) \quad \text{com} \quad b = \frac{R^3\omega^2}{GM_T}$$

Se a forma da Terra for considerada como um elipsóide de revolução achatado nos pólos, obtém-se a aproximação de 1.ª ordem. Na aproximação de 2.ª ordem entrase já em consideração com uma correcção da forma do elipsóide. Um exemplo é a fórmula de Gravidade 1967 aprovada pela Associação Internacional de Geodesia que corresponde à escolha de um determinado elipsóide de referência (o elipsóide de 1967).

$$g = 9.78032(1 + 0.0053025 \text{ sen}^2 \phi - 0.0000058 \text{ sen}^2 2\phi) \text{ } m \text{ } s^{-2}$$

Na variação com a altitude têm de se tomar em consideração dois efeitos: a redução da gravidade devida ao maior afastamento das massas atraentes (correcção de ar livre) $\Delta g_{AL} = -0.3082 \times 10^{-5} \, h$ com h em metro e Δg em m s⁻²; o aumento de g devido à atracção adicional das massas que se encontram entre o elipsóide e o ponto de observação (se este se encontrar sobre rocha) dita correcção de Bouguer (B). Considerando o efeito de Bouguer devido a uma placa homogénea de espessura h e densidade 2.67 tem-se $\Delta g_B = 0.1115 \times 10^{-5} \, h$, nas mesmas unidades. Estes dois efeitos conjugados produzem uma variação com a altitude dada aproximadamente por $\Delta g = -0.1967 \times 10^{-5} \, h$.

A aceleração da gravidade varia ainda no tempo devido ao efeito das marés provocadas pela atracção luni-solar. Este efeito é quase periódico e tem uma amplitude máxima de $2\times10^{-6} m\ s^{-2}$.

O conhecimento da aceleração da gravidade num local tem interesse geológico, porque esta varia com a constituição do terreno e com a presença de corpos de densidade anómala no subsolo. A técnica de pesquisa geofísica que utiliza este efeito para a determinação da constituição interna do Globo chama-se gravimetria.



Radioactividade

O átomo é uma nuvem de Z electrões que se move em torno de um núcleo de Z protões e N neutrões. Os constituintes do núcleo (protões e neutrões) são designados genericamente por nucleões. O número total de nucleões A é designado por número de massa e é dado pela soma do número de neutrões N e de protões Z

$$A = Z + N$$

Elementos diferentes têm diferente número de protões. Os núcleos com igual número de protões e número diferente de neutrões são designados por isótopos de um elemento.

Está provado que os nucleões não são partículas elementares, sendo constituídos por partículas designadas por quarks. Os quarks dos nucleões são o u (up) e o d (down), considerados sem estrutura (portanto elementares) e têm a particularidade de terem carga eléctrica fraccionária, $q_u = \frac{2}{3} q_e$ e $q_d = -\frac{1}{3} q_e$. O protão é formado por dois quarks u e um d e o neutrão por dois d e um u. Além destes dois quarks existem mais quatro.

Sendo os protões cargas positivas e os neutrões partículas neutras é legítima a pergunta: porque são coesos os núcleos? ou de outro modo, qual a cola que mantém protões e neutrões juntos apesar da existência da repulsão coulombiana entre os protões?

À resposta vem associada a proposta de uma nova força que se faz sentir no interior dos núcleos e nucleões designada por forte. A INTERAÇÃO FORTE é obviamente mais intensa que a interacção electromagnética entre cargas e correntes eléctricas e sem sombra de dúvida muito maior que a gravitacional. Uma vez que opera a nível dos núcleos é de curto alcance, da ordem de 1 a 2 fm (10⁻¹⁵ m), e é independente da carga eléctrica, porque é válida quer para protões quer para neutrões. A estas propriedades de fácil explicação juntam-se outras que estão fora do âmbito do actual estudo. Os portadores da interacção forte são designados por gluões e têm um papel idêntico ao dos fotões na interacção electromagnética.

O estudo dos elementos conduziu a uma descoberta importante no início do séc. xx, que só foi completamente explicada em termos teóricos nos anos 70 e a teoria proposta verificada experimentalmente no início dos anos 80.

No fim do século XIX começou a detectar-se que certos elementos emitiam partículas e radiações. Hoje sabemos, serem emitidas a partir do núcleo dos elementos. Este fenómeno foi designado por RADIOACTIVIDADE.

Entende-se em geral, por radioactividade a emissão a partir do núcleo de partículas α (átomos de hélio duplamente ionizados), β^{\pm} (electrões ou positrões) ou de radiação γ (fotões de frequência superior a 10^{19} Hz). Estas três emissões têm contudo, origem diferente:

- a alfa (α) é como que uma fissão do núcleo;
- a gama (γ) provém de interacções electromagnéticas nos núcleos;
- a β[±], emissão de electrões ou positrões, tem a sua origem num novo fenómeno. Se bem que este tipo de radioactividade pareça vir do núcleo ela provém de uma parte dele, da transformação de um dado quark noutro.

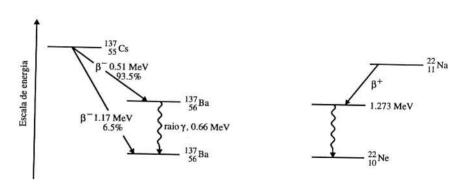
A explicação da desintegração β^{\pm} conduziu à descoberta de uma quarta força ou interacção, que devido à sua intensidade ao nível das dimensões de um núcleo foi designada por INTERACÇÃO FRACA. Um quark u ou d transforma-se, devido a acção desta interacção, num d ou u emitindo um electrão ou positrão (antipartícula do electrão) e um antineutrino ou neutrino (partícula de massa quase nula, neutra e de spin 1/2).

Os propagadores da interacção fraca são os bosões (de spin 1) W^{\pm} e Z° . Ao contrário dos propagadores das outras interacções (fotão, gluão e possivelmente o gravitão) os W^{\pm} e Z° têm uma massa não nula.

As figuras seguintes ilustram diversos modos de esquematizar a desintegração β^{\pm} e γ . Para representar a desintegração α usam-se esquemas análogos.

Em geral, se um núcleo decai por emissão de electrões, caso do ¹³⁷Cs, ou positrões, como o ²²Na, a desintegração representa-se do modo seguinte

$$^{137}_{55}\text{Cs} \xrightarrow{\beta^{-}} ^{137}_{56}\text{Ba} + e^{-} + \overline{\nu}$$
 ou $^{22}_{11}\text{Na} \xrightarrow{22}_{10}\text{Ne} + e^{+} + \nu$



No 1.º declínio um neutrão do césio transforma-se num protão, donde o número atómico Z passar de 55 a 56 e obter-se um núcleo de outro elemento, o bário, libertando-se um electrão e um antineutrino. Em todo o processo existe conservação de energia, carga eléctrica, spin e outros números quânticos que de momento ultrapassaremos. No caso do sódio 22 é um protão que se transforma em neutrão e forma-se um núcleo de néon 22, sendo emitido um positrão e um neutrino.

Em ambas as situações a desintegração β deixou o núcleo descendente num estado nuclear excitado, que ao fim de um intervalo de tempo curto (em geral da ordem ou inferior ao nanosegundo, embora neste exemplo o estado excitado do bário tenha um período da ordem do minuto), decai para o estado fundamental ou de mais baixa energia emitindo radiação γ .

Como é um protão ou neutrão que decai, ou parte deles que sofre uma transformação, podemos ainda representar o processo mais esquematicamente evidenciando que é um quark d que se transforma num u na desintegração β^- e um u em d na desintegração β^+ .

$$\begin{array}{l}
\beta^{-} \\
^{1}_{0} \text{n} (u,\underline{d},d) \xrightarrow{1}_{1} \text{p} (u,\underline{u},d) + {}^{0}_{-1} \text{e} + {}^{0}_{0} \nu \quad \text{ou} \quad {}^{1}_{1} \text{p} (u,\underline{u},d) \xrightarrow{0}_{0} \text{n} (u,\underline{d},d) + {}^{0}_{-1} \text{e} + {}^{0}_{0} \nu
\end{array}$$

Existem partículas como os protões, os neutrões e outras que são constituídas por quarks e entre as quais se verifica a interacção forte. Estas partículas são genericamente denominadas por hadrões. Outras partículas, como os electrões, que não têm estrutura interna e não estão sujeitas à interacção forte, são designados por leptões.

Parece haver suficiente evidência teórica e experimental para aceitar que os constituintes básicos da matéria se dividem em quarks e leptões consoante são sensíveis ou não à interacção forte.

Actualmente, pensa-se que existem apenas três famílias de quarks, três de leptões e quatro tipos de interacção e que este conjunto explica a estrutura da matéria. A diferença entre cada família reside essencialmente na massa dos seus elementos. É como se existisse um factor de escala para passar de uma família para a outra.

A primeira família de quarks e leptões reune os elementos de base do mundo quotidiano: o quark u e d, o electrão e o neutrino electrónico ν_e . Os constituintes da segunda e terceira família são criados nos laboratórios a partir de colisões dos primeiros e existem no universo cósmico devido à actividade das estrelas.

As duas tabelas que se seguem, esquematizam as propriedades dos componentes elementares e as forças que garantem a constituição e o funcionamento dos sistemas desde o infinitamente grande como o Universo até ao infinitamente pequeno como os neutrinos.

Constituintes básicos da matéria e suas interacções

Constituintes básicos e suas propriedades

Nome	Símbolo	Massa (GeV/c²)1	Carga eléctrica	Nome	Símbolo	Massa (GeV/c²)	Carga eléctrica
up	u	.310	2/3	electrão	e	.00051	-1
down	d	.310	-1/3	neutrino	$\nu_{\rm c}$	≈ 0	0
charm	c	1.5	2/3	muão	μ	.106	-1
strange	S	.5	-1/3	neutrino	ν_{μ}	≈ 0	0
top	t	≈ 174	2/3	tau	т	1.784	-1
bottom	b	≈ 5	-1/3	neutrino	$\nu_{ au}$	≈ O	0

 $^{^{-1}}$ Quando nos referimos à massa das partículas subatómicas usamos GeV/c 2 , que dá a energia em repouso de uma partícula de massa m. Para expressar a massa em unidades de energia usa-se a equação de equivalência energia — massa $E = mc^{2}$, em que c é a velocidade da luz. A razão de ser desta opção é em parte devida ao facto da massa destas partículas ser muito pequena e a sua representação em unidades SI ser pouco apropriada. Por exemplo, a massa do protão em ambas as escalas é $m_p = 1.672 \times 10^{-27} \text{ kg} = 0.938 \text{ GeV/c}^{2}$.

Interacções, propagadores e respectivas propriedades

INTERACÇÃO	ELECTRO- MAGNÉTICA	FRACA	FORTE	GRAVÍTICA
ALCANCE (m)	infinito	<10-18	<10-15	infinito
INTENSIDADE (a10 ⁻¹⁵ m relativa à forte)	10-2	10-13	1	10-38

PROPAGADOR	fotão	bosões intermediários	gluão	gravitão
MASSA (GeV/c²)	0	$W^{\pm} = 80.2$ $Z^{0} = 91.2$	0	0
SPIN	1	1	1	2
CARGA	0	±1; 0	0	0

Lei do declínio radioactivo e actividade

A lei básica do declínio, de acordo com a mecânica quântica, estabelece que a probabilidade de um dado núcleo decair num dado intervalo de tempo é independente do seu passado. Assim, numa amostra de n núcleos idênticos com uma probabilidade por unidade de tempo λ de decair, a taxa de desintegração no tempo é dada por

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\lambda n(t)$$

λ é a probabilidade de desintegração e expressa-se em s-1.

A integração da equação anterior, com a condição de no instante inicial termos $n_{\rm o}$ núcleos, conduz-nos à EQUAÇÃO DO DECLÍNIO RADIOACTIVO

$$n(t) = n_o e^{-\lambda t}$$

O processo de declínio é estatístico, e por conseguinte um núcleo pode ter um tempo de vida entre zero e infinito. O valor da vida média, habitualmente referido por τ , é calculado como o valor médio de qualquer grandeza contínua

$$\tau = \frac{1}{n_o} \int_{0}^{\infty} t \, dn = -\frac{1}{n_o} \int_{0}^{\infty} \lambda \, n_o \, e^{-\lambda t} \, dt = \frac{1}{\lambda}$$

Conclui-se que a vida média é dada pelo inverso da probabilidade de desintegração e expressa-se em unidades de tempo.

Designa-se por ACTIVIDADE a quantidade

$$A = \lambda n(t)$$

A unidade SI de actividade é o becquerel (Bq) e corresponde a uma desintegração por segundo.

Define-se PERÍODO de um núcleo como o tempo necessário para que o número inicial de núcleos num dado estado se reduza a metade. A relação analítica entre período e probabilidade de desintegração obtém-se da equação do declínio radioactivo

$$T_{1/2} \lambda = \ln 2 = 0.693$$

Natureza estatística do declínio radioactivo

A desintegração de um núcleo radioactivo é um acontecimento aleatório, isto é, não podemos prever qual o núcleo que decairá. Quando se tem uma dada quantidade de matéria mesmo que de alguns micrograma, dispõe-se de um grande número de núcleos devido à dimensão do número de Avogadro (um átomo grama contém 6.023×10^{23} átomos). Por sua vez a probabilidade de desintegração deve ser tal que se possa considerar que o valor médio de desintegrações é μ =n λ . Para que isto seja verdadeiro o período do elemento deve ser muito maior que o tempo de contagem.

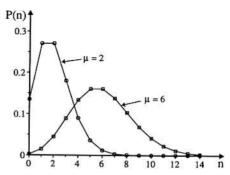
Podemos considerar que estamos em condições de esperar que a probabilidade de que n núcleos decaiam num dado intervalo de tempo seja dada pela DISTRIBUIÇÃO DE POISSON de valor médio μ (ver Leitura 1).

$$P(n,\mu) = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}$$

em que μ é o número médio de desintegrações no intervalo considerado e n o número de eventos.

Para valores pequenos de μ, a probabilidade P(n) em função de n é uma distribuição com um lado «cortado».

À medida que a média aumenta a distribuição de Poisson assume uma forma mais simétrica convergindo para uma distribuição do tipo gaussiano. A figura exemplifica o comportamento desta distribuição para dois valores muito baixos da média.



Suponhamos que temos uma amostra de núcleos radioactivos e que efectuamos um grande número N de medidas idênticas e independentes de contagens n_i durante um intervalo de tempo fixo. A média e o desvio padrão são dados respectivamente por

$$< n> = \frac{1}{N} \sum n_i$$
 $s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (n_i - < n>)^2}$

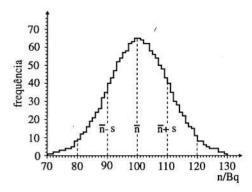
Para uma distribuição de Poisson demonstra-se que $s = \sqrt{\langle n \rangle}$.

Por exemplo para <n> = 100, vem então s = 10. Devido ao valor médio ser elevado 100, esta distribuição apresenta também um comportamento quase normal.

Se fizermos experiências de uma só medição o resultado é $n \pm \sqrt{n}$, isto porque n, número de desintegrações que ocorrem num dado intervalo de tempo, é já em si uma amostra estatística.

O gráfico mostra como os valores de diversas medições em que a média é 100 se distribuem em torno do valor médio. Pode constatar-se, ainda que qualitativamente, o carácter normal da dispersão em torno do valor médio <n>.

Aproximadamente 68% das contagens situar-se-ão no intervalo [<n>-s,<n>+s] e 95% no intervalo [<n>-2s,<n>+2s], segundo as previsões da distribuição normal.



LEITURA 4

Circuitos Eléctricos Básicos

O estudo dos circuitos eléctricos baseia-se em dois conceitos elementares: a intensidade de corrente eléctrica e a diferença de potencial eléctrico entre dois pontos. Os diferentes componentes que se associam para formar um circuito eléctrico destinguem-se pela relação entre a diferença de potencial aos seus terminais e a corrente que os atravessa.

Lei de Ohm

Intensidade de corrente eléctrica

A intensidade da corrente eléctrica, ou abreviadamente corrente, é o número de cargas eléctricas que por segundo atravessam uma secção recta do circuito.

O símbolo para corrente eléctrica é I e a unidade é o ampere (A). Um ampere corresponde a um fluxo de carga de um coulomb por segundo.

$$1A = \frac{1C}{1s}$$

Diferença de potencial eléctrico (ddp)

A ddp entre dois pontos é a medida do trabalho que é necessário realizar para mover uma carga de um ponto a potencial eléctrico mais baixo para um ponto a potencial mais elevado. Frequentemente utiliza-se o termo tensão para designar a diferença de potencial.

O símbolo para ddp é V e a unidade de medida é o volt (V).

Um volt é a ddp que existe entre dois pontos num campo eléctrico quando para se deslocar entre eles uma carga de um coulomb é necessário realizar o trabalho de um joule.

$$1 J = 1 C \cdot 1 V$$

Habitualmente numa ddp toma-se para referência zero o potencial eléctrico da massa (zero local do aparelho ou circuito) ou da terra (referência zero da rede eléctrica).

As várias massas devem estar ligadas à terra, entendendo-se por terra um condutor enterrado no solo, através do qual se escoam facilmente as cargas eléctricas. Os símbolos que representam estas ligações são os da figura.



Resistência

Para certos materiais condutores a corrente que os atravessa é directamente proporcional à ddp aos seus terminais. A relação V(I) é então linear

$$V = R I$$

e a constante de proporcionalidade R, representa a resistência do componente. Esta relação é conhecida por Lei de Ohm.

A unidade de resistência é o ohm (Ω) . Num condutor linear a resistência é directamente proporcional ao comprimento L e inversamente proporcional à secção recta S, dependendo ainda das características físicas do material através da resistividade p

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

A unidade de resistividade é o ohm.metro (Ω .m). Para os metais mais correntes em circuitos eléctricos (cobre e tungsténio) ρ é da ordem de $10^{-8} \Omega$.m. O inverso da resistividade é a condutividade e representa-se por σ .

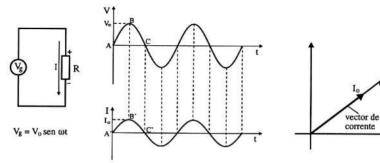
Num circuito eléctrico uma resistência representa-se por — ou — ou — ou — .

O seu valor pode ser conhecido a partir das riscas coloridas traçadas sobre a resistência. O código de leitura das riscas encontra-se explicado nas TABELAS.

A lei de Ohm é válida mesmo para correntes ou tensões variáveis no tempo. Um sinal que varia sinusoidalmemente é representado pela função $X(t) = X_o sen(\omega t + \varphi)$, em que X_o é a amplitude máxima, φ é a fase inicial, $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular e f a frequência do sinal. Se $I(t) = I_o sen \omega t$, então aplicando a lei de Ohm tem-se aos terminais da resistência uma ddp $V(t) = V_o sen \omega t$ e diz-se que a corrente está em fase com a ddp. A relação entre as amplitudes máxima de corrente e da ddp vem dada simplesmente por $V_o = RI_o$.

A relação entre a corrente e a ddp para sinais sinusoidais pode ser ilustrada graficamente sob a forma de um diagrama de vectores em que o comprimento destes é proporcional às amplitudes máxima da corrente e da ddp e o ângulo entre eles iguala a diferença de fase entre a corrente e a ddp. Neste tipo de diagrama são válidas as regras da adição vectorial para grandezas do mesmo tipo. O valor instantâneo das correntes ou ddp é dado neste tipo de diagrama pela projecção dos vectores correspondentes sobre o eixo dos XX (ou YY).





Análise de circuitos

Num circuito os pontos em que há bifurcação de corrente são designados por NÓS. Entre dois nós, todos os componentes são atravessados pela mesma corrente e isso constitui um RAMO. Uma MALHA é um percurso fechado percorrido por corrente eléctrica. O número de malhas independentes num circuito eléctrico é dado pelo número de ramos

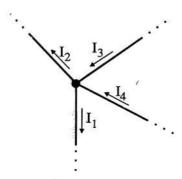
menos o número de correntes independentes mais um. Para a determinação de correntes e ddp em diversos pontos de um circuito recorre-se às leis de Kirchhoff. Estas leis são gerais e aplicam-se a todo o tipo de sinais e de componentes, resistivos ou outros.

Lei dos nós e das malhas

1.ª lei de Kirchhoff ou lei dos nós — num nó a soma de todas as correntes que entram e saem é nula, convencionando-se que a corrente que entra é positiva e a corrente que sai é negativa

$$\sum I_i = 0$$

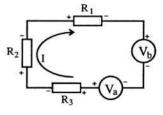
Esta lei resulta simplesmente do princípio de conservação da carga. De acordo com o esquema tem-se $-I_1-I_2+I_3+I_4=0$.



2.ª lei de Kirchhoff ou lei das malhas — numa malha fechada a soma das ddp é nula

$$\sum V_i = 0$$

Atendendo às fontes de tensão presentes na malha, deve ser arbitrado um sentido convencional para a corrente eléctrica na malha. No caso de uma resistência toma-se IR como positivo se a corrente em R tem o mesmo sentido que o arbitrado para a malha. Então as ddp serão positivas nos componentes em que a corrente entra no terminal a potencial mais elevado (+), e negativas no caso contrário.



No circuito da figura anexa, tem-se $IR_1 + IR_2 + IR_3 + V_b - V_a = 0$.

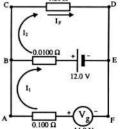
Como exemplo de aplicação, consideremos o circuito da figura a seguir que representa o esquema de alimentação dos faróis de um carro. Os 12.0 V são fornecidos pela bateria e os 14.0 V pelo alternador. As resistências, junto às fontes de alimentação, representam as resistências internas da bateria e do alternador. Para saber a corrente que circula na resistência de 1.20 Ω do farol e a ddp aos terminais desta, recorre-se às leis de Kirchhoff.

Neste circuito existem duas malhas independentes, por exemplo a ABEF (malha 1) e a BCDE (malha 2). Para cada uma das malhas arbitramos o sentido da corrente como sendo o dos ponteiros do relógio, I₁ e I₂ na figura. Note-se que no ramo BE a corrente total que circula é a diferença das duas correntes de malha. Pela 2.ª lei de Kirchhoff podemos escrever para a malha ABEF a equação

$$0.100I_1 + 0.0100 (I_1 - I_2) + 12.0 - 14.0 = 0$$
e para a malha BCDE

$$0.0100(I_2 - I_1) + 1.20I_2 - 12.0 = 0$$

A resolução deste sistema de duas equações a duas incógnitas permite escrever para a corrente e ddp no farol $I_F = I_2 = 10.1$ A e $V_F = 1.20$ $I_F = 12.1$ V.



Associação de resistências

As resistências podem associar-se em série ou em paralelo.

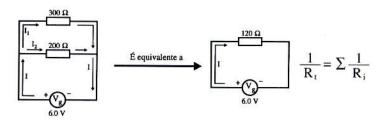
Numa associação em SÉRIE as resistências constituem um ramo único e por isso são todas atravessadas pela mesma corrente. O valor da resistência total é a soma das resistências parciais:



Na realidade tem-se para cada componente $V_1 = I \cdot R_1$, $V_2 = I \cdot R_2$, ..., $V_n = I \cdot R_n$ e para o circuito total $V_t = I \cdot R_t = V_1 + V_2 + \ldots + V_n = I \cdot (R_1 + R_2 + \ldots + R_n)$. Portanto $R_t = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$.

A resistência total é sempre superior às parciais, $R_1 > R_1$.

Quando se associam resistências em PARALELO elas estão em ramos distintos mas ligados ao mesmo par de nós. Neste caso as correntes são diferentes mas todas as resistências têm aplicada a mesma ddp aos seus terminais. Resulta que o inverso do valor total da resistência é igual à soma dos inversos parciais:



para cada resistência tem-se: $V=I_1\cdot R_1,\ V=I_2\cdot R_2,\,\ V=I_n\cdot R_n$ e por outro lado $V=I\cdot R_1$. Como $I=I_1+I_2+.....+I_n$, conclui-se que $\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+.....+\frac{1}{R_n}$

A resistência total é inferior a qualquer das parciais, R₁< R₁.

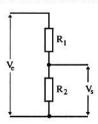
Divisores de tensão e de corrente

Uma ddp V_e aplicada a uma associação em série de componentes distribui-se de uma forma directamente proporcional à sua resistência. Atendendo a que todas as resistências são atravessadas pela mesma corrente I, podemos escrever para o circuito total e cada uma das parcelas

$$I = \frac{V_e}{R_t} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} = \dots = \frac{V_n}{R_n}$$

Daqui podem extrair-se várias expressões úteis na análise deste tipo de circuitos. No exemplo da figura, a tensão de saída aos terminais de R_2 calcula-se por

$$V_s = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_e$$



Entre um par de nós, a corrente total I divide-se pelos diferentes ramos ligados em paralelo de uma forma inversamente proporcional à sua resistência. Neste caso, como a ddp é comum a todos os ramos, podemos escrever para o circuito total e cada uma das parcelas

$$V = I \cdot R_t = I_1 \cdot R_1 = I_2 \cdot R_2 = \dots = I_n \cdot R_n$$

Conhecida a resistência total do circuito, a corrente que circula num ramo qualquer j pode ser calculada simplesmente por

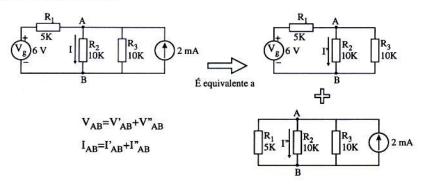
$$I_j = \frac{R_t}{R_i} I$$

Princípio da sobreposição

Num circuito que seja formado apenas por componentes lineares associados em várias malhas, é possível calcular a corrente e a ddp em qualquer ramo do circuito pela adição algébrica dos efeitos que cada fonte aplicada provoca separadamente. Este procedimento é uma consequência da linearidade dos elementos que compõem o circuito e designa-se genericamente por princípio da sobreposição. Para aplicar este princípio constroi-se para cada fonte (de tensão ou de corrente) circuitos equivalentes em que as restantes fontes são substituidas pela resistência interna. Para fontes ideais esta resistência é nula (curto circuito) nas fontes de tensão e infinita (circuito aberto) nas fontes de corrente. A aplicação das regras de associação de resistências permite o cálculo da corrente I_i e ddp V_i no ramo desejado. No circuito completo, com todas as fontes aplicadas, a ddp ou corrente no ramo é dada, como já referimos, pela soma algébrica dos valores obtidos independentemente para cada fonte

$$I = \sum I_i$$
 $V = \sum V_i$

A figura exemplifica este procedimento num circuito de três malhas com uma fonte de tensão e uma de corrente.

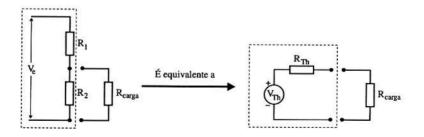


Simplificação de circuitos, modelo de Thévenin

Quando se pretende ligar um componente a dois terminais AB de um circuito complexo, pode ser bastante difícil calcular a corrente e a ddp que ficará aplicada. Se o circuito apenas incluir componentes lineares e fontes de tensão ou de corrente, o teorema de Thévenin garante que este pode ser reduzido a uma fonte de tensão associada em série com uma resistência, o circuito equivalente ou modelo de Thévenin. Os parâmetros deste modelo são calculados pelas regras seguintes:

- A resistência de Thévenin R_{Th} é a resistência total do circuito medida entre os terminais A e B, quando se substituem todas as fontes de tensão ou de corrente pela sua resistência interna.
- 2) A tensão de Thévenin V_{Th} é simplesmente a ddp medida aos terminais AB (quando medida por um voltímetro ideal).

Num circuito em que se têm diversos andares associados, o modelo de Thévenin permite exprimir a acção de cada andar sobre o seguinte como sendo equivalente a uma fonte de tensão com resistência interna. No exemplo da figura temos um divisor de tensão em que a ddp aos terminais de R_2 vai alimentar um outro circuito representado pela resistência de carga $R_{\rm carga}$.



Atendendo a que a resistência interna de uma fonte de tensão ideal é nula, tem-se para o equivalente de Thévenin os valores

$$R_{Th} = R_1 / / R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
 $V_{Th} = V_e \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Só uma fracção da ddp de entrada é aplicada ao circuito de carga.

Potência

150

A potência define-se como sendo o trabalho realizado por unidade de tempo. A unidade de potência é o watt (W), 1 W = $\frac{1\ J}{1\ s}$. Como vimos, o trabalho necessário para deslocar uma carga Q através de uma ddp V é W=QV. Então, a potência eléctrica num circuito exprime-se pelo produto da corrente e ddp

$$P = I \cdot V$$

Num circuito puramente resistivo, a lei de Ohm permite escrever para a potência dissipada numa resistência as expressões equivalentes

$$P = \frac{V^2}{R} = I^2 R$$

Sinais eléctricos

Uma ddp que varia no tempo de modo particular é designada por sinal, e representa-se por V(t) ou v(t). Os sinais periódicos são os que têm maior interesse na análise de circuitos, e para os quais é usual falar de parâmetros relacionados com a sua periodicidade e amplitude em tensão. Entre eles salientamos os seguintes:

T período $f = \frac{1}{T}$ frequência

 $\omega = 2\pi f$ frequência angular

φ fase

V₀ amplitude máxima

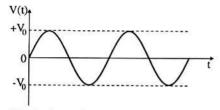
V_{pp} amplitude de pico a pico, diferença entre o valor máximo e o mínimo da ddp

Para além destas características, o sinal pode ainda ser caracterizado pelo seu valor eficaz V_{ef} ou V_{RMS} (*Root Mean Square*). Entende-se por tensão eficaz o valor da tensão contínua que provoca a mesma dissipação de energia numa resistência.

$$P = \frac{V_{ef}^2}{R} = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int\limits_0^T v^2(t) dt \quad então \quad V_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T}} \int\limits_0^T v^2(t) dt$$

Entre muitos sinais possíveis os mais usuais em circuitos eléctricos são:

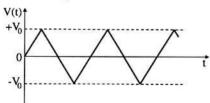
Sinal sinusoidal



$$v(t) = V_o \operatorname{sen} \omega t$$

$$V_{ef} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = 0.707 V_o$$

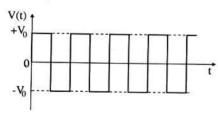
Sinal triangular



$$\begin{split} v(t) &= 4 \, \, \frac{V_0}{T} \, \, t - 4 n V_0 \\ & \quad \text{para} \, (n\text{-}1/4) T < t \le (n+1/4) T \\ v(t) &= -4 \, \frac{V_0}{T} \, \, t + (4 n + 2) V_0 \\ & \quad \text{para} \, (n+1/4) T < t \le (n+3/4) T \\ n &= 0, \, 1, \, 2, \, ... \end{split}$$

$$V_{ef} = \frac{V_o}{\sqrt{3}}$$

Sinal quadrado



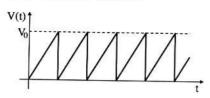
 $v(t) = V_0$ para $nT < t \le \frac{2n+1}{2}T$

 $v(t) = -V_0 \text{ para } \frac{2n+1}{2} \text{ } T < t \leq (n+1)T$

n = 0, 1, 2, ...

 $V_{ef} = V_0$

Sinal em dente de serra

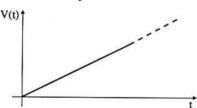


 $v(t) = \frac{V_0}{T} - nV_0 \quad \text{para} \quad nT < t \le (n+1)T$

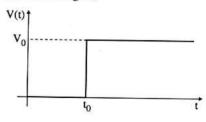
n = 0, 1, 2, ...

$$V_{ef} = \frac{V_o}{\sqrt{3}}$$

Sinal em rampa



Sinal em degrau



IMPULSOS quando um sinal não ocorre de um modo contínuo no tempo, podendo ser ou não periódico.



RUÍDO quando os sinais ocorrem ocasionalmente, sem frequência bem definida e com amplitude variável.

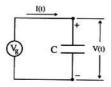
Nos circuitos eléctricos os sinais mais vulgares são ddp sinusoidais porque:

- É nesta forma que a tensão é produzida industrialmente, devido a ser do tipo sinusoidal a ddp induzida numa bobina que tem movimento circular uniforme num campo magnético, como sucede nos geradores eléctricos;
- A resposta dos circuitos lineares a ddp sinusoidais são ainda funções sinusoidais;
- Toda a corrente ou ddp periódica pode ser decomposta numa soma de funções sinusoidais.

Condensador

Designa-se por condensador o conjunto formado por dois condutores paralelos separados por um dieléctrico. Representa-se por -

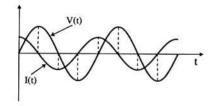
Quando aos terminais de um condensador é aplicada uma ddp variável no tempo, ele é percorrido por uma corrente directamente proporcional à variação da tensão.

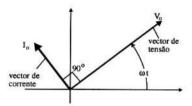


$$I(t) = C \frac{dV(t)}{dt}$$

Trata-se de uma relação linear entre corrente e ddp em que a constante de proporcionalidade é C, valor da capacidade do condensador. Este componente só tem interesse, como é óbvio, em circuitos em que a ddp varia no tempo. Para sinais sinusoidais

$$V(t) = V_0 sen \omega t implies I(t) = I_0 sen(\omega t + \pi/2)$$





Tem-se
$$V_o = \frac{I_o}{\omega C} = |Z_C|I_o$$
, com $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ que se designa por IMPEDÂNCIA CA-

PACITIVA e a relação entre os valores máximos da corrente e da ddp adquire uma forma equivalente à lei de Ohm.

Das equações e do gráfico conclui-se que:

- A corrente está adiantada de π/2 em relação à ddp aplicada;
- A relação entre I e V depende da frequência do sinal, o que implica o uso do conceito de impedância em vez da simples designação de resistência capacitiva.

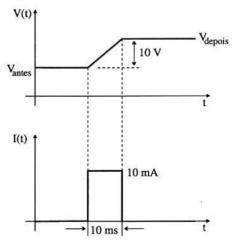
Para definir a unidade de capacidade é conveniente escrever a relação entre ddp aos terminais do condensador e a carga eléctrica no mesmo. Como $I = \frac{dQ}{dt}$ tem-se

$$O = C \cdot V$$

A unidade de capacidade, o farad (F), corresponde à existência da carga de um coulomb entre os dois condutores constituintes do condensador quando entre eles existe uma ddp de um volt.

 $^{^{1}}$ j = $\sqrt{-1}$ é a unidade dos números imaginários.

O gráfico mostra como um condensador, com uma capacidade de 10 μ F, reage a uma ddp em rampa v(t) = 1000~t~V que actua durante 10 ms.



Os valores de capacidade mais correntes são da ordem do μF, nF e pF.

O valor é escrito sobre o componente obedecendo a códigos referidos nas TABELAS.

Associação de condensadores

Em SÉRIE o inverso do valor da capacidade total é dado pela soma dos inversos dos valores das capacidades associadas

$$\frac{1}{C_{t}} = \frac{1}{C_{1}} + \frac{1}{C_{2}} \dots + \frac{1}{C_{n}}$$

Em PARALELO o valor da capacidade total é a soma dos valores das capacidades associadas $C_{i} = \sum_{i} C_{i}$

Na realidade, nesta situação temos que: $Q_1 = C_1V = Q_1 + Q_2 + + Q_n$, portanto $Q_1 = C_1V + C_2V + + C_nV$ e $C_1 = C_1 + C_2 + + C_n$.

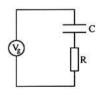
Capacidades em paralelo somam-se tal como se somam resistências em série, esta assimetria deve-se ao facto de, na impedância capacitiva, o valor da capacidade (C) aparecer em denominador.

Como medir capacidades

- Com um capacímetro (certos multímetros possuem capacímetros incluídos).
- Medindo com um osciloscópio, num circuito quase puramente capacitivo os valores máximos da corrente e da ddp no condensador. Se R≪|Z_C| a resistência «lê» a intensidade de corrente a partir de V₂ = RI Donde

tir de
$$V_{\text{Rmax}}$$
 = $R\,I_{\text{max}}$. Donde
$$C = \frac{V_{\text{Rmax}}}{V_{\text{Cmax}}\omega R}\,.$$



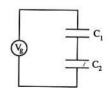


Com o mesmo circuito, e usando o facto da impedância do condensador variar com a frequência da ddp aplicada, é possível ajustar o gerador por forma a que as tensões máximas observadas aos terminais de R e C sejam idênticas. Quando V_{Rmax} = V_{Cmax} tem-se

$$R = |Z_C| e C = \frac{1}{R\omega}$$

 Associando o condensador de capacidade desconhecida em série com um de capacidade conhecida, e aplicando a lógica da divisão de tensão aos valores máximos das ddp

$$V_{1max} = \frac{|Z_1|}{|Z_1 + Z_2|} \, V_{gmax} \quad e \quad C_1 = C_2 \bigg(\frac{V_{gmax}}{V_{1max}} - 1 \bigg) \label{eq:V1max}$$



Carga e descarga do condensador

Consideremos o circuito da figura em que o condensador apresenta aos seus terminais uma tensão inicial $V_{\rm o}$. Se fecharmos o circuito temos $V_{\rm R}(t)-V_{\rm C}(t)=0$ (lei das malhas). Com um pouco de cálculo e tomando em atenção a convenção de sinais no condensador estabelece-se que

$$V_{C}(t) = V_{o}e^{-t/RC} \qquad e \qquad I(t) = I_{o}e^{-t/RC} \qquad com \qquad I_{o} = \frac{V_{o}}{R}$$

$$V_{C}(t) = V_{o}e^{-t/RC} \qquad e \qquad I_{o} = \frac{V_{o}}{R}$$

A situação descrita constitui a DESCARGA do condensador e está representada no gráfico à direita do circuito. A carga armazenada no condensador, ou seja a ddp aos seus terminais, diminui no tempo.

O produto RC tem dimensões de tempo e designa-se por constante de tempo. Da equação da descarga do condensador verifica-se que ao fim de um tempo RC a tensão caiu para 36.8% (1/e) do seu valor inicial. Ao fim de 10RC a ddp aos terminais do condensador vale apenas 0.0045% de V_0 .

Exemplo da ordem de grandeza de RC em função dos valores de R e C. Se R~M Ω e C~ μ F tem-se RC~s, se R~k Ω e C~ μ F vem RC da ordem do ms.

Na situação em que num dado instante se aplica uma ddp contínua V_0 a um circuito RC como o do esquema seguinte, a lei das malhas permite escrever $V_R(t) + V_C(t) = V_0$. A resolução desta equação diferencial permite obter as expressões que regem a ddp aos terminais do condensador e a corrente que circula na malha:

$$V_{C}(t) = V_{o}(1-e^{-t/RC}) \qquad e \qquad I(t) = I_{o}e^{-t/RC}$$

$$V_{R}$$

$$V_{C}$$

$$V_{R}$$

$$V_{C}$$

Esta operação designa-se por CARGA do condensador e está representada no gráfico à direita do circuito. A ddp aos terminais do condensador aumenta com o tempo até atingir a saturação.

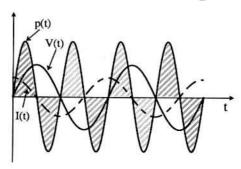
As expressões anteriores para a carga do condensador podem ser facilmente deduzidas se atendermos a que no condensador se tem $i=C\frac{dV_C}{dt}$ e que esta é a mesma corrente que atravessa a resistência, $i=\frac{V_o-V_C}{R}$. Igualando e individualizando num termo as ddp e no outro o tempo, tem-se que $\frac{dV_C}{V_o-V_C}=\frac{dt}{RC}$ ou seja que $-\ln(V_o-V_C)=\frac{t}{RC}+K$ ou $V_C=V_o-K^{\prime}e^{-t/RC}$ como $V_C=0$ para $t=0,\,K^{\prime}=V_o$ donde, $V_C(t)=V_o(1-e^{-t/RC}).$

Num circuito alimentado com ddp alterna teremos uma sucessão de cargas e descargas do condensador. Conforme o valor de RC e da frequência da ddp, assim teremos carga e descarga completa ou parcial.

Potência num circuito capacitivo

Se $I(t) = I_0$ sen ωt a potência instantânea é dada por

$$p(t) = V(t)I(t) = I_oV_o sen \omega t cos \omega t = \frac{1}{2} I_oV_o sen 2\omega t$$



A potência média dissipada é nula como se pode inferir directamente do gráfico ou a partir do cálculo do valor médio. Num período T

$$P_{\text{média}} = \frac{\int_{0}^{T} p dt}{\int_{0}^{T} dt} = \frac{V_{o} I_{o}^{T} sen 2\omega t dt}{2T} = 0 \text{ em que } \omega = 2\pi/T$$

No semiciclo de carga a energia é armazenada entre as placas do condensador na forma de campo eléctrico e retorna para a fonte de alimentação no semiciclo de descarga. Em média nenhuma energia é dissipada no circuito, mas sim trocada entre a fonte e o campo eléctrico que se cria no condensador.

Aplicações de circuitos com elementos RC

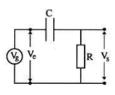
Neste tipo de circuitos tem-se: $V(t) = V_R(t) + V_C(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t')dt'$ e considera-se que V_C no instante inicial t=0 é nula.

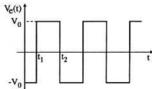
Circuito diferenciador

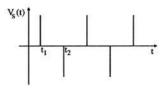
Um circuito diferenciador gera um sinal de saída que é proporcional à derivada do sinal de entrada. O circuito mais simples que permite esta operação é um circuito RC série em que a ddp de saída é obtida aos terminais da resistência, $V_s(t) = RC \frac{dV_e(t)}{dt}$.

A expressão para o sinal de saída neste tipo de circuitos deduz-se facilmente se considerarmos que a constante de tempo RC é baixa quando comparada com o período de variação do sinal, isto é, que $R \!\!\!\! < \!\!\! |Z_C|$. Nestas condições $|V_R(t)| \!\!\! < \!\!\! |V_C(t)|$ e portanto $V_e(t) \approx V_C(t), \ donde \ \frac{dV_e}{dt} = \frac{dV_C}{dt} = \frac{1}{C} \ i(t). \ Mas \ V_s = V_R = Ri(t). \ Substituindo i(t) \ vem \ V_s = RC \ \frac{dV_e}{dt} \ .$

Vejamos, como exemplo, a resposta de um circuito diferenciador a um sinal de entrada quadrado.







O circuito só actua quando a ddp de entrada varia no tempo. No exemplo da figura tem-se um sinal quadrado para V_e . No instante t_1 a ddp varia entre $-V_0$ e V_0 e à saída ter-se-á um impulso instantâneo positivo seguido de uma ddp nula até ao instante t_2 , em que a ddp varia de V_0 a $-V_0$ e portanto à saída ter-se-á um impulso instantâneo negativo.

Circuito integrador

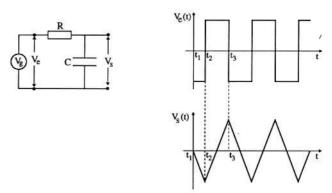
Um circuito integrador apresenta à saída um sinal que é proporcional ao integral do sinal de entrada. A tensão de saída no circuito RC série é neste caso obtida aos terminais do condensador, e dada por

$$V_s(t) = \frac{1}{RC} \int V_e(t')dt'$$

A dedução da expressão anterior é simples se considerarmos agora, que a constante de tempo RC tem um valor elevado quando comparado com o período de variação do sinal de entrada. Se R \gg |Z_C|, |V_R(t)| \gg |V_C(t)| e neste caso V_e(t) \approx V_R(t) \approx Ri(t), obtendo-

-se
$$V_s(t) = V_C(t) = \frac{1}{RC} \int V_e dt$$
.

Vejamos como exemplo, a resposta de um circuito integrador a um sinal de entrada quadrado.

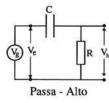


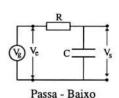
No instante t_1 o condensador começa a carregar-se negativamente e, se o valor RC for muito superior ao período T do sinal, a carga evoluirá linearmente até ao instante t_2 em que a polaridade da tensão de entrada se inverte. Entre t_2 e t_3 a ddp aos terminais de C aumenta linearmente, repetindo-se sucessivamente este processo de carga positiva e negativa.

Em geral a integração e a diferenciação não são exactas para todos os valores de frequência. A qualidade depende do bom dimensionamento da constante RC em função da frequência dos sinais analisados. No caso da onda quadrada, na prática a sua derivada não dá um impulso instantâneo nem o seu integral uma onda triangular perfeita.

Filtros

Como a impedância de um condensador varia com a frequência $\omega\left(Z_C = \frac{-j}{\omega C}\right)$, a associação de um condensador em série com uma resistência constitui um filtro em que determinadas frequências são atenuadas. Conforme a ddp de saída do divisor de tensão RC é obtida na resistência ou no condensador, assim se tem respectivamente um filtro passa-alto ou um filtro passa-baixo.





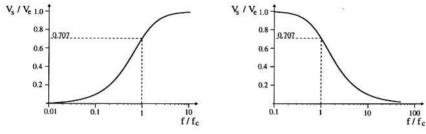
A expressão das ddp de saída em função das ddp de entrada vem dada por

$$V_s(t) = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} V_e(t) \qquad \qquad V_s(t) = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} V_e(t) \label{eq:Vs}$$

ou usando os módulos, tem-se para as amplitudes de saída no caso do filtro passa-alto.

$$\begin{split} V_s &= \frac{R}{\left|\frac{1}{j\omega C}\right|} V_e = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} V_e \\ e \text{ para o passa-baixo } V_s &= \frac{\left|\frac{1}{j\omega C}\right|}{\left|\frac{1}{j\omega C}\right| + R\right|} V_e = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC\right)^2}} V_e \end{split}$$

O comportamento destes circuitos pode ser analisado graficamente em termos do quociente entre as amplitudes dos sinais de saída e de entrada. É conveniente o uso de uma escala logarítmica para as frequências, o que permite estudar o funcionamento do circuito para várias ordens de grandeza da frequência f.

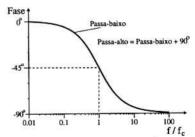


No gráfico da esquerda, quando a frequência tende para infinito a impedância do condensador tende para zero, caindo todo o sinal na resistência. O circuito deixa passar as altas frequências e filtra as baixas frequências. É um filtro PASSA-ALTO.

No gráfico da direita, quando a frequência tende para zero a impedância do condensador tende para infinito e o sinal de saída aos terminais do condensador é igual ao de entrada. Logo este circuito corta ou filtra as altas frequências sendo designado por filtro PASSA-BAIXO.

O valor de referência que separa a banda de frequências que é cortada da banda que não é alterada pelo filtro, é designado por FREQUÊNCIA DE CORTE f_c . A partir deste valor o sinal de saída do circuito é considerado sem qualidade. Este valor é determinado como a frequência para a qual a ddp de saída é $1/\sqrt{2}$ do valor máximo da ddp de entrada, ou seja a frequência correspondente a uma atenuação de $-3dB^2$.

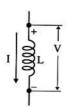
A razão da escolha deste valor deve-se ao facto de, para ambos os filtros, se ter para aquela atenuação o mesmo valor da frequência de corte f_c , dado por $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ e uma diferença de fase φ entre o sinal de entrada e de saída de 45°.



 $^{^2}$ 1 deciBel = $20\log_{10}A_2/A_1$ em que A_2 e A_1 são as amplitudes dos sinais sob comparação. $20\log_{10}V_s/V_c=20\log_{10}0.707=-3dB$

Indutor

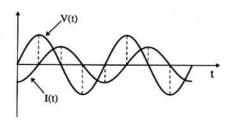
Fisicamente um indutor é um enrolamento condutor em que a passagem da corrente eléctrica produz um campo magnético. Pela lei da indução de Faraday tem-se que a variação do campo magnético gera uma tensão induzida aos seus terminais. Por isso, a ddp aos terminais do enrolamento é proporcional à derivada da corrente que o atravessa. A tensão v(t) é positiva quando a intensidade da corrente, com o sentido indicado no esquema, aumenta no tempo.

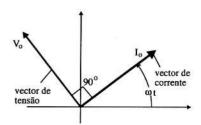


$$V(t) = L \frac{dI}{dt}$$

Nesta relação linear a constante de proporcionalidade L é a indutância do indutor. Tal como nos condensadores, estes componentes só têm interesse nos circuitos alimentados por uma corrente variável.

$$I(t) = I_0 \operatorname{sen} \omega t$$
 implica $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t + \pi/2)$





 $V_o = \omega L I_o = |Z_L| \ I_o \ e \ Z_L = j \omega L \ \acute{e}$ designada por IMPEDÂNCIA INDUTIVA.

Das equações e do gráfico conclui-se que:

- A corrente está desfasada da ddp (corrente atrasada de $\pi/2$):
- A relação entre I e V depende da frequência do sinal e daí o uso da designação de impedância em vez de resistência.

A unidade de indutância é o henry cujo simbolo é H. Um henry corresponde à indutância de um indutor que apresenta aos seus terminais uma ddp de um volt quando percorrido por uma corrente que varia de um ampere num segundo. Os valores mais vulgares para a indutância são H ou mH.

Associação de indutores

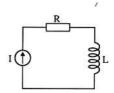
Em SÉRIE a indutância final é a soma das parciais, $L_f = \sum L_i$.

Em PARALELO a indutância final é dada por $\frac{1}{L_f} = \sum \frac{1}{L_i}$.

A associação de indutâncias segue a mesma lógica das resistências.

Como medir indutâncias

A maneira mais simples consiste na medição dos valores máximos da corrente i e da ddp V_L com o osciloscópio, num circuito em que a resistência é muito menor que a impedância indutiva $R \ll |Z_L|$. Nesta situação a resistência R «lê» a intensidade de corrente, porque:



$$V_R = Ri e L = \frac{RV_{Lmax}}{\omega V_{Rmax}}$$

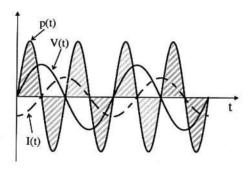
Teoricamente seria ainda possível usar qualquer dos outros métodos discutidos para o condensador. Na prática alguns desses procedimentos tornam-se impossíveis dado que não existem indutores ideais, sendo necessário entrar em conta com os efeitos da resistência e capacidade dos enrolamentos.

Uma associação série RL comporta-se de uma forma análoga a um circuito série RC, podendo ser usada como diferenciador, integrador ou filtro. No entanto, as propriedades dos indutores reais introduzem grandes imperfeições na aplicação desses circuitos, sendo preferidas as associações RC.

Potência num circuito indutivo

Se I(t) = I_osen ωt a potência instantânea é dada por

$$p(t) = V(t)I(t) = I_oV_o sen \omega t cos \omega t = \frac{1}{2} I_oV_o sen 2\omega t$$



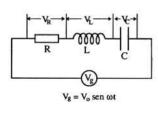
A análise do gráfico permite concluir que a potência média dissipada pelo indutor é nula. Este valor pode ser confirmado a partir do cálculo:

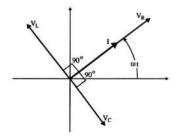
$$P_{\text{média}} = \frac{\int\limits_{0}^{T} p dt}{\int\limits_{0}^{T} dt} = \frac{V_{o}I_{o}\int\limits_{0}^{T} sen \ 2\omega t \ dt}{2T} = 0 \ \ em \ que \ \ \omega = 2\pi/T$$

Fisicamente a energia é transferida da fonte de corrente e armazenada na forma de campo magnético no indutor, no semiciclo de aumento de corrente. Esta energia é restituída à fonte no semiciclo de diminuição da corrente. Em média nenhuma energia é retirada da fonte mas sim trocada entre a fonte e o campo magnético que se cria no indutor.

Circuito ressonante RLC

Um circuito como o da figura, constituído por uma resistência, um indutor e um condensador associados em série designa-se por CIRCUITO RLC SÉRIE. A relação entre a corrente e a ddp em cada elemento está representada no diagrama vectorial à direita.

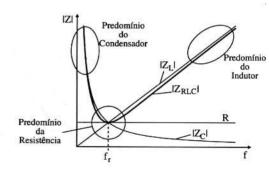




 Z_T =R+j ω L - $\frac{j}{\omega C}$ e a ddp na capacidade e no indutor estão exactamente em oposição de fase (φ = 180°). O facto dos indutores introduzirem uma diferença de fase entre a corrente e a ddp que é simétrica da que é introduzida pelos condensadores, permite construir circuitos ressonantes. Na figura encontra-se representada a variação de $|Z_T|$ em função da frequência, destinguindo-se os domínios em que cada um dos componentes pre-

domina.

A impedância total do circuito é



Para simplificar o estudo do circuito imaginemos que a resistência é muito baixa, podendo ser desprezada. Nesta situação temos um circuito LC série em que a impedância

total³ é $Z_T = j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$. Em módulo tem-se:

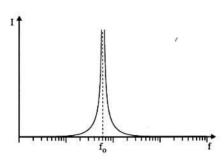
$$|Z_T| = |Z_L + Z_C| = \sqrt{\omega^2 L^2 - \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Para $\omega = \frac{1}{\sqrt{L.C.}}$ a impedância anula-se.

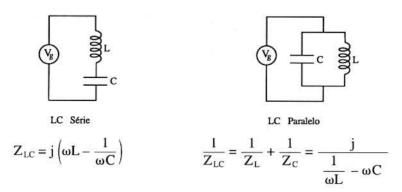
A frequência $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}}$ designa-se por,

FREQUÊNCIA DE RESSONÂNCIA.

Se a impedância se aproxima de zero a corrente atinge um máximo e o circuito encontrase em regime ressonante. A figura mostra como varia a corrente que atravessa um circuito LC série em função da frequência.



Comparemos agora o funcionamento dos circuitos LC série com os circuitos ressonantes LC paralelo. A figura abaixo representa-os a par para podermos melhor compreender como se comportam em função da frequência do sinal de entrada. Usando as representações complexas para as impedâncias do indutor e do condensador, $Z_L = j\omega L$ e $Z_C = -j/\omega C$, tem-se para cada associação



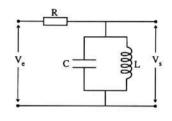
Em qualquer dos casos a frequência de ressonância é igual a $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ou $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. No circuito LC paralelo a corrente é nula para a frequência de ressonância, enquanto que, para o LC série será infinita.

No circuito LC série $Z_{LC} \to 0$ quando $\omega \to \omega_0$, e no circuito LC paralelo $Z_{LC} \to \infty$ quando $\omega \to \omega_0$.

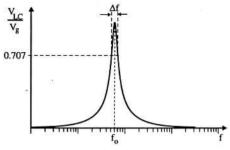
³ Como a impedância é um número complexo convém relembrar os elementos básicos da representação complexa que se encontram na zona das TABELAS.

Consideremos um circuito R-LC como o da figura, uma resistência em série com um paralelo LC. O módulo da impedância total do circuito vale:

$$|Z_T| = \sqrt{R^2 + Z^2_{LC}} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}\right)^2}$$



Se V_e é a ddp de entrada, quando $f{\to}f_0$, tem-se | Z_{LC} | ${\to} \infty$ e $V_{LC}{\to}V_e$. Se representarmos a razão da ddp de saída pela de entrada V_{LC}/V_e em função da frequência f obtém-se uma curva com um máximo para a frequência de ressonância $f = f_0$. Esta curva é conhecida por curva de ressonância do circuito $R{-}LC$ paralelo.



No circuito RLC série, quando $f \rightarrow f_0$ tem-se $|Z_{LC}| \rightarrow 0$. Se traçarmos uma curva de $\frac{V_{LC}}{V}$, esta razão será nula para $f = f_0$.

Da observação dos gráficos anteriores podemos concluir que os circuitos ressonantes RLC podem ser usados como filtros passa-banda ou elimina-banda. Quando usados como tal é útil definir-se o factor Q de qualidade do circuito. Sejam f_1 e f_2 as frequências para as quais se tem $V_{LC}/V_e = 1/\sqrt{2}$. Designa-se por factor de qualidade Q a quantidade,

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

em que $\Delta f = f_2 - f_1$ é a largura da banda passante (ou banda rejeitada). O factor de qualidade é uma medida da largura da curva. Quanto mais elevado é o valor de Q, mais «apertada» é a curva, logo mais selectivo é o filtro. No filtro R-LC paralelo tem-se

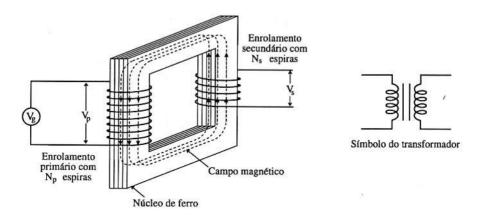
$$Q = \omega_0 RC$$
, e para o filtro RLC série $Q = \omega_0 \frac{L}{R}$.

Transformadores

Os transformadores são aparelhos que permitem, pela aplicação do princípio da indução eléctrica, aumentar ou diminuir a amplitude de tensões que variam no tempo.

Um transformador vulgar é constituído por uma parte central de ferro macio em forma de moldura designado por núcleo. Como mostra a figura, de um lado tem-se um enrolamento de N_p espiras ligadas à ddp de entrada, o primário do transformador, e do

outro lado N_s espiras, ligadas ao circuito utilizador, designadas por secundário. Na figura da direita apresenta-se o símbolo com que se representa um transformador num circuito.



No transformador, a corrente alterna que circula no primário provoca uma alteração no campo magnético do núcleo, e este fluxo magnético Φ variável vai induzir uma força electromotriz ϵ_s no secundário. A lei de Faraday permite estabelecer uma relação entre as duas grandezas, $\epsilon_s = -\,N_s\,\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\,$. Desta equação e da análoga para o primário deduzse a EQUAÇÃO DE TRANSFORMAÇÃO

$$\frac{\varepsilon_{\rm s}}{\varepsilon_{\rm p}} = -\frac{N_{\rm s}}{N_{\rm p}}$$

A aplicação mais vulgar dos transformadores é na passagem de uma tensão elevada e corrente baixa a uma tensão baixa e corrente mais elevada, como nos centros de transformação onde a tensão produzida numa central térmica, nuclear ou hidroeléctrica passa de kV para os 220 V da rede urbana. No laboratório e em casa passamos frequentemente da tensão fornecida pela EDP (~220 V) para a necessária ao funcionamento da maioria dos instrumentos e aparelhos (± 24 , ± 15 , ± 9 , ± 5 V após conveniente rectificação). A vantagem da transformação junto dos sítios de utilização é reduzir as perdas por calor no transporte da energia eléctrica, uma vez que a potência dissipada é função do quadrado da corrente que passa nos fios (P = $V_c I_c = R I_c^2$).

Representação complexa da ddp e da corrente alterna

Para estudar circuitos eléctricos com vários componentes reactivos, componentes «sensíveis» à frequência do sinal, em que actuam sinais sinusoidais, é muito conveniente usar a representação exponencial dos números complexos. Neste curso de introdução à Física Experimental apenas abordaremos resumidamente os ele-

mentos essenciais dessa representação. Para o que se segue é aconselhável consultar as TABELAS onde se descrevem os números complexos e algumas das suas propriedades.

Lei de Ohm generalizada — Impedância

Toda a ddp sinusoidal do tipo $V=V_o\cos \omega t$ pode escrever-se como a parte real de um número complexo, isto é, $V=Re(V_o \cdot e^{j\omega t})$. Aplicando esta representação a um circuito com uma capacidade C, a relação entre corrente e ddp pode-se escrever como:

$$I = C \frac{dV}{dt} = Re \left(\frac{V_o e^{j\omega t}}{1/i\omega C} \right)$$

como $Z=\frac{1}{j\omega C}$ (aqui usamos a escrita em itálico para as grandezas complexas) a relação entre corrente e ddp em notação complexa assume a forma

$$V = ZI$$

em que I, V e Z são quantidades complexas.

Esta equação é formalmente idêntica à lei de Ohm referida no início da leitura, donde esta relação ser considerada como a lei de Ohm generalizada.

Vejamos, por exemplo, como a partir desta lei se pode recuperar a relação entre a corrente e a ddp num indutor

$$I = Re (I_o \cdot e^{j\omega t}) = Re [I_o (\cos \omega t + j \sin \omega t)] = I_o \cos \omega t$$

$$V = Re (I_o \cdot e^{j\omega t} \cdot j\omega L) = Re [I_o (j\omega L\cos \omega t + j\omega L \cdot jsen \omega t)]$$

$$V = -I_o \omega Lsen \ \omega t = L \ \frac{dI}{dt}$$

Para os componentes lineares (condensadores, indutores e resistências) que foram já estudados, a impedância complexa é a generalização do conceito de resistência e vem dada por

$$Z_{R} = R$$
 $Z_{C} = \frac{1}{i\omega C}$ $Z_{L} = j\omega L$

Usando a noção de impedância, a associação de componentes em série ou em paralelo assume as mesmas características para todos os elementos.

Associação em SÉRIE $Z_T = \sum Z_i$

Associação em PARALELO
$$\frac{1}{Z_T} = \sum \frac{1}{Z_i}$$

No curso proposto basta considerar o valor máximo das ddp e correntes o que faz intervir nos cálculos apenas o módulo da impedância total. Por exemplo, numa associação RLC em série, tem-se

$$|Z_{RLC}| = |Z_R + Z_C + Z_L| = \left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}$$

OUADRO RESUMO

	RESISTÊNCIA	CONDENSADOR	INDUTOR
CORRENTE			
CORRENTE	I=I _o sen ωt	I=I _o sen ωt	I=I _o sen ωt
DDP	V=RI _o sen ωt	$V = \frac{I_o}{\omega C} \operatorname{sen}(\omega t - \frac{\pi}{2})$	$V=I_0 \omega L \operatorname{sen}(\omega t + \frac{\pi}{2})$
FASE ENTRE	0	$-\frac{\pi}{2}$	$+\frac{\pi}{2}$
V e I		2	2
$\frac{V_o}{I_o}$	R	$\frac{1}{\omega C}$	ω L
POTÊNCIA MÉDIA	V _o I _o 2	0	0

Díodo

O díodo é um elemento passivo em que não se verifica uma relação linear entre a corrente I e a ddp V aos seus terminais. Quando polarizado num certo sentido o díodo conduz oferecendo pouca resistência à passagem da corrente eléctrica. Se o polarizarmos no sentido oposto, a corrente que o atravessa é várias ordens de grandeza inferior à corrente de condução. Num circuito este elemento representa-se por:



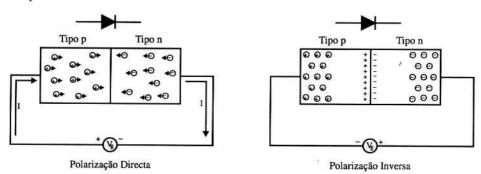
A seta indica o sentido permitido para a passagem da corrente eléctrica, do ânodo (polarizado positivamente) para o cátodo (polarizado negativamente). Internamente, um díodo é formado por uma junção de material semicondutor, sendo os de silício (Si) os mais vulgares.

Uma junção de silício tipo n-p é uma pequena pastilha de silício formada de duas partes. Numa implantou-se um elemento receptor de electrões (por exemplo boro) parte p, na outra um dador de electrões (por exemplo fósforo) parte n.

⊕ ⊕ _ ⊕	Θ	Θ	Θ
⊕ Tipo p ⊕	Θ	Θ	Θ
• • •	Tipo ⊖	n Θ	
Θ Θ	Θ	Θ	Θ

A junção n-p e os contactos óhmicos, isto é, os seus terminais, constituem um díodo de junção. Se aplicarmos uma ddp à junção e ligarmos a parte p da junção ao negativo

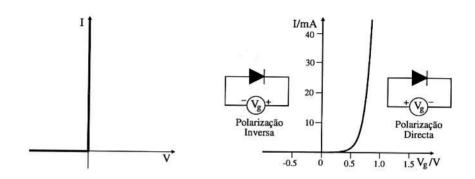
haverá um breve fluxo inicial de cargas e depois a corrente interrompe-se. Este regime designa-se por polarização inversa e está representado no esquema da direita. Se aplicarmos uma tensão positiva à zona p as cargas negativas da zona n serão atraídas e a corrente fluirá. Está-se em regime de polarização directa, como representado no esquema da esquerda.



Para uma melhor compreensão do modo de funcionamento de uma junção p-n deve consultar a Leitura 8.

Característica ddp — corrente

A característica ddp-corrente de um díodo ideal seria: corrente nula para uma polarização inversa e infinita para polarização directa. Este modelo está representado na figura da esquerda. Nos díodos reais nem a corrente é nula para qualquer polarização inversa nem infinita quando polarizado directamente. A figura da direita ilustra o comportamento real de um díodo de silício.



A corrente I_D que percorre um díodo quando polarizado com a ddp V é dada teoricamente por uma função do tipo exponencial

$$I_D = I_s(e^{\frac{V}{V_T}} - 1)$$
 em que $V_T = \frac{KT}{q}$

K é a constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} JK⁻¹), T é a temperatura absoluta em kelvin ($0^{\circ}C=273$ K), q é a carga do electrão (1.6×10^{-19} C) e I_s designa a corrente de saturação (corrente máxima com polarização inversa). Esta corrente depende da concentração buracos-electrões e da área da junção. Assim, I_s serve como factor de escala para a corrente da junção. O parâmetro $V_T = \frac{KT}{q} = \frac{T}{11\,600}$ V é designado por tensão equivalente à temperatura T. A corrente de saturação I_s é também uma função da temperatura.

O sentido de I_D é da parte p para a n (dentro do semicondutor) e V_D é positivo para uma junção polarizada directamente. Para T da ordem de 27°C, i.e. 300 K, tem-se $V_T = 25$ mV. Se $|V| < V_T$, a corrente $I_D \sim \frac{I_s}{V_T} V$ ou simplesmente $I_D = \frac{V}{R}$ e pode dizer-se que o díodo se comporta como uma resistência. Mas isto só é válido para tensões

muito baixas! Quando $V \gg V_T$, a corrente é dada por $I_D \sim I_s e^{\frac{V}{V_T}}$.

Com a junção polarizada inversamente e |V| muito superior a V_T , temos que $I_{D^{\sim}}$ - I_s . O sinal menos significa que esta corrente flue em sentido oposto, isto é, da parte n para a p. Como as correntes directa e inversa diferem em várias ordens de grandeza, é habitual considerar escalas diferentes nos semi-eixos quando se representa graficamente a curva V(I).

Em regime de polarização inversa, se a ddp aplicada atinge certos valores e a junção puder dissipar uma dada potência provoca-se a disrupção não destrutiva da junção, e diz-se que se está em regime de Zener. Esta situação será detalhada mais adiante.

Quando o díodo se encontra em condução, a taxa de variação da corrente com a tensão aplicada $\frac{dI}{dV} = \frac{I}{V_T}$, permite definir RESISTÊNCIA DINÂMICA, dada por $r_d = \frac{V_T}{I}$. Com $V_T \approx 25$ mV e para correntes a variar entre 1 e 25 mA, a resistência dinâmica r_d varia entre 25 e 1 Ω . Este conceito permite definir para o díodo real em condução um modelo mais realista, como se mostra na figura.



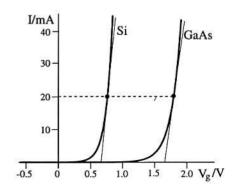
Tem-se assim a associação de um díodo ideal em série com a resistência dinâmica r_d e com uma fonte de tensão, a tensão de polarização do díodo V_D (ou V_P). Na prática, para se determinar a resistência dinâmica e a tensão de polarização nas condições de funcionamento desejadas, recorre-se à curva característica ddp-corrente aos terminais do díodo. A resistência dinâmica é dada pelo declive da tangente à curva no ponto de funcionamento enquanto que a tensão de polarização é o valor da ddp no ponto de intersecção da tangente com o eixo de V. V_D tem o significado de uma ddp que é necessário vencer para que o díodo entre em condução.

A relação entre a ddp e a corrente no díodo envolve como vimos as grandezas V_T e I_S que dependem da temperatura. Este facto reflecte-se ou na corrente que atravessa o díodo ou na ddp na junção. No caso da junção de Si em condução, para uma corrente

constante, a tensão V aos terminais do díodo diminui aproximadamente de 2.1 mV quando a temperatura aumenta de 1°C. O coeficiente de temperatura vale então $\frac{dV}{dT} \approx -2.1 \text{ mV/°C}$.

A ddp de polarização V_D para o Si à temperatura normal é ~0.7 V. A figura representa curvas características para junções de silício e de arsenieto de gálio com indicação dos modelos dinâmicos adequados para uma corrente de condução de 20 mA.

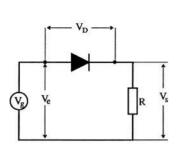
São também vulgares os díodos de Germânio (símbolo Ge, V_D~0.3 V).

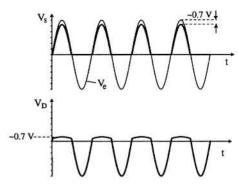


Aplicações dos díodos

Rectificação de meia-onda

Um circuito simples de um díodo em série com uma resistência de carga, como o da figura, quando alimentado com tensão alterna, apresenta na resistência uma ddp apenas com os ciclos positivos. Como o díodo só conduz em estado de polarização directa, nos ciclos negativos não há passagem de corrente. Devido ao díodo apenas conduzir a partir de um dado valor da tensão de polarização V_D a tensão de saída vem atenuada desse valor.





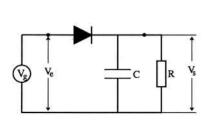
170

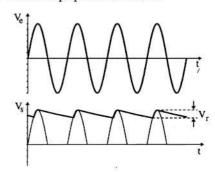
Para $V_e = V_o sen \omega t$ tem-se, $V_s = (V_o - V_D) sen \omega t$ se 0 < t < (2n+1)T/2 e $V_s = 0$ se (2n+1)T/2 < t < nT, com n=0,1,2,...

Esta acção do díodo no circuito é designada por RECTIFICAÇÃO DE MEIA--ONDA.

Rectificação com alisamento

Quando ao circuito anterior acoplarmos um condensador em paralelo com a resistência, obtemos após a rectificação um sinal alisado. Como se mostra na figura, este tipo de circuito permite passar de uma ddp variável a uma ddp quase constante.



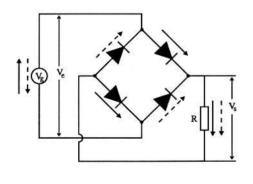


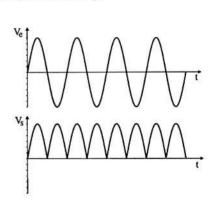
O condensador armazena carga nos ciclos positivos ascendentes e descarrega-se através da resistência nos ciclos descendente e negativo. A rapidez com que o condensador se descarrega é dada pelo valor da constante de tempo RC do circuito. A descarga do condensador provoca à saída uma queda de tensão designada por ondulação residual ou $\it ripple\ V_r$.

Esta pode ser calculada aproximadamente a partir da expressão da descarga do condensador $V_s(t) = V_o$ e ^{-i/RC}. Se RC \gg t $V_s(t) \approx V_o \left(1 - \frac{t}{RC}\right)$. Aproximando o tempo de descarga pelo período vem então $V_r = V_o - V_s(T) = V_o \frac{T}{RC}$.

Rectificação de onda completa

A situação ideal na rectificação de tensões alternas consiste em aproveitar ambos os ciclos da ddp, o que se consegue com vários díodos convenientemente associados. O esquema mostra como atingir este objectivo usando um conjunto de quatro díodos. Os sentidos indicados para a circulação da corrente assinalam o modo como esta associação permite a passagem dos ciclos positivos e negativos da ddp.





Uma fonte de tensão contínua ligada à alimentação da rede (220 V, 50 Hz), como as que são usadas para alimentar qualquer rádio portátil, pode ser facilmente construída com um transformador acoplado a uma ponte de quatro díodos e a um condensador. Neste caso, a tensão de ondulação residual é calculada para um tempo de descarga igual a T/2 e por isso $V_r = V_o - V_s \left(\frac{T}{2}\right) = V_o \frac{T}{2RC}$. A constante de tempo RC deve ser dimensionada de acordo com a frequência do sinal a rectificar. À saída do transformador deve ter-se uma ddp cerca de 1.5 V superior à tensão de funcionamento do aparelho, por forma a compensar as quedas de tensão no par de díodos (se forem de Si) que conduzem em cada ciclo

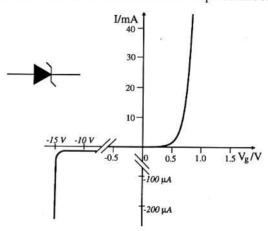
Tipos de díodo

Díodos de sinal

Nos díodos ditos de baixa potência ou de sinal, a potência dissipada é uma limitação à corrente máxima admissível. Para não «queimar» o díodo deve usar-se no circuito uma resistência limitadora de corrente. Por exemplo uma resistência de 1 k Ω limita a corrente no díodo a cerca de 10 mA quando este for curto-circuitado com uma tensão de 10 V. As pequenas dimensões desejáveis para estes componentes constituem também uma limitação à dissipação de calor. As junções de Si suportam como temperatura máxima valores da ordem de 175 °C.

Díodos Zener

O regime Zener num díodo ocorre quando se produz a disrupção da junção p-n para uma tensão de polarização inversa elevada. Os díodos que têm capacidade de dissipação para funcionarem em regime de disrupção são designados por díodos Zener. O seu símbolo e a curva característica corrente-tensão estão representados na figura.



A ddp para a qual a resistência do díodo cai bruscamente designa-se por tensão de Zener V_Z . Os díodos de silício podem funcionar com tensões Zener que vão de vários volt a

várias centenas de volt, com potências da ordem de 50 W. Estes componentes são usados como estabilizadores de tensão e nas aplicações em que se necessita de uma ddp de referência muito estável, em geral associados com transístores ou amplificadores operacionais.

Díodos emissores de luz — LED

Os LED (*Light Emitting Diode*) são díodos que brilham quando conduzem corrente, tipicamente da ordem de 5 mA a 20 mA. As cores mais vulgares são o vermelho, o laranja e o verde ⁴. As tensões de polarização situam-se entre 1.2 e 2.5 V.

O símbolo do LED é



Usam-se como lâmpadas indicadoras e em números ou letras luminosas.

Mas como é que uma junção emite luz? Quando um electrão salta da banda de condução para a de valência (ver Leitura 8) liberta uma energia E_g , e dois destinos são possíveis para essa energia. A situação mais frequente é ser transformada em energia térmica, introduzindo vibração na rede do silício. Em certas condições, ela pode aparecer na forma de energia electromagnética. Para isso é necessário que o salto em energia E_g seja suficiente para produzir um fotão, isto é, que $E_g \ge E_\lambda$ em que $E_\lambda = hc/\lambda$ é energia de um fotão de comprimento de onda λ , h é a constante de Planck e c a velocidade da luz. Os materiais mais usados neste tipo de díodos são do tipo arsenieto de gálio dopado com fósforo.

Díodos de capacidade variável

Existe uma categoria de díodos cujo valor da capacidade interna na junção p-n varia com o valor da ddp aplicada ao díodo de acordo com a seguinte equação:

 $C(V) = \frac{C_o}{(1+V/\phi)^{\gamma}}$ em que ϕ e γ são parâmetros característicos do díodo. Estes díodos

são designados por Varicap e são representados por



São geralmente usados em circuitos de sintonia ou modulação em frequência (ver Leitura 7). Devido à variação não linear das suas características, estes díodos podem ser utilizados na demonstração experimental de sistemas caóticos.

Transistor

O transístor foi o componente que revolucionou toda a Electrónica, vindo substituir as válvulas na maior parte das aplicações. O primeiro transístor nasceu dois dias antes do Natal de 1947 nos laboratórios AT&T Bell das mãos de W. Shockley, W. H. Brattain e J. Bardeen quando, a partir de um pedaço de semicondutor de germânio, conseguiram amplificar um sinal em tensão. As grandes vantagens deste componente em relação às

⁴ Os díodos emissores na zona do azul são menos frequentes pois os materiais que emitem na zona do azul (λ ~450 nm) como o carbite de silício são de fraco rendimento luminoso e outros como o nitrito de gálio e índio são muito caros.

suas antepassadas, as válvulas, são: dispensarem o vazio, o aquecimento de filamentos e altas ddp; oferecem a mesma capacidade de controlo numa dimensão e com consumo várias ordens de grandeza inferior e têm uma resposta muito mais rápida.

O transístor é o exemplo mais importante de um componente activo. É um dispositivo que amplifica sinais, produzindo uma saída com potência superior à da entrada. A potência adicional é fornecida pela fonte externa usada na polarização do transístor.

Hoje em dia existem muitos tipos de transístores, mas os mais vulgares são as junções bipolares de material semicondutor. Consoante o tipo de junções são referidos por PNP ou NPN. Estes últimos são mais vulgares.

O transístor bipolar é um componente com três terminais designados por colector C, base B e emissor E. O símbolo usual para transístores do tipo NPN está representado à direita, conjuntamente com um esboço do aspecto físico deste componente.

Para o transístor funcionar é necessário que

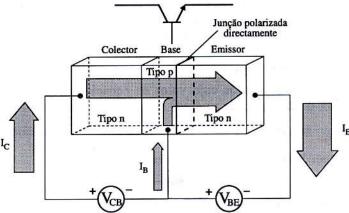
E

C

B

E

uma das junções esteja polarizada directamente, a base-emissor, e a outra (base-colector) polarizada inversamente. Nestas condições estabelecem-se correntes como indicado no esquema.

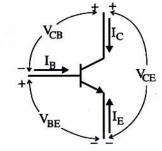


As ddp entre os diversos terminais e as correntes que fluem estão indicadas de acordo com a notação usual dos circuitos eléctricos. A relação entre corrente e ddp não é uma única como nos componentes lineares ou no díodo. O comportamento eléctrico do transístor deve ser descrito pelas relações entre seis variáveis (três correntes e três ddp).

As leis de Kirchhoff dizem que $I_B + I_C + I_E = 0$ e $V_{BE} - V_{CE} + V_{CB} = 0$ donde apenas quatro das variáveis anteriores serem independentes. Um modelo pormenorizado do transístor baseia-se na relação entre essas quatro variáveis.

No entanto em muitas situações práticas pode-se recorrer a um modelo simplificado do transístor baseado nos seguintes factos:

quando em condução, a ddp base-emissor V_{BE} tem um valor de cerca 0.7 V para junções de Si. Esta



característica não é de estranhar já que a junção base-emissor é em tudo análoga à de um díodo:

a corrente de colector I_C é aproximadamente igual à corrente de emissor I_E . De facto tem-se $I_B \ll I_C$ e por isso $I_C \approx -I_E$ (para muitos transístores tem-se

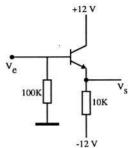
$$I_{B} < \frac{I_{C}}{100}$$
).

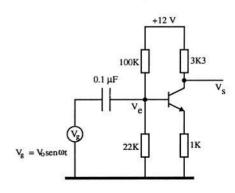
Definimos assim o seguinte modelo simplificado: um transístor na zona activa tem $V_{BE}=0.7~V~e~I_{C}\approx-I_{E}$. Esta relação é suficientemente aproximada para efeitos de cálculos, não pretendendo exprimir que $I_{B}=0$. De facto I_{C} é proporcional a I_{B} com $I_{C}=\beta$ I_{B} e $\beta\approx100$.

Para que um transístor funcione, as junções devem estar convenientemente polarizadas, garantindo-se que $V_C > V_E$.

Na figura junta indica-se o exemplo de um circuito de polarização. Segundo o modelo simplificado do transístor, na ausência de tensão de entrada, tem-se $V_B=0$ V, $V_C=+12$ V, $V_E=-0.7$ V e $I_C=I_E=1.1$ mA. Tem-se ainda que quando a ddp na base varia de ΔV_B , a tensão no emissor varia de $\Delta V_E=\Delta V_B$. O ganho entre a base e o emissor é um. Este tipo de configuração designase por seguidor de emissor.

Uma configuração mais interessante, que evidencia a capacidade de amplificação do transístor, é apresentada na figura seguinte. Na entrada do circuito é aplicada uma tensão sinusoidal. O condensador garante que apenas a parte variável do sinal é comunicada à base, não se alterando condições de funcionamento do transístor. As tensões de polarização que se obtêm a partir do modelo simplificado são, $V_B = 2.2 \ V, \ V_E = 1.5 \ V$. Vem então $I_C = I_E = 1.5 \ mA \ e \ V_C = 7.0 \ V$.





Agora, uma variação na tensão da base de ΔV_B provoca uma variação na corrente de colector dada por $\Delta I_C = \Delta V_B/R_E$ que por sua vez faz alterar a tensão no colector de $\Delta V_C = -\Delta I_C R_C$. O ganho em tensão A_V definido pela razão entre o sinal de saída ΔV_C que se observa no colector e o sinal de entrada ΔV_B que se aplica na base vem então dado por

$$A_V = \frac{\Delta V_C}{\Delta V_B} = - \frac{R_C}{R_E}$$

No exemplo dado este ganho vale -3.3. É esta a propriedade revolucionária do transístor! Amplificar sinais de tensão. Em termos de potência o ganho é ainda maior, cerca de 330, pois $I_C \approx 100I_B$. O sinal - no ganho significa apenas que o sinal de saída está invertido em relação ao de entrada.

Nesta leitura o transístor é descrito de um modo muito sucinto. O objectivo não é o de realizar o estudo deste componente, o qual tem o seu lugar nas disciplinas de electrónica. A razão desta abordagem resumida reside no facto de, em física experimental, os transdutores eléctricos serem imprescindíveis e muitos deles serem construídos com base em circuitos integrados (CI). Os CI são «pastilhas» de material semicondutor ou *chips* onde matrizes com centenas de transístores, díodos, resistências e capacidade são desenhados. Eles permitem executar um grande número de operações num espaço reduzido da ordem do centímetro quadrado, a maior parte do qual é reservado às ligações de entrada e saída.

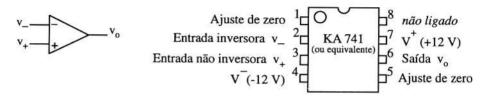
Amplificador operacional

O amplificador operacional (abreviadamente amp op) é basicamente um dispositivo amplificador de ganho elevado, que pode ser associado directamente a outros andares, e cuja resposta global é controlada por uma malha de realimentação. Este tipo de amplificador é usado num vasto conjunto de funções, que transcendem a simples amplificação de sinais. Nos nossos dias é vulgar o uso de amplificadores operacionais integrados.

Um amp op é representado por um triângulo em que geralmente se assinalam explicitamente apenas as duas entradas e a saída. As entradas vêm marcadas com – (entrada inversora) e com + (entrada não inversora). Como veremos esta designação está ligada à inversão (ou não) da fase do sinal à saída. Um amp op é um amplificador diferencial, ou seja, o sinal à saída é função da diferença de potencial entre a entrada inversora e a não-inversora. Seja V_{+-} a diferença de potencial entre as entradas + e – $(V_{+} - V_{-})$, então o ganho diferencial do amplificador básico é definido por

$$A = \frac{V_{safda}}{V_{...}}$$

Nas figuras seguintes representa-se, além do símbolo usado no desenho de circuitos eléctricos, o aspecto físico de um amp op indicando-se o significado de todos os seus oito contactos eléctricos



Em geral os amp op integrados são desenhados para serem alimentados por fontes de alimentação simétricas, sendo um valor típico ± 12 V. Este valor é contudo indicativo, podendo variar com o tipo de aplicação pretendida. Existem também amp op desenhados para funcionarem com fontes de alimentação simples (por exemplo pilhas).

As características de um AMP OP IDEAL são:

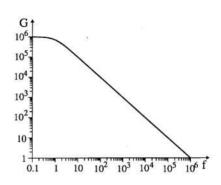
- ganho diferencial em tensão infinito (em malha aberta, i.e., sem realimentação);
- impedância de entrada infinita;

- impedância de saída nula:
- banda de passagem de frequências infinita:
- $V_{\text{safeta}} = 0$ se $V_{+} = V_{-}$.

Os amplificadores operacionais integrados oferecem um conjunto de características que os aproximam do comportamento de um amp op ideal. Para além disso o seu custo é baixo e são bastante robustos.

Algumas das características dos amp op reais são:

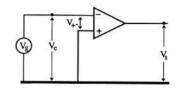
- ganho diferencial em tensão da ordem de 106 para corrente contínua (e em malha aberta):
- impedância de entrada elevada (>1 M Ω);
- impedância de saída baixa ($\approx 100 \Omega$);
- intensidade de corrente limitada a um valor máximo (25 mA é um valor típico):
- ganho que diminui com a frequência. podendo atingir um valor unitário para frequências da ordem de 1 MHz. Esta última característica encontra-se ilustrada na figura.



Circuito comparador

Vejamos agora o que sucede quando se usa o amp op num circuito simples, como o exemplificado na figura.

Neste caso a entrada não inversora está ligada à massa e a entrada inversora a uma fonte de tensão que a coloca a um determinado potencial em relação à massa. Se a diferença de potencial entre as entradas + e - for por exemplo, $V_{+-} = 1 \text{ V}$ obtemos à saída $V_s = -10^6 \text{ V}!!!$ Impossível... Que se passa então?



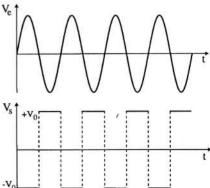
Para começar a ddp à saída do amplificador não pode ser mais elevada que a tensão de alimentação (por exemplo $\pm 12 \text{ V}$). Portanto, para $|V_{+-}|$ superior a um determinado valor, a tensão de saída satura e torna-se independente da entrada. No nosso exemplo, admitindo que a ddp de saída pode atingir a tensão de alimentação, a tensão de entrada para a qual se atinge a saturação é $\left|\frac{V_s}{A}\right| = \frac{12}{10^6} = 12 \ \mu V.$

Basta a aplicação de uma pequena ddp à entrada para provocar um grande sinal à saída! Este circuito designa-se por comparador.

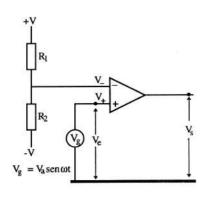
A ddp à saída tem apenas dois valores, um alto e outro baixo, conforme $V_{+-}>0$ ou $V_{+-}<0$ (ver gráfico). Idealmente tem-se para um comparador:

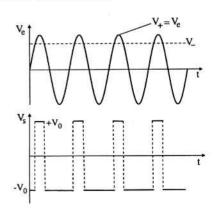
$$V_S = + V_o$$
 quando $V_+ > V_-$
 $V_S = - V_o$ quando $V_+ < V_-$

No exemplo anterior a passagem entre o valor alto e baixo dá-se quando a tensão na entrada inversora passa de negativa a positiva, porque o valor de comparação é zero: a entrada



não inversora está colocada à massa. É evidente que se pretendemos fazer a comparação com um outro valor de tensão basta colocar a entrada que faz de referência (no exemplo anterior a não inversora) a essa tensão. Na figura seguinte encontra-se um circuito em que se faz a comparação do valor escolhido de tensão com o sinal sinusoidal de uma fonte de tensão. Neste caso, como a tensão variável a comparar se encontra aplicada na entrada não inversora, não há inversão na fase do sinal à saída.





Vejamos agora como se pode usar um amp op para construir um amplificador de ganho estabilizado. Para tal é necessário recorrermos à realimentação.

Realimentação

A realimentação (retroacção ou *feedback*) é o processo pelo qual se aplica uma fracção do sinal de saída de volta na entrada para controlar a resposta do circuito. O princípio, em si é aplicável a diferentes tipos de mecanismos não sendo exclusivo dos circuitos eléctricos. Por exemplo, já o regulador de esferas da máquina a vapor de James Watt se baseava no princípio da realimentação.

A realimentação pode ser positiva ou negativa. Aqui apenas vamos tratar casos em que a realimentação é negativa. Nesse caso o sinal de amostragem dado pela

malha de realimentação tende a diminuir o sinal de entrada e por isso aplica-se sempre na entrada inversora do amp op.

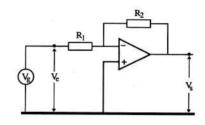
Através da realimentação o ganho do amplificador operacional é propositadamente reduzido. Com este método tenta-se establizar o ganho do amplificador, tornando-o (dentro de certos limites) independente da frequência e amplitude do sinal de entrada. O valor do ganho fica também deste modo bem determinado a partir dos elementos passivos colocados na malha de realimentação. Em muitas aplicações torna-se possível substituir um dado amp op por outro «do mesmo tipo», sem que as características do circuito venham afectadas.

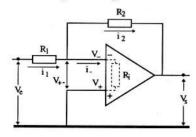
Como se viu no exemplo do comparador, devido ao elevado ganho em malha aberta do amp op, basta um pequeno valor de V_{+-} para produzir a saturação do sinal à saída. Por isso, se o amp op configurado como amplificador não está saturado, isto significa que a ddp entre as duas entradas deve ser quase nula, $V_{+-} = V_{+} - V_{-} \approx 0$. Esta regra é essencial para a compreensão do funcionamento dos circuitos que se seguem.

Amplificador inversor

Com o amp op montado como se mostra na figura, a malha de realimentação é apenas constituída pela resistência R₂.

O ganho pode ser facilmente determinado tendo em atenção as características do amp op ideal já referidas e as ddp e correntes representadas no esquema seguinte.





Assim temos que o potencial na entrada inversora V_- deve ser nulo já que $V_+ = 0$ e $V_{+-} = V_+ - V_- \approx 0$ (regra do amp op ideal não saturado). O valor da intensidade de corrente i_- que entra no amplificador deverá ser aproximadamente zero pois a impedância interna R_i é muito elevada e o potencial V_- é praticamente nulo.

Pela lei dos nós, se $i_-=0$ então $i_1=i_2$. A ddp à entrada V_e e de saída V_s são respectivamente iguais a

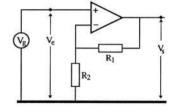
$$V_e = i_1 R_1$$
 $V_s = -i_2 R_2 = -i_1 R_2 = -V_e. \frac{R_2}{R}$

A tensão de saída encontra-se em oposição de fase relativamente à tensão de entrada e daí este amplificador ser designado por inversor. Esta característica resulta do facto do sinal de entrada ser aplicado na entrada inversora. O ganho do amplificador com realimentação vem dado por

$$A = \frac{V_s}{V_c} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Amplificador não inversor

Vejamos agora como determinar o ganho de um amp op montado na configuração da figura, em que agora o sinal de entrada é aplicado na entrada não inversora do amp op. Tal como já foi dito, continuamos a considerar que $V_{+-} = V_+ - V_- \approx 0$, e que $i_- = 0$ (o que faz com que $i_- = i_2$) como representado no segundo esquema. A ddp de entrada é dada por



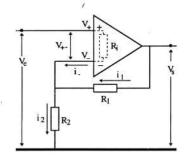
$$V_e = V_{+-} + i_2 R_2 = i_2 R_2$$

enquanto que a ddp de saída

$$V_s = i_1 R_1 + i_2 R_2 = i_2 (R_1 + R_2)$$

O ganho vem assim igual a

$$A = \frac{V_s}{V_s} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$



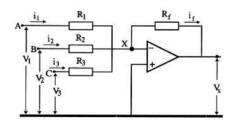
A saída tem o mesmo sinal da entrada e o amplificador é designado por não inversor.

Dimensionamento das resistências da malha de realimentação

Em princípio para se obter um determinado ganho basta usar resistências cujo valor satisfaça as relações obtidas. Contudo na prática valores muito elevados (>1 $M\Omega$) ou muito baixos (<100 Ω) não são aconselhados. A implementação de circuitos com resistências de valores muito elevados, leva a que as intensidades de corrente que circulam nas malhas de realimentação sejam da ordem de grandeza das intensidades de corrente que entram no amp op, pelo que as aproximações feitas deixam de ser válidas. Por outro lado o uso de resistências muito pequenas leva a que as intensidades de corrente sejam elevadas, o que também é inconveniente pois os amp op's têm limitações na corrente máxima que podem fornecer à saída.

Circuito soma

O circuito da figura constitui um somador de sinais.



Ele é basicamente um amplificador inversor com múltiplas entradas pelo que, como foi visto acima, o ponto X comporta-se como uma massa virtual, isto é, encontra-se ao potencial zero. Assim o sinal em cada um dos pontos de entrada A, B, etc. não é afectado pela presença dos restantes. A intensidade de corrente que circula na resistência R_f

é dada por
$$i_f = i_1 + i_2 + ...$$
 Atendendo a que $i_f = \frac{V_s}{R_f}$ e $i_1 = \frac{V_1}{R_1}$, tem-se

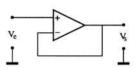
$$-V_s = V_1 \frac{R_f}{R_1} + V_2 \frac{R_f}{R_2} + ...$$

No caso de todas as resistências terem igual valor $R_f = R_1 = R_2 = ...$ o valor de V_s é simplesmente igual ao simétrico da soma das tensões de entrada $V_1 + V_2 + ...$

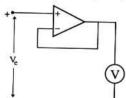
Circuito seguidor de tensão

O circuito seguidor de tensão tem ganho igual a 1, sendo o sinal de saída igual ao da entrada.

A sua utilidade está no facto de apresentar uma impedância de entrada muito elevada e uma impedância de saída baixa. Como vemos na figura a entrada não inversora encontra-se ligada directamente à saída, logo $V_e = V_s$.



Um exemplo de aplicação deste circuito encontra-se na figura a seguir.



Um voltímetro analógico encontra-se ligado à saída do amp op. Desta forma consegue-se melhorar consideravelmente a resistência interna do voltímetro.

Um grande número de outras aplicações do amp op podem ser construídas a partir das configurações básicas estudadas. Consoante o tipo de componentes que são colocados à entrada do circuito e na malha de realimentação do amplificador não inversor, assim podemos construir circuitos que realizem operações matemáticas como derivação, integração, exponenciação, logaritmação e inversão.



O que é Temperatura

TEMPERATURA é a grandeza que nos diz quão quente ou frio está um corpo. Depende não só da energia interna do corpo, como da sua massa e das suas características.

Os objectos, sistemas físicos, com que lidamos habitualmente e que são sujeitos à nossa observação e experimentação, são constituídos por um imenso aglomerado de átomos e moléculas, cujo número é da ordem do Número de Avogadro (6.02×10²³ partículas por mole). Atendendo a que estes átomos e moléculas se encontram ligados entre si e em constante movimento, é extraordinário como necessitamos apenas de um reduzido número de parâmetros para descrever completamente o estado macroscópio de um sistema. Por exemplo, um pêndulo simples em oscilação fica completamente caracterizado pela sua massa, volume, velocidade, posição, temperatura, susceptibilidade magnética e alguns outros parâmetros adicionais. A descrição microscópica deste mesmo sistema envolveria o conhecimento da evolução ao longo do tempo de cerca de 10²⁴ variáveis, o que é impossível, mesmo para os meios de cálculo hoje postos à nossa disposição.

Uma das principais razões para a simplicidade da descrição do mundo macroscópico reside no facto de o tempo necessário para se realizar uma medição simples ser muito superior aos períodos característicos dos movimentos atómicos, da ordem de 10^{-15} s. Se pretendermos conhecer por exemplo a posição do pêndulo com uma preci-

são de $\frac{1}{1000}$ s, podemos usar uma máquina fotográfica para esse efeito. Simplesmente, durante o tempo de exposição do filme as partículas constituintes do pêndulo executam mais de 10^{11} ciclos de um movimento de interacção complexo. A conclusão a tirar é que a imagem revelada é de facto a média de um grande número de movimentos microscópicos. É deste processo de média estatística que resulta a simplicidade da descrição dos sistemas macroscópicos.

A Mecânica e o Electromagnetismo constituem domínios da Física que estudam conjuntos particulares de variáveis sobreviventes deste processo de simplificação como sejam o volume, pressão, módulos elásticos, permeabilidade eléctrica, momento dipolar eléctrico, etc. A estas variáveis encontram-se associadas diferentes formas de energia, como sejam a energia potencial gravítica, energia cinética, energia potencial electrostática, etc. No entanto, os modos internos de movimento apesar de se anularem quase todos durante o processo de média, têm a eles associados uma energia que pode ser quantificável e cuja soma tem de facto um efeito macroscópico, é a ENERGIA INTERNA do sistema.

A energia interna resulta da contribuição das energias cinética de translação, rotação e vibração dos átomos e moléculas que constituem o sistema físico, e ainda da energia potencial associada à interacção mútua das partículas organizadas na estrutura constituinte da matéria. A temperatura é a grandeza macroscópica mais simples

que é usada para medir a energia interna. Ela encontra-se directamente associada às nossas sensações de frio e quente, embora a sensação física de quente/frio provocada por um corpodependa ainda de outros factores como sejam a sua capacidade calorífica e conductibilidade térmica. Microscopicamente, a temperatura mede apenas a energia cinética média do movimento de translação do centro de massa dos átomos e moléculas do sistema físico. Podemos ter assim sistemas à mesma temperatura mas com valores muito diferentes de energia interna. O exemplo mais simples é o caso da água nas fases líquida e gasosa, à mesma temperatura de 100°C. Na fase líquida a energia potencial de interacção molecular é muito importante, enquanto que na fase gasosa as interacções são muito menos intensas e quase desprezáveis.

Calor e trabalho são duas formas genéricas de fornecer ou extrair energia a um sistema. Por isso, calor e trabalho não são formas de energia mas apenas energia em trânsito, e as suas unidades são as da energia, joule (J) no sistema SI. A classificação do tipo de troca de energia depende da natureza da causa que provoca a transferência. Se a transferência é realizada de forma ordenada, como pela aplicação de uma força ou um campo, tendo como resultado uma variação macroscópica mensurável: variação de volume, deslocamento de uma força, variação da polarização ou variação do número de moles, então essa transferência realizou-se sob a forma de trabalho, respectivamente: trabalho mecânico dW = PdV ou dW = Fdl, trabalho eléctrico dW = EdP, trabalho químico dW = µdN, etc.

Quando um sistema a uma dada temperatura é posto em contacto com outro a uma temperatura diferente, o contraste existente entre as energias médias de translação das partículas constituintes tem tendência a anular-se progressivamente através de choques sucessivos, perdendo as moléculas rápidas energia para as moléculas lentas. Como resultado, deu-se uma transferência de energia entre os sistemas da qual resulta uma variação da energia interna afectando apenas os modos internos de movimento, sem ter mais nenhuma consequência macroscópica além da variação de temperatura. É esta forma desordenada de transferência de energia, exclusivamente determinada pela temperatura, que se designa por calor.

Quando uma bola é deixada cair e bate no chão, ela ressalta sem atingir no entanto a mesma altura inicial. Durante o choque dá-se a deformação quer da bola quer do chão, com variação da forma e dimensões macroscópicas, sendo realizado trabalho. No entanto parte da energia cinética da bola é convertida em energia interna, aumentando o estado de agitação das moléculas do chão e da bola, não podendo por isso ser recuperada quando se dá o ressalto. A bola ressalta mais baixo mas a uma temperatura mais elevada deixando o chão também mais quente.

A temperatura influencia as propriedades de certos materiais, basta lembrar os materiais que se tornam supercondutores para baixas temperaturas ou a dilatação dos corpos consoante a temperatura a que os sujeitamos.

Escalas de temperatura

A temperatura pode ser referida a diversas escalas, analisemos as mais vulgares: Celsius, Fabrenheit e absoluta

Escala absoluta de temperatura

A escala absoluta ou de Kelvin foi introduzida pelo físico W. Thompson (Lord Kelvin). Os valores da temperatura nesta escala designam-se por kelvin e representam-se por K.

Como a temperatura não pode ser expressa em termos de massa, comprimento ou tempo foi necessário introduzir uma nova unidade no sistema internacional e a adoptada foi o kelvin.

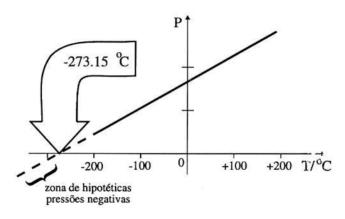
O valor de um kelvin é equivalente a um grau Celsius, isto é existem cem kelvin entre a temperatura do gelo e a do vapor de água.

A escala absoluta baseia-se no facto de que existe uma temperatura, denominada ZERO ABSOLUTO, para a qual um gás ideal deixa de exercer pressão.

A relação entre a escala absoluta e a Celsius é

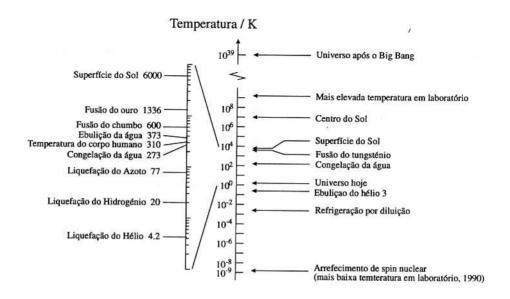
$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273.15$$

Quando um gás, confinado a um volume constante, é aquecido a agitação molecular é maior e a pressão aumenta. A relação entre o volume V e a pressão P é dada pela lei de Boyle-Mariotte. Quando se arrefece a pressão diminui. Fazendo variar a temperatura e registando os valores da pressão a volume constante, obtém-se uma recta conforme a traçada no gráfico junto. A sua extrapolação para um valor de pressão zero dá a temperatura mínima que se poderá atingir e o seu valor situa-se a -273.15°C.



Na realidade todos os gases conhecidos liquifazem-se antes de atingir o zero absoluto, o hélio e o hidrogénio são os que se liquifazem às temperaturas mais baixas. Tudo faz prever que, em sistemas macroscópicos, não se possam obter temperaturas inferiores ao zero absoluto pois corresponderiam a pressões negativas, noção sem sentido.

A tabela seguinte dá a temperatura de alguns fenómenos.



Escalas Celsius e Fahrenheit

Em ambas as escalas os pontos de referência são os mesmos: as temperaturas de congelação e ebulição da água à pressão de 1 atm. A diferença reside no facto de na escala de Celsius o valor atribuído à primeira temperatura ser 0° C e à segunda 100° C enquanto na escala de Fahrenheit são respectivamente, 32 e 212° F. O grau Celsius é maior que o Fahrenheit $\frac{180}{100}$ vezes ou seja $\frac{9}{5}$. A escala Fahrenheit é corrente nos Estados Unidos.

$$T_F = \frac{9}{5} T_C + 32 ^{\circ}C$$

Vejamos um exemplo de conversão de 37°C em graus Fahrenheit. Primeiro devemos calcular quantos graus Fahrenheit vale o intervalo $0\rightarrow37$ °C, para tal basta multiplicar por $\frac{9}{5}$, dando 66.6°F. Depois devemos somar 32, a diferença de origem de escala. Portanto temos que a temperatura do corpo humano nesta escala é de 98.6°F.

Medidores de temperatura

Para medir a temperatura dos objectos usam-se termómetros. Alguns termómetros baseiam-se no facto dos materiais se dilatarem quando a temperatura aumenta. O tradicional termómetro de mercúrio utiliza a dilatação deste líquido num tubo capilar convenientemente graduado, em que o zero é marcado para gelo fundente e o valor 100 para o vapor de água.

Outros processos existem para medir temperaturas. Por exemplo o valor da resistência de certos materiais altera-se com a temperatura, donde se calibrarmos estes sistemas, isto é, se soubermos as relações R(T) podemos usar termómetros de resistência. Outro processo usa a variação da ddp de polarização dos díodos semicondutores em função da temperatura.

Transdutores resistivos de temperatura

Condutores

A resistência eléctrica R de um condutor é directamente proporcional ao seu comprimento L e inversamente proporcional à sua secção recta S

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

A constante de proporcionalidade ρ designa-se por resistividade e depende das características materiais do condutor, mas não da sua forma geométrica. A resistividade depende também da temperatura a que o condutor se encontra. Para muitos condutores metálicos a resistividade (e consequentemente a resistência) apresenta uma variação com a temperatura do tipo:

$$\rho\left(T\right)=\rho_{o}\left(1+\alpha\;\Delta T+\beta\;\Delta T^{2}+...\right)$$

onde ρ_o é a resistividade do condutor medida a uma temperatura T_o , α e β são constantes e $\Delta T = T - T_o$. Em pequenos intervalos de temperatura, e dependendo do tipo de material, podemos escrever:

$$\rho(T) = \rho_o(1 + \alpha \Delta T)$$

onde α passa a ser designado por coeficiente de temperatura da resistividade.

Para um material poder ser um bom termómetro deve apresentar um coeficiente de temperatura α tão elevado quanto possível, e deve ser largo o intervalo de temperaturas em que apresenta um comportamento linear. Alguns dos metais utilizados com estes fins são o níquel, o tungsténio e a platina, cujas propriedades termoresistivas estão resumidas na tabela. A platina, devido ao seu custo, só é geralmente usada no laboratório

quando se pretende fazer uma medida de precisão no intervalo de temperaturas compreendido entre o ponto de liquefação do oxigénio (-182.96°C) e o ponto de fusão do antimónio (630.74°C).

metal	resistividade (a 20°C) (10 ⁻⁸ Ω m)	Coef. de Temperatura da resistividade (°C ⁻¹)	
cobre	1.7	0.0038	
tungsténio	5.6	0.0045	
níquel	6.8	0.006	
ferro	10.0	0.005	
platina	10.0	0.003	

A resistividade duma liga metálica é em geral superior à dos metais que a constituem. Contudo a influência da temperatura é em geral menos importante. O quadro fornece alguns exemplos:

ligas metálicas	resistividade a 20°C (10-8 Ω m)	Coef. de Temperatura da resistividade (°C-1)
latão (70% Cu, 30% Zn)	6.3	0.00020
constantan (60% Cu, 40% Ni)	42	0.00001
ferro-níquel (75% Fe, 25% Ni)	80	0.00009

Termístores

Um termístor (resistência sensível à temperatura) é um dispositivo semicondutor que apresenta uma rápida variação da sua resistência com a temperatura. Para os termístores de coeficiente negativo de temperatura (NTC) a sua resistência pode ser aproximadamente determinada pela fórmula

$$R = R_o e^{\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_o}\right)}$$

em que β é uma constante positiva, R_o é a resistência do termístor à temperatura T_o , e T é a temperatura absoluta em kelvin. A temperaturas elevadas esta fórmula reduz-se a

$$R = R_o e^{\frac{\beta}{T}}$$

O coeficiente de temperatura da resistência pode ser definido para um termístor a partir da expressão

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = -\frac{\beta}{T^2}$$

Os termístores existem sob várias formas e a sua resistência pode variar entre $100~\Omega$ e $10^7~\Omega$. Existem termístores que podem suportar temperaturas da ordem dos $350~\rm ^{\circ}C$, mas muitos dos que estão comercialmente disponíveis apresentam valores máximos de temperatura menos elevados. O intervalo típico de funcionamento situa-se entre $-10~\rm ^{\circ}C$ e $+100~\rm ^{\circ}C$. As resistências NTC são constituídas à base de óxidos de metais como ferro, crómio, níquel, cobalto, etc. Estes óxidos no estado puro apresentam uma elevada resistividade, mas podem tornar-se semicondutores por adição de pequenas quantidades de um outro metal com uma valência diferente.

Existem também termístores com coeficiente de temperatura positivo (PTC), mas a dependência da sua resistência com a temperatura é mais complexa que no caso dos NTC.

Termómetros de junção semicondutora

Os díodos de junção têm uma tensão de polarização a partir da qual conduzem sem introduzir quase resistência no circuito. Esta tensão de polarização V_D é uma característica do material de que é feito o díodo, sendo aproximadamente 0.7 V para díodos de silício. O valor é dado na forma aproximada porque para além de sofrer pequenas variações consoante o fabrico é também função da temperatura, apresentando para o díodo de silício um coeficiente $-2.1 \text{ mV/}^{\circ}\text{C}$. Uma vez conhecida a curva de calibração $V_D(T)$ podemos usar a junção como termómetro.



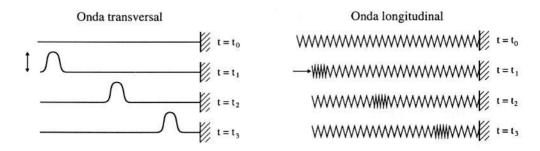
LEITURA 6

Ondas

São vários os fenómenos físicos que envolvem a propagação de ondas. Em si, uma onda pode ser vista como a propagação de uma perturbação. Essa perturbação pode ter uma base material (por exemplo as ondas que se propagam numa corda sob tensão), ou não, como seja o caso da luz que se propaga no vazio. Muitos dos fenómenos ondulatórios com que deparamos quotidianamente, têm uma natureza mecânica e resultam da deformação de meios materiais. Um exemplo típico é o das ondas formadas na superfície livre de um lago quando atiramos uma pedra, ou então o das ondas do mar. O som é também um tipo de onda que resulta em pequenas variações de pressão na atmosfera que nos rodeia. Como exemplo de propagação de ondas em sólidos temos as ondas sísmicas resultantes dos terramotos. Ainda outro exemplo de propagação de ondas em líquidos são as ondas do mar que vemos chegar à costa.

As ondas mecânicas provocam o deslocamento de uma parte do meio em relação a uma posição de equilíbrio. Note-se que o meio como um todo não se desloca, mas apenas a perturbação do mesmo. Lembremo-nos do caso do banhista a boiar no mar que sobe e desce nas ondas mas permanece no mesmo sítio depois da onda passar.

Conforme a direcção de oscilação do meio é perpendicular à direcção de propagação ou se efectua na mesma direcção, assim as ondas são designadas por transversais ou longitudinais.



Um exemplo de onda transversal é a que se propaga ao longo de uma corda «esticada» quando esta é afastada do seu ponto de equilíbrio. Por outro lado se disposermos de uma mola que esticamos e comprimimos, a onda resultante é do tipo longitudinal. As ondas sonoras são também um exemplo de ondas longitudinais. Nos sólidos existem os dois tipos de ondas. Nas ondas sísmicas as ondas longitudinais são designadas por P e as transversais por S.

Existem outros fenómenos ondulatórios que não têm origem mecânica, as ondas luminosas são um exemplo. Estas pertencem à grande família das ondas electromagnéticas. Como já foi referido neste caso não é necessário a existência de um meio material para a propagação das ondas — a luz propaga-se no vazio. As ondas electromagnéticas são transversais. O campo eléctrico (e magnético) vibra num plano perpendicular à direcção de

propagação. As ondas de rádio também são ondas electromagnéticas e ocupam no espectro de frequências a região que se situa entre os 100 kHz (ondas longas) e 1 GHz (ondas de radar). São também ondas electromagnéticas os raios X e os raios gama emitidos nas desintegrações radioactivas (ver tabela com a divisão do espectro electromagnético).

Equação de propagação das ondas

Para fixar ideias comecemos com o caso de uma onda a uma dimensão (como seja por exemplo a amplitude de vibração da corda da guitarra). Seja então $\Psi(x,t)$ a grandeza física que apresenta um comportamento ondulatório. Notemos desde já que Ψ é função não só do tempo t mas também da coordenada espacial x. Que tipo de função Ψ pode então representar uma onda? Em princípio não existem restricções às «formas» possíveis que uma onda pode assumir. No entanto, como vamos verificar, existe uma propriedade comum a todos os tipos de onda. Consideremos a onda representada na figura. Vejamos o que acontece com o valor máximo da onda com o decorrer do tempo. No instante $t = t_1$ o valor máximo da onda encontra-se em $x = x_1$. Num instante de tempo posterior $t = t_2$ a onda propagou-se (com velocidade v) e agora o máximo da amplitude encontra-se em v0 e agora o máximo da em si continua a ter a mesma forma. Conhecida a velocidade de propagação da onda é fácil obter o valor de v1 a partir de v1

ou
$$x_{2} = x_{1} + v(t_{2} - t_{1})$$

$$x_{2} = x_{1} + v(t_{2} - t_{1})$$

$$x_{2} - vt_{2} = x_{1} - vt_{1} = \phi_{1}$$

$$\phi = x_{2} - x_{1} - x_{2} - x_{2} - x_{1} - x_{2} - x_{2} - x_{1} - x_{2} - x_{2}$$

Então qualquer que seja x' e t', se verificarem a relação $x' - vt' = \varphi_1$ a amplitude da onda será igual à do instante $t = t_1$, no ponto de espaço $x = x_1$ (e que no nosso exemplo corresponde ao valor máximo). A variável $\varphi = x - vt$ é designada por fase da onda. Para conhecermos a amplitude da onda não é necessário conhecer x e t individualmente, bastando conhecer a fase da onda.

Matematicamente a onda pode ser descrita pela seguinte equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

onde v é a velocidade de propagação (velocidade de fase). Uma solução possível para esta equação é, como já vimos, dada pela família de funções do tipo $\Psi(x,t) = f(x-vt)$. Mas é fácil verificar que $\Psi(x,t) = g(x+vt)$ é também uma solução da equação diferencial. No nosso exemplo g(x+vt) representa uma onda a propagar-se da direita para a esquerda com velocidade -v.

Dado que a equação de propagação das ondas é linear em x e t, então se Ψ_1 e Ψ_2 são soluções da equação de ondas então $\Psi_1 + \Psi_2$ também é uma solução. A solução mais geral para $\Psi(x,t)$ é pois dada por $\Psi = c_1 f(x-vt) + c_2 g(x+vt)$.

Fisicamente a primeira componente representa uma onda que se propaga segundo o eixo dos XX com velocidade positiva (i.e. da esquerda para a direita) enquanto que a segunda componente representa uma onda que se propaga no sentido oposto (e portanto com velocidade -v).

Se considerarmos que num determinado ponto do espaço x_o no instante de tempo t_o o valor da função é $\Psi(x_o, t_o)$, então o mesmo valor será repetido para todos os pontos (x,t) que verifiquem a condição x_o -v t_o = x-vt (ver figura anterior).

Como se vê as funções solução da equação de propagação das ondas, não têm que ser periódicas. No entanto as soluções periódicas constituem um importante conjunto de casos, de entre os quais se destacam o das funções sinusoidais. Esta classe de funções é muito importante pois a análise de Fourier mostra-nos que qualquer função periódica «bem comportada» pode ser decomposta numa soma (série) de funções sinusodais. Se f(y) for uma função de período $T = 2\pi/\omega$, então pode ser expressa como uma soma de funções sinusoidais

$$f(y) = a_0 + a_1 \cos \omega y + a_2 \cos 2\omega y + + b_1 \sin \omega y + b_2 \sin 2\omega y +$$

em que os coeficientes a_o, a_n e b_n são dados por

$$a_o = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(y) \ dy, \qquad a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(y) \cos(n\omega y) \ dy,$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{0}^{2\pi/\omega} f(y) \operatorname{sen}(n\omega y) \, dy$$

A componente com a mesma frequência ω da função f(y) é chamada de fundamental e as componentes de frequências 2ω , 3ω , etc. de harmónicas.

Dado que as funções periódicas podem decompor-se numa soma de funções sinusoidais, então basta-nos estudar o comportamento destas últimas.

Ondas harmónicas

Consideremos agora o caso em que a amplitude da onda é descrita por uma função sinusoidal. A partir destas funções é fácil chegar aos conceitos fundamentais de comprimento de onda e frequência.

Um oscilador harmónico pode dar origem a uma onda sinusoidal. Por exemplo, um altifalante que vibra com uma frequência f, dá origem a uma onda sonora de igual frequência. A amplitude de vibração do oscilador harmónico em função do tempo pode ser dada por $\Psi(t) = a_o$ sen $(\omega t + \delta)$. Nesta expressão a_o representa a amplitude máxima de oscilação, $\omega = 2\pi f$ a frequência angular e δ a fase inicial (ver leitura sobre o pên-

dulo). Uma vez que a frequência é igual ao número de vezes que um determinado valor da amplitude se repete durante uma unidade de tempo, o período de oscilação T (ou seja o tempo que leva o oscilador a repetir esse determinado valor da amplitude) é simplesmente igual ao inverso da frequência

$$T = \frac{1}{f}$$

A onda gerada por um oscilador harmónico será descrita por uma função sinusoidal do tipo $\Psi(x,t) = A_o$ sen $[k(x-vt) + \delta]$. Nesta equação A_o e k são constantes positivas. A frequência do oscilador harmónico e da onda são idênticos pelo que se tem que ter $kv = \omega = 2\pi f$.

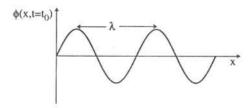
Dado que a função seno tem período 2π , fixado um instante t existe um período de repetição espacial λ , designado por comprimento de onda, tal que

$$\operatorname{sen}[k(x - vt) + \delta] = \operatorname{sen}[k(x + \lambda - vt) + \delta] = \operatorname{sen}[k(x - vt) + \delta + 2\pi]$$

ou seja

$$k\lambda = 2\pi$$
 ou $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

A constante k é designada por número de onda, e é a frequência de repetição espacial. Se «congelarmos» a onda no instante de tempo t = t' então verificamos que o valor da função sen(kx) se repete ao fim de um comprimento de onda (ver figura).



Das relações anteriores facilmente se retira a relação existente entre o período temporal e o comprimento de onda $T=\frac{\lambda}{v}$, ou relativamente à frequência $f=\frac{v}{\lambda}$.

A frequência f é uma grandeza característica da onda e, ao contrário do comprimento de onda, não depende do meio material em que a onda se propaga. De facto a velocidade de propagação da onda depende do meio material que atravessa (lembramos, por exemplo, que o fenómeno de refracção da luz é devido à variação da velocidade da luz quando esta muda de meio). Se a frequência f não depende do meio material, então o comprimento de onda λ tem que depender já que $\lambda = \frac{v}{f}$.

Ondas de rádio - modulação em amplitude

Suponhamos que pretendemos transmitir uma mensagem (por exemplo voz humana) entre um emissor e um receptor usando ondas electromagnéticas. Poderíamos pensar em transformar as ondas sonoras em ondas electromagnéticas, da mesma frequência (ou seja

entre 30 e 20 000 Hz), que seriam emitidas. Mas se todos os emissores pensassem em fazer o mesmo, então as diversas emissões iriam sobrepor-se! É pois necessário usar frequências mais elevadas na transmissão de mensagens. Em radiodifusão usam-se em geral frequências acima dos 100 kHz. A esta onda de alta frequência (onda portadora) é necessário adicionar a informação que se pretende transmitir. Em geral a transmissão de informação usando ondas electromagéticas faz-se usando a modulação da onda portadora. Dois tipos habitualmente utilizados são a modulação em amplitude ou em frequência. No primeiro caso a informação encontra-se contida nas variações da amplitude (máxima) da onda portadora, enquanto que no segundo caso é a frequência da onda portadora que varia. Comecemos por discutir mais em detalhe o caso da modulação em amplitude.

Vamos supor que dispomos de um gerador de radiofrequência (RF), que nos fornece uma onda de frequência f_o e amplitude máxima V_o . A amplitude dada pelo oscilador de RF em cada instante será dada por $V_{RF} = V_o \cos \omega_o t$ onde $\omega_o = 2\pi f_o$. Notemos que nesta discussão importa apenas considerar a parte temporal da onda já que todo o processo de modulação se desenrola num ponto do espaço: o rádio emissor.

Por outro lado, um andar de audiofrequência (AF) dá-nos um sinal de frequência f_m , com uma amplitude máxima V_m , que pretendemos transmitir: V_{AF} = V_m cos $\omega_m t$ e $\omega_m = 2\pi f_m$.

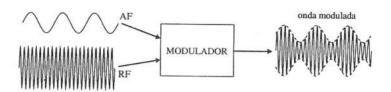
A modulação em amplitude da onda RF consiste em fazer variar o seu valor máximo em torno de V_{o} de acordo com o sinal de AF. A V_{o} somamos o valor do sinal AF, passando a amplitude máxima da onda de RF a ser dada por $V_{\text{o}} + V_{\text{m}} \cos \omega_{\text{m}} \, t$.

Se substituirmos V_o por esta última expressão em V_{RF} ficamos com:

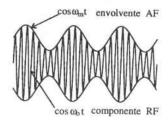
$$V_{RF} = (V_o + V_m \cos \omega_m t) \cos \omega_o t$$

= $V_o \cos \omega_o t + V_m \cos \omega_m t \cos \omega_o t$

A figura evidencia a forma da onda.



Pormenor da onda modulada



Se nos lembrarmos que em condições realistas de funcionamento se tem $\omega_o \gg \omega_m$, verificamos facilmente que a modulação se traduz numa «variação lenta» da amplitude máxima da onda portadora de RF (ver figura). Analisemos um pouco mais em detalhe a expressão da onda modulada. Recorrendo à relação trignométrica $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta)$ e aplicando à expressão da onda modu-

lada obtém-se

$$V_{RF} = V_o \cos \omega_o t + \frac{1}{2} V_m \cos(\omega_o + \omega_m)t + \frac{1}{2} V_m \cos(\omega_o - \omega_m)t$$

Esta última expressão diz-nos que a onda modulada pode ser vista como o resultado da soma de três ondas sinusoidais de frequências f_o (onda portadora não modulada), $f_o + f_m$ (onda lateral superior) e $f_o - f_m$ (onda lateral inferior).

Na prática pretendemos modular a onda de RF com sinais AF que obtemos por exemplo de um microfone, ou de uma gravação. O sinal a transmitir não é constituído apenas por uma frequência, mas por várias. Neste caso falamos de bandas laterais. Seja f_{max} e f_{min} respectivamente o valor da frequência mais elevada e mais baixa que se pretende transmitir. A banda lateral superior está compreendida entre $f_o + f_{\text{max}}$ e $f_o + f_{\text{min}}$ e a banda lateral inferior entre $f_o - f_{\text{min}}$ e $f_o - f_{\text{max}}$. A largura da banda de frequências é dada por

$$\Delta f = (f_0 + f_{max}) - (f_0 - f_{max}) = 2f_{max}$$

Nas emissões em amplitude modulada (AM) um valor típico para f_{max} é 5 kHz. Uma vez que o espectro de frequências audíveis se situa aproximadamente entre 30 Hz e 20 kHz, vê-se que as emissões em AM são de baixa fidelidade.

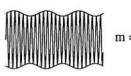
É de notar que para dar passagem a esta banda de frequências o emissor tem que ocupar uma faixa Δf igual a 10 kHz, na qual não podem emitir outras estações, sob pena das emissões se sobreporem.

Profundidade de modulação

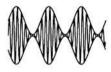
Define-se a profundidade de modulação m como sendo a razão de V_m , amplitude máxima da onda AF, por V_o , amplitude máxima da onda RF.

$$m = \frac{V_m}{V_o}$$

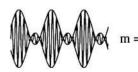
Quanto maior é a profundidade de modulação mais «cavada» é a envolvente da onda RF (ver figura). Para que o sinal transmitido seja de boa qualidade o valor de m deve ser tão elevado quanto possível (i.e. $m \approx 1$). No entanto não interessa ter m > 1 (sobremodulação), pois neste caso apenas se consegue uma inversão da fase da onda portadora, não sendo aproveitada de uma forma útil a potência que é fornecida a mais.



m = 0.1



m = 0.95



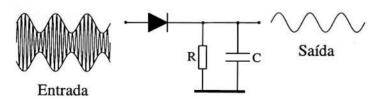
As ondas emitidas pelas diferentes estações de rádio são captadas pela antena. A escolha da emissão que se pretende receber cabe ao circuito de sintonização. Esta tarefa é em geral desempenhada por um circuito LC. A frequência de ressonância é neste caso,

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{L.C}}$$
.

A escolha da frequência de ressonância pode ser feita variando a capacidade C ou a indutância L. O primeiro caso, é no presente o mais adoptado, recorrendo-se a condensadores constituídos por conjuntos de lâminas que entram umas nas outras, ou por díodos de capacidade variável (varicaps). Os indutores variáveis são conseguidos à custa de núcleos de ferrite que se podem deslocar no interior das bobinas.

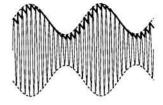
Desmodulação em amplitude

Uma vez captada no receptor, da onda RF modulada há que recuperar a onda de AF. Um circuito desmodulador (ou detector) pode ser realizado usando um díodo e um filtro capacitivo. Um circuito típico encontra-se na figura.



Reconhecemos imediatamente o circuito já anteriormente utilizado na rectificação e filtragem de ondas sinusoidas. Neste caso o circuito funciona como detector de pico da onda.

Durante a fase positiva da onda o díodo conduz e carrega o condensador até ao valor de pico da onda de RF nessa alternância. Entre alternâncias positivas o condensador descarrega-se através da resistência. O resultado é o mostrado na figura, se a constante de tempo RC for escolhida de forma adequada.



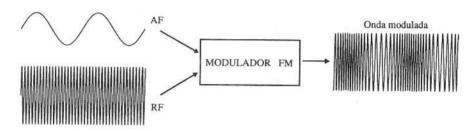
Por um lado o valor de RC deve ser tal, que permita uma descarga do condensador de forma a acompanhar as descidas da envolvente de AF. Mas RC não deve ser excessivamente pequeno, ao ponto da ondulação resídual se tornar importante (ou seja, a descarga do condensador não deve ser muito rápida).

O valor de 1/RC deve portanto situar-se entre a frequência de audio mais elevada e a frequência da onda portadora. O valor típico da frequência da onda portadora é da ordem de 1 MHz, enquanto que as frequências de AF não ultrapassam os 20 kHz. Existe portanto um factor de 50 entre as duas frequências, pelo que a situação real é melhor do que a mostrada na figura.

Modulação em frequência

Hoje em dia são inúmeras as estações que emitem em modulação de frequência (FM). A emissão em FM permite uma maior fidelidade e uma menor possibilidade de se verificarem interferências, sendo reduzido o ruído de fundo. As frequências a que são feitas as emissões em FM são mais elevadas que as de AM, situam-se entre 88 e 108 MHz no caso das estações de radiodifusão, e ainda mais altas para as emissoras de televisão. Ao contrário do que sucede com as ondas de menor frequência usadas em AM (≈ 1 MHz), as ondas de FM têm bastante dificuldade em contornar obstáculos devido ao seu pequeno comprimento de onda. Isto obriga à existência de váriós retransmissores se se pretende enviar o sinal a grandes distâncias, tendo que os emissores ser colocados em locais elevados. Por assim dizer, «o emissor e o receptor têm que estar em linha recta».

A modulação em frequência consiste em fazer variar a frequência da onda portadora de RF de acordo com a amplitude da onda de audiofrequência.



Portanto a frequência da onda portadora vai desviar-se tanto mais do seu valor central quanto maior for a amplitude da onda de AF. A informação da frequência da onda de AF encontra-se na «rapidez» da variação da frequência da onda de RF. A expressão matemática que traduz a modulação em frequência de uma onda de RF com frequência

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi}$$
 por uma onda de AF com frequência $f = \frac{\omega}{2\pi}$ é dada por

$$V = V_o \operatorname{sen} \left(\omega_o t + \frac{\Delta \omega_o}{\omega} \operatorname{sen} \omega t \right)$$

onde $\Delta\omega_o$ é a largura da variação em frequência da onda portadora.

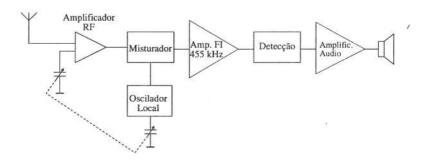
Um olhar sobre os rádios da actualidade

Os circuitos de rádio de amplificação directa são uma «relíquia» do passado. Uma deficiência imediatamente notada neste tipo de circuito simples é a sua fraca selectividade. A separação entre duas estações é difícil. Também a sensibilidade é má. Apenas se conseguem captar os sinais das emissoras mais potentes. Um possível melhoramento a introduzir seria usar vários amplificadores sintonizados de RF, que amplificariam apenas a frequência correspondente à emissão que desejava receber. Só posteriormente o sinal seria detectado e a componente AF amplificada. O problema advém da dificuldade

em manter vários andares de amplificação sintonizados numa mesma frequência, já que para cada estação que se pretende receber será necessário fazer a sintonização de todos os andares, em simultâneo e com precisão.

A solução adoptada na maioria dos rádios modernos é a dada pelo chamado receptor super-heterodino.

O esquema de princípio encontra-se na figura.



O sinal captado na antena é sintonizado e amplificado por um andar de RF. Esse sinal é então misturado com um sinal de RF dado por um oscilador local. Como já se viu, quando duas frequências f_1 e f_2 são misturadas a onda resultante contém componentes com frequências $f_1 + f_2$ e $|f_1 - f_2|$. A frequência do oscilador local é escolhida de tal forma que a diferença de frequências $|f_1 - f_2|$ é sempre constante. Para receptores de AM, 455 kHz é o valor habitualmente escolhido.

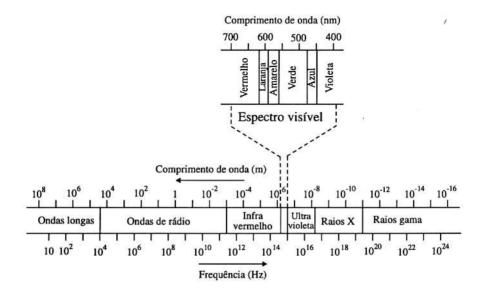
O sinal obtido é amplificado por um conjunto de amplificadores sintonizados na frequência de 455 kHz. Desta forma os sinais de outras frequências são eliminados. A selecção da frequência do oscilador local é feita em simultâneo com a do andar sintonizado de entrada de RF. Em geral tal é conseguido graças a dois condensadores de capacidade variável, representados na figura anterior e que são accionados em conjunto.

Portanto sempre que se pretende sintonizar uma emissão diferente, a frequência do oscilador local também varia de forma a manter constante (e igual a 455 kHz) a diferença entre a frequência do emissor e do oscilador local. Depois de amplificada a onda de frequência intermédia (455 kHz) é detectada e enviada ao amplificador de audio.



Óptica Geométrica

A óptica ocupa-se da luz visível. A luz é radiação electromagnética de frequência compreendida entre 3.8×10^{14} Hz e 7.7×10^{14} Hz. O esquema seguinte situa a luz visível na totalidade do espectro da radiação electromagnética.



As ondas electromagnéticas têm frequências que vão desde alguns Hz até 10²² Hz. Conforme a frequência, apresentam diferentes características, mas a propriedade fundamental comum a todas as ondas electromagnéticas é a sua velocidade de propagação no vácuo.

A velocidade de propagação no vácuo é conhecida com uma precisão de dez algarismos significativos e é considerada como uma grandeza exacta

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}} = 2.997 \ 925 \ 458 \times 10^8 \ m \ s^{-1}$$

onde ε_o representa a permitividade eléctrica e μ_o a permeabilidade magnética do vácuo.

Num meio material não condutor, homogéneo e isótropo de permitividade ϵ e de permeabilidade magnética μ , a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas é inferior à de propagação no vácuo, porque $\epsilon > \epsilon_0$ e $\mu \approx \mu_0$, sendo dada por

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon u}} < c$$

A razão entre as velocidades da onda electromagnética no vazio e num meio qualquer é por definição o índice de refração absoluto, n, desse meio e é dado por:

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_o \mu_o}}$$

No ar tem-se $v \approx c$ devido ao facto de $\epsilon_{ar} \approx \epsilon_o$, e portanto o índice de refração do ar é muito próximo da unidade ($n_{ar} = 1.000293$).

Como a permitividade eléctrica ε e a permeabilidade magnética μ do meio são dependentes da frequência, as diferentes componentes monocromáticas da luz branca não se propagam com a mesma velocidade, este efeito é conhecido por dispersão.

A grandeza que caracteriza uma onda é a sua frequência. Devido à relação $\lambda_o f = c$ (para o vácuo) tem-se que o comprimento de onda da radiação depende igualmente do meio de propagação. Assim, o comprimento de onda da radiação (cdo) num dado meio material é dado por:

$$\lambda = \frac{v}{f} < \lambda_o$$

Propriedades da luz visível

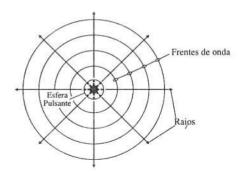
As propriedades da luz e os numerosos fenómenos que as ilustram podem classificar-se em três grupos: óptica geométrica, óptica ondulatória e óptica quântica.

O primeiro grupo — a óptica geométrica — compreende os fenómenos que podem ser descritos essencialmente em termos de frentes de onda e raios luminosos, e dos quais se destacam: propagação rectilínea, reflexão e refracção na superfície de separação de dois meios ópticos e dispersão. A óptica ondulatória compreende os fenómenos que evidenciam a natureza ondulatória da luz, como sejam: interferência, difracção, polarização. Finalmente a óptica quântica aborda os fenómenos em que a luz se comporta como sendo formada de partículas microscópicas — os fotões — que transportam uma determinada quantidade de energia designada por *quantum*, E = hf, em que h é a constante de Planck. Neste último grupo incluem-se fenómenos relacionados com orbitais atómicos, níveis de energia, emissão estimulada, luz laser e efeito fotoeléctrico. Estes comportamentos não são específicos da luz visível, observam-se para qualquer onda eletromagnética.

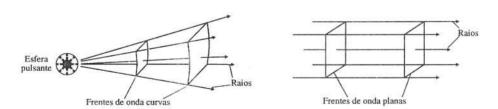
Frente de onda e raios luminosos

Para estudar os fenómenos da óptica geométrica usamos o conceito de raio luminoso e frente de onda. Tentemos compreender o que é frente de onda e um raio luminoso começando com uma analogia mecânica.

Quando se tem uma pequena esfera cuja superfície vibra harmonicamente num meio elástico, gera-se uma onda que se afasta do objecto com uma velocidade constante (o mesmo se passa quando se atira uma pedra num charco).



Se desenharmos as superfícies em que todos os pontos da onda estão na mesma fase de movimento obtemos as frentes de onda como representado na figura. Ao afastarmo-nos muito do centro emissor as superfícies curvas podem ser consideradas planas e a propagação da perturbação, perpendicular às frentes de onda, pode ser materializada por raios. Estes conceitos são igualmente aplicáveis às ondas luminosas e facilitam imenso a manipulação dos fenómenos.



Definimos como raio luminoso as linhas traçadas no espaço com a direcção de propagação do fluxo de energia radiante e por frente de onda a superfície sobre a qual a fase de pertubação óptica é constante.

Sendo r o raio da frente de onda num dado instante, após um intervalo de tempo t o raio será r + vt, com v a velocidade de fase da onda.

A evolução da frente de onda num meio e na sua passagem para outro é regulada pelo Princípio de Huygens que estabelece o seguinte: cada ponto de uma frente de onda primária constitui uma fonte para ondas esféricas secundárias e a posição da frente de onda primária num instante posterior é determinada pela envolvente de todas estas ondas secundárias, que se propagam com velocidade e frequência igual à da onda primária.

Em meios homogéneos as ondas secundárias podem ser construídas com raio finito, em meios não homogéneos o raio deve ser infinitésimal.

Todos os fenómenos que analisaremos são estudados com base em feixe de raios luminosos paraxial, isto é, raios que se propagam muito próximo do eixo óptico com inclinações reduzidas.

Reflexão e refraçção da luz

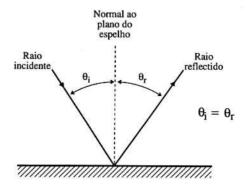
Ver um objecto significa que a luz que dele vem entra nos olhos. Alguns objectos são emissores de luz como o Sol, uma lâmpada ou uma estrela, mas a maioria limita-se a reflectir parte da luz que recebe.

Define-se como dioptro uma superfície separadora de dois meios, uma peça de vidro no ar, por exemplo.

Quando a luz incide numa superfície separadora de dois meios ou dioptro, parte penetra no segundo meio — refracta-se — e a restante continua no mesmo/meio, reflectindo-se. A luz será mais ou menos reflectida ou refractada conforme a natureza da superfície e as características dos dois meios.

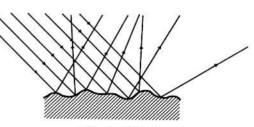
Estes fenómenos são regidos pelas seguintes leis

- 1.ª Lei da Reflexão: as direcções de incidência, refracção e reflexão estão todas contidas no mesmo plano, que contém também a normal à superfície de separação, no ponto de incidência do raio luminoso.
- $2.^{a}$ Lei da Reflexão: o ângulo de incidência θ_{i} é igual ao ângulo de reflexão θ_{r} (medem-se entre a direcção de propagação e a normal à superfície).



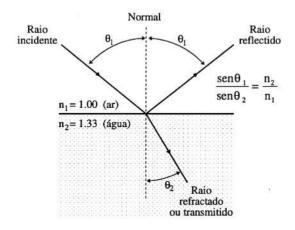
Este tipo de reflexão é conhecido por reflexão de espelho (observa-se por exemplo nos metais polidos, vidro, superfície de líquidos, etc.) e é importante para definir o comportamento dos espelhos.

A maioria das superfícies (madeira, papel de parede, etc.) contêm irregularidades de dimensões diversas ocasionando reflexões em diferentes direcções. Este tipo de reflexão é denominado por difusão.



Reflexão difusa

Lei de Snell da Refracção: a razão entre o seno do ângulo de incidência e o seno do ângulo de refracção é constante para cada meio e igual à razão entre o índice de refracção do segundo meio e o do primeiro.



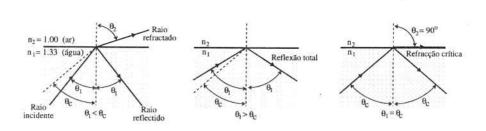
A razão $\frac{n_2}{n_1}$ escreve-se como n_{21} e representa o índice de refracção relativo entre os dois meios. Como referido anteriormente, o índice de refracção relativo é o inverso da razão entre as velocidades de propagação nos dois meios e portanto dependente da frequência da radiação. Quando se fala de índice de refracção de uma substância referimo-lo em relação ao vazio e designa-se por absoluto. A tabela seguinte mostra o valor do índice de refracção absoluto de várias substâncias para o cdo médio do espectro de luz visível ($\lambda = 589$ nm).

Substância Sólidos a 20°C	Índice de refracção n	Substância Líquidos a 20°C	Índice de refracção n	Substância Gases a 0°C e 1 atm	Índice de refracção n
Diamante	2.419	Benzeno	1.501	Ar	1.000 293
Vidro Crown	1.52	Tetracloreto de carbono	1.461	Dióxido de carbono	1.000 45
Água (0°C)	1.309	Álcool etílico	1.362	Oxigénio	1.000 271
Cloreto de sódio	1.50	Água	1.333	Hidrogénio	1.000 139
Quartzo cristalino	1.544	Dissulfito de sódio	1.628	Hélio	1.000 036

Quando nos referimos ao índice de refracção relativo tomamos como referência o índice de refracção do ar, ao qual se atribue o valor 1.

Reflexão total da luz

Quando a luz passa de um meio de índice de refracção maior para um de índice de refracção menor, por exemplo de água para o ar, o raio refractado para uma dada incidência pode inclinar-se mais do que 90°, isto é, não passa para o outro meio. Esta situação é designada por REFLEXÃO TOTAL. O ângulo de incidência para o qual o de refracção é 90° designa-se por ÂNGULO CRÍTICO. Neste caso o raio refractado segue a superfície de separação dos dois meios, refracção crítica.



O valor do ângulo crítico θ_c obtém-se a partir da lei de Snell fazendo $\theta_2 = 90^\circ$

sen
$$\theta_c = \frac{n_2 \text{sen } 90^{\circ}}{n_1} = \frac{n_2}{n_1}$$
 em que $n_1 > n_2$

Por exemplo, o ângulo crítico para um raio luminoso que viaja da água (n = 1.33) para o ar (n = 1.00) é $\theta_c = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1.00}{1.33}\right) = 48.8^{\circ}$.

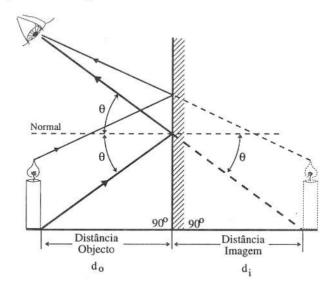
O ângulo crítico é um dos responsáveis pelo modo como um diamante brilha no ar. Como o índice de refracção do diamante é muito grande os raios a pequeno ângulo são completamente reflectidos.

206

Formação de imagens com espelhos planos e esféricos

Um espelho é uma superfície onde se dá sobretudo reflexão da luz. As imagens de um objecto podem ser reais ou virtuais. São reais quando se podem projectar num alvo. No caso da luz parecer provir de um ponto, mas se nenhuma imagem aparecer sobre um alvo colocado nesse ponto, dizemos que a imagem é virtual.

A construção das imagens dadas pelos espelhos planos baseia-se nas leis da reflexão, como se pode ver na figura



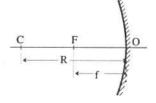
A imagem dada por um espelho plano é:

- Direita:
- Invertida da esquerda para a direita, isto é, a mão esquerda passa a direita e as letras aparecem escritas da direita para a esquerda;
- Localiza-se atrás do espelho, à mesma distância a que estamos do espelho;
- Tem a mesma dimensão;
- Virtual.

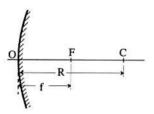
A construção de imagens dadas por espelhos curvos é mais complexa. A maioria dos espelhos curvos são esféricos, obtêm-se polindo uma secção de uma superfície esférica. Se a parte polida é a interior ou côncava o espelho diz-se côncavo, se for a parte exterior diz-se convexo.

Um espelho esférico é caracterizado pelos seguintes parâmetros:

- centro de curvatura C;
- raio de curvatura R;
- eixo principal (recta que une C com o ponto médio do espelho, O);
- foco do espelho F, situado no eixo principal a igual distância de C e de O;
- distância focal f, distância entre o foco e o ponto médio do espelho. Vale metade do raio de curvatura, $f = \frac{R}{2}$.

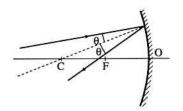


Se o espelho é convexo o centro de curvatura e o foco situam-se para lá do espelho, como se representa na figura.



Como referido atrás, quando estudamos a formação de imagens dadas por espelhos consideramos só feixes luminosos de pequena abertura relativamente à, curvatura do espelho, designados por raios paraxiais.

A formação de imagens num espelho baseia-se nas leis da reflexão, e no facto de que numa calote esférica qualquer raio da esfera ser perpendicular à superfície desta. A figura representa a reflexão pelo espelho de um raio luminoso que incide segundo um ângulo θ , a linha a tracejado é a normal à superfície (coincidente com o raio da calote).

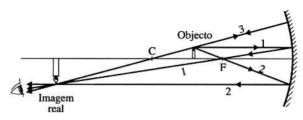


Assim temos três situações particulares que auxiliam a construção das imagens.

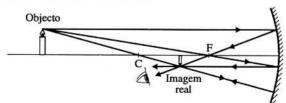
- 1 Um raio luminoso paralelo ao eixo principal reflecte-se passando pelo foco;
- 2 Um raio luminoso passando pelo foco reflecte-se paralelamente ao eixo principal;
- 3 Um raio luminoso que viaje segundo uma linha que passe pelo centro de curvatura reflecte-se segundo a mesma linha invertendo o sentido.

As duas primeiras regras traduzem o princípio da reversibilidade do trajecto dos raios luminosos. As duas figuras ilustram como se obtém a imagem de um dado objecto, consoante a sua posição em relação ao espelho.

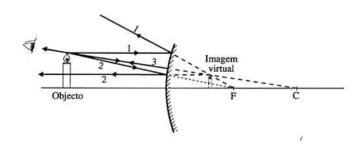
Objecto entre o foco e o centro de curvatura



Objecto para além do centro de curvatura



A formação de imagens num espelho convexo é idêntica, desde que se tenha em consideração a posição do foco e do centro de curvatura. A figura ilustra como obter a imagem de um objecto colocado em frente de um espelho convexo.



Equação dos espelhos esféricos e ampliação

A formação de imagens pode ser determinada analiticamente a partir da EQUAÇÃO DOS ESPELHOS, esta deduz-se facilmente considerando o esquema e relações elementares de triângulos semelhantes.

Da 1.ª figura tem-se

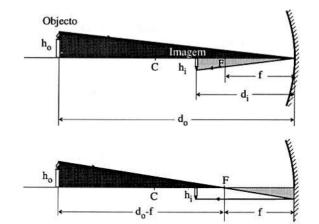
$$\frac{h_o}{h_i} = \frac{d_o}{d_i}$$

e da 2.ª figura vem

$$\frac{h_o}{h_i} \simeq \frac{d_o\text{-}f}{f}$$

Igualando as duas expressões

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{f}$$



As distâncias d são positivas ou negativas conforme os objectos e as imagens estão à frente ou atrás do espelho.

Com base no esquema podemos igualmente estabelecer a AMPLIAÇÃO m do espelho

$$m = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \pm \frac{d_i}{d_o}$$

O sinal de mais ou menos destina-se a estabelecer se a imagem é direita ou invertida em relação ao objecto.

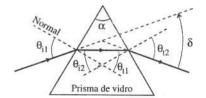
Para os espelhos convexos as equações são igualmente válidas, mas a distância focal é negativa porque se situa para trás do espelho.

210

Prismas

Designa-se por prisma um meio óptico limitado por dois planos que fazem entre si um certo ângulo α . A face oposta a este ângulo denomina-se base do prisma.

O trajecto de um raio luminoso num prisma de vidro (n = 1.52) mergulhado no ar (n~1) está representado na figura. Neste trajecto existem duas refrações, uma na passagem do ar para o vidro e a segunda da passagem do vidro para o ar.



De acordo com as leis da refracção e da igualdade entre ângulos temos as seguintes relações:

$$sen \theta_{t2} = n_{vidro} sen \theta_{t2}$$

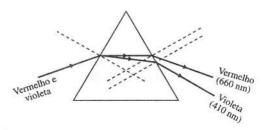
$$\alpha = \theta_{t1} + \theta_{t2}$$

Define-se por ângulo de desvio, δ , o ângulo formado entre a direcção de incidência e a do raio emergente. É dado por:

$$\delta = \theta_{11} + \theta_{12} - \alpha$$

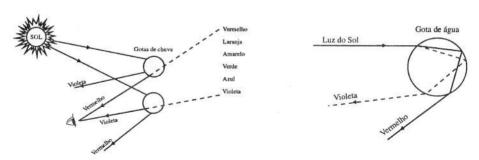
Os prismas têm múltiplas aplicações, por exemplo na inversão das imagens, na visualização de objectos colocados fora do alcance de visão e como dispersores de luz, como exemplificamos na figura.

Quando um feixe de luz branca incide na face esquerda de um prisma de vidro mergulhado no ar, a maior parte da luz penetra no prisma e, devido ao índice de refração deste ser maior do que o do ar, os raios aproximam-se da normal. Os raios luminosos ao atingirem a face direita do prisma emergem no ar afastando-se da normal à face. Como



o valor do índice de refracção depende do comprimento de onda, dentro do prisma dá--se a decomposição da luz branca nas diferentes cores de que é composta, e esta separação é acentuada na passagem do vidro para o ar.

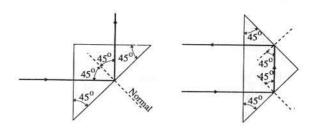
Outro exemplo de dispersão de luz branca nas suas componentes é o arco-íris de fim do temporal em que a luz do Sol penetra nas gotas de chuva e se dispersa, como se pode ver na figura.



Reflexão total nos prismas

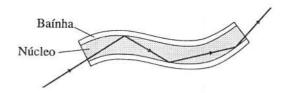
Se a luz incidir num dos catetos de um prisma recto de vidro (n = 1.52) segundo a normal, ver figura, atingirá a base do prisma segundo um ângulo superior ao ângulo crítico (θ_c = 42°) não emergindo no ar mas sendo totalmente reflectida sobre o outro cateto e emergindo segundo a normal a esta face.

O interesse deste fenómeno é a mudança de direcção de 90° ou 180° que é necessária em vários instrumentos de óptica tais como periscópios, telescópios, binoculares.



Fibras ópticas

As fibras ópticas são fios de vidro ou plástico, com uma parte central núcleo ou *core* de índice de refracção elevado em relação a um invólucro externo, denominado por baínha ou *cladding*. Devido à transparência dos meios e à relação entre os índices de refracção, um raio luminoso que entre por uma das extremidades propagar-se-á até à outra através de múltiplas reflexões totais que ocorrerão entre o núcleo e a baínha. A figura ilustra este mecanismo.



A transmissão da luz através de fibras é uma aplicação da reflexão total com um impacto tecnológico profundo. As fibras ópticas representam o meio ideal para transmitir sinais de vídeo, telefónicos e dados de computador. Hoje são já comuns os cabos de comunicações feitos à base de milhares de fibras, o que é possível devido quer às dimensões do seu diâmetro (da ordem ou inferior ao milímetro), quer à imunidade em relação às interferências eléctricas, que são frequentes nos cabos clássicos de cobre ou nas transmissões de ondas através do espaço.

A sua flexibilidade permite ainda a aplicação à medicina. Hoje são usadas na observação e na terapia de muitos orgãos, estando em geral ligadas a um circuito de vídeo que permite uma visualização cómoda.

212

Lentes convergentes e divergentes

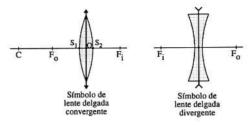
As lentes funcionam com base na refracção da luz. Uma lente óptica é um meio transparente limitado por duas superfícies, uma curva (em geral esférica) e a outra pode ser plana ou curva. As lentes que estudaremos são as delgadas. Uma lente é considerada delgada quando a sua espessura é pequena quando comparada com a curvatura das superfícies.

Os parâmetros mais importantes das lentes delgadas são:

- O eixo óptico. A recta que passa pelos centros de curvatura de ambas as faces é designada por eixo óptico da lente. Este eixo corta as superfícies da lente nos pontos S₁ e S₂ praticamente coincidentes com o ponto O designado por centro óptico da lente;
- O foco imagem F_i de uma lente é o ponto imagem, sobre o eixo óptico, de um objecto pontual situado no infinito;
- O foco objecto F_o é o ponto objecto, sobre o eixo da lente, cuja imagem se situa no infinito:
- A distância do foco ao centro óptico designa-se por distância focal;
- O centro de curvatura C, situa-se sobre o eixo óptico a uma distância dupla da distância focal.

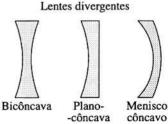
As lentes delgadas classificam-se em convergentes e divergentes. Uma lente diz-se CONVERGENTE ou POSITIVA quando transforma um feixe de raios paraxiais paralelos ao seu eixo num feixe convergente sobre o foco imagem. Os focos objecto e imagem são reais. Diz-se DIVERGENTE ou NEGATIVA se transforma um feixe de raios paraxiais paralelo ao eixo óptico num feixe divergente. Nesta ambos os focos são virtuais.

Na figura representamos o símbolo das lentes convergente e divergente assinalando os respectivos parâmetros.



Os tipos de lentes mais comuns são os seguintes

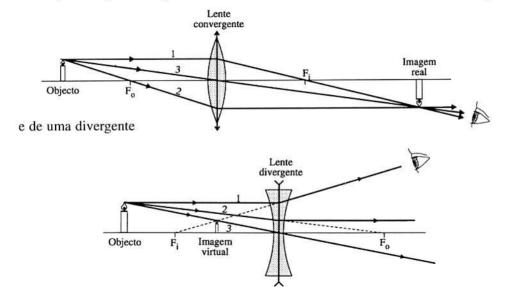
Biconvexa Plano- Menisco convexo



A formação de imagens com lentes convergentes e divergentes é simples. Basta representar sob a forma de raios a luz que vem dos objectos e que atingem a lente. Como é um meio transparente, esta luz passa a lente e com base nas propriedades do foco e centro óptico estabelece-se esquematicamente a formação de imagens. O quadro seguinte resume as «regras» de construção de imagem para os dois tipos de lentes.

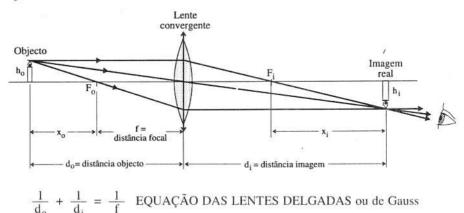
LENTE CONVERGENTE	LENTE DIVERGENTE
SITUAÇA	ÃO 1
O raio viaja paralelamente ao eixo principal, passa a lente, refracta-se e converge para o foco à direita da lente	O raio viaja paralelamente ao eixo principal, passa a lente, refracta-se e diverge segundo uma direcção que intersecta o foco à esquerda da lente
SITUAÇ	ÃO 2
O raio passa pelo foco à esquerda, refracta-se na lente e emerge à direita viajando paralelo ao eixo	O raio provém do objecto e segue uma direcção que intersecta o foco à direita, ao refractar-se na lente, emerge à direita viajando paralelo ao eixo
SITUAÇ	ÃO 3
O raio passa pelo centro óptico das lente não sofrendo desvio apreciável	O raio passa pelo centro óptico das lentes não sofrendo desvio apreciável

Representação do trajecto dos raios luminosos através de uma lente convergente



Equação das lentes delgadas e ampliação

Como base na semelhança de triângulos é fácil deduzir uma expressão analítica que nos permita calcular a posição da imagem de um objecto colocado em frente de uma lente mergulhada no ar $(n \sim 1)$ e a respectiva ampliação transversal e longitudinal em relação ao objecto.



A relação entre a posição do objecto e da imagem também pode ser estabelecida através da equação de Newton. Usando ainda a figura anterior deduz-se facilmente que

$$x_i x_o = f^2$$

Define-se ampliação lateral ou transversal como a razão entre as dimensões transversas da imagem final dada por um sistema óptico e do objecto

$$M_T = \frac{\text{altura da imagem}}{\text{altura do objecto}} = \pm \frac{d_i}{d_0} = -\frac{x_i}{f}$$

Define-se ampliação longitudinal M_L de um objecto tridimensional, directamente relacionada com a direcção axial, como

$$M_L = \frac{dx_i}{dx_o} = -\frac{f^2}{x_o^2} = -M_T^2$$

Como é evidente M_L <0 o que significa que a valores positivos de dx_o correspondem valores negativos de dx_i e vice-versa. Por outras palavras a imagem de um dedo que aponta na direcção da lente afasta-se da lente.

Tal como nos espelhos tem de se respeitar algumas convenções de sinais isto é, que sinal atribuir às distâncias d uma vez que objectos e imagens podem estar de lados opostos da lente ou do mesmo lado. No caso das lentes temos que a imagem real se forma para além da lente, assim:

- d_o é positivo se o objecto está à esquerda da lente (objecto real);
- d₀ é negativo se o objecto está à direita da lente (objecto virtual);
- d_i é positivo se a imagem (real) de um objecto real se forma à direita da lente;

- d_i é negativo se a imagem (virtual) de um objecto real está à esquerda da lente;
- f é positivo para lentes convergentes;
- f é negativo para lentes divergentes;
- M é positivo para as imagens direitas em relação ao objecto;
- M é negativo para as imagens invertidas em relação ao objecto.

Define-se potência de uma lente como o inverso da distância focal. Em óptica fisiológica a unidade é a dioptria, representa-se pela letra D e é o inverso de metro. No SI é dada por m-1

$$P = \frac{1}{f} m^{-1} (ou D)$$

A potência das lentes determina-se através da medição da distância focal.

Para as lentes convergentes usa-se ainda o processo de Bessel em que se utilizam duas posições da lente para obter duas imagens nítidas, ε é a distância entre as duas posições da lente e d a distância objecto-imagem. Mantendo sempre fixa a distância objecto-imagem obtêm-se

$$P = \frac{4d}{d^2 - \varepsilon^2}$$

Para medir a distância focal de lentes divergentes usa-se a associação destas com lentes convergentes de potência conhecida, formando-se um sistema de potência P_{ass} . Os dois processos mais correntes são o das lentes coladas em que $P_c > P_d$, donde $P_d = P_{ass} - P_c$, e o das lentes afastadas em que

$$P_d = \frac{1}{d_1} - \frac{(P_c d_2 - 1)}{(d_2 - d(P_c d_2 - 1))}$$

Sendo d a distância entre as duas lentes, d_1 a distância do objecto à lente divergente, d_2 a distância da lente convergente à imagem final e P_c a potência da lente convergente.

Após estes rudimentos sobre as leis da óptica geométrica e do comportamento óptico de espelhos e lentes, podemos estudar como funcionam alguns instrumentos ópticos e entre estes o olho humano, o instrumento fundamental que nos permite ver o mundo que nos rodeia.

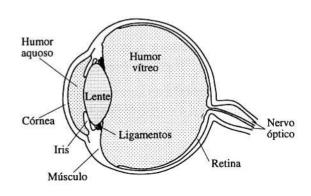
Sistemas ópticos

Olho humano

O olho humano pode ser descrito, de um modo muito simples, como uma dupla lente convergente ou positiva que forma uma imagem real numa superfície sensível à luz. É constituído por diversas partes, que passamos a descrever.

O globo ocular é aproximadamente esférico com cerca de 25 mm de diâmetro e no seu interior sucedem-se uma série de meios transparentes com um determinado índice de refraçção.

A luz entra no olho depois de passar uma membrana transparente – a córnea ($n_c = 1.376$). Esta limita uma zona líquida – o humor aquoso – ($n_{ha} = 1.33$), atrás do qual se situa um diafragma com cor (de natureza muscular) de abertura variável – a íris – que controla a luz que atravessa uma lente – o cristalino (n = 1.40). Segue-se uma grande zona cheia novamente de um líquido – o humor vítreo (n = 1.34) – e por fim o receptor transdutor de luz – a retina.



Quando estimulada pela luz esta envia sinais eléctricos ao cérebro através do nervo óptico. A imagem inicialmente invertida é convertida pelo cérebro numa imagem direita.

Os transdutores eléctricos da retina, isto é, os elementos que transformam um sinal luminoso num sinal eléctrico, são estruturas designadas por cones e bastonetes. A luz que atinge a retina depende da abertura da íris, também conhecida por pupila, cujo diâmetro varia entre 2 e 7 mm conforme existe muita ou pouca luz.

A característica do cristalino é a sua possibilidade de variar a curvatura devido à acção do músculo ciliar.

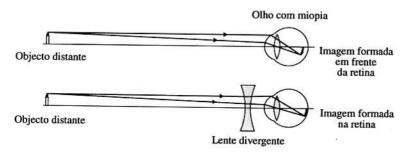
Para uma visão nítida, a luz deve refractar-se de modo a formar uma imagem na retina. A refracção mais importante, da ordem de 70%, é a que ocorre entre o ar (n=1.000) e a córnea $(n_c=1.376)$, pois que todos os meios após esta têm índices de refracção muito semelhantes, o cristalino por si contribue só com 20 a 25% na formação da imagem. Como a distância cristalino-retina é sempre a mesma, a propriedade mais importante desta lente é a possibilidade de alteração da sua curvatura consoante a distância do objecto de modo que a imagem deste se situe na retina. Esta propriedade do cristalino é designada por ACOMODAÇÃO.

O estado de saúde de um olho é avaliado quer pela distância mínima a que se conseguem ver distintamente dois objectos — ponto de visão mínima ou ponto próximo — quer com a distância máxima de visão que corresponderá ao mínimo de acomodação e em que o olho recebe do objecto essencialmente raios paralelos. Esta distância para um olho são é praticamente infinita e a de visão mínima é de ~7 cm numa criança, ~12 cm num adolescente, 25 a 30 cm aos vinte anos e de 40 a 50 cm aos quarenta anos.

Óculos

Miopia - lentes divergentes ou negativas

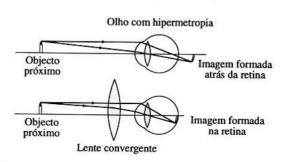
A dificuldade de ver ao longe ou miopia deve-se ao facto de a imagem se formar antes da retina. Este defeito do cristalino pode ser corrigido com a associação de uma lente divergente que, abrindo o feixe de luz, provocará a formação da imagem na retina.



Hipermetropia — lentes convergentes ou positivas

Esta deficiência consiste exactamente no oposto da miopia. A hipermetropia, também conhecida por presbitia, presbiopia ou «vista cansada», provoca a formação da imagem para além da retina impedindo uma visão correcta dos objectos ao perto.

Corrige-se esta deficiência, devida ao endurecimento do cristalino com a idade, com a associação de uma lente convergente, como se pode ver na figura.



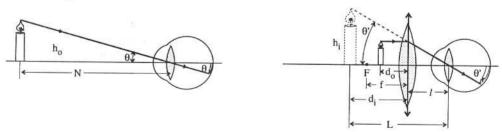
Astigmatismo — lentes anamórficas

Um sistema óptico ou o olho humano diz-se astigmático quando não conseguem fazer corresponder a um ponto objecto um só ponto imagem, provocando uma perda de nitidez na imagem. Esta deficiência provém do facto da lente ou do cristalino não ter a mesma distância focal para todas as secções principais. Corrige-se com um sistema óptico que tenha diferentes valores de ampliação transversal o que se consegue com lentes plano-cilíndricas, esfero-cilíndricas ou tóricas.

Ampliação angular

Todos os instrumentos ópticos que iremos abordar permitem uma ampliação angular. Define-se ampliação angular M_A de um instrumento visual como a razão entre a dimensão da imagem na retina quando o objecto é visualizado através do instrumento e a dimensão da mesma imagem quando vista pelo olho desarmado à distância normal do observador. Toma-se para esta a distância mínima $N (\sim 25 \text{ cm})$.

Com base nos esquemas seguintes determinamos a equação que nos permite calcular esta grandeza.



A razão entre os ângulos θ' e θ definidos pelos raios principais que passam pelo extremo do objecto permite calcular M_{A}

$$M_A = \frac{\theta'}{\theta}$$

Na aproximação paraxial tg $\theta' \approx \theta' = \frac{h_i}{L}$ e portanto

$$M_A = -\frac{d_i N}{d_o L} = \left(1 - \frac{d_i}{f}\right) \frac{N}{L}$$

em que f é a distância focal da lente introduzida. Conforme os valores da distância da lente ao olho, l, e da distância da imagem ao olho, L, temos expressões particulares para a ampliação angular

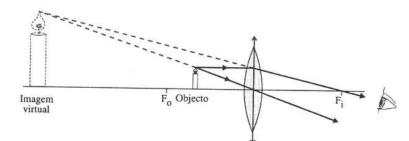
$$[M_A]_{l=0} = d_o \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{f}\right)$$

$$[M_A]_{l=0} c_{L=N} = \frac{d_o}{f} + 1$$

$$[M_A]_{L=\infty} = \frac{d_o}{f}$$

Lupa

A lupa ou lente de aumento é uma lente convergente de pequena distância focal.



De um objecto colocado próximo dá uma imagem virtual direita e maior que o objecto como se pode ver na figura.



O estudo da ampliação angular foi feito com base num sistema óptico idêntico à lupa. Donde tudo o que se referiu ser válido para a lupa.

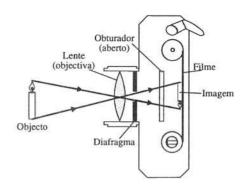
Oculares

Uma ocular é essencialmente uma lupa que amplia a imagem não do objecto inicial, mas de uma sua imagem intermédia formada por um outro sistema de lentes que a precede. O olho olha através da ocular e esta através de um sistema óptico seja ele um microscópio, telescópio ou binóculo. O objectivo do uso de oculares é melhorar a imagem, libertando-a de aberrações. Em geral a ocular é um conjunto de pelo menos duas lentes, pois com uma só é difícil melhorar uma imagem. Os *zooms* são oculares dioptros asféricos de potência variável.

Máquina fotográfica

A máquina fotográfica funciona como o olho humano. A diferença reside no facto da retina estar representada por um filme e a acomodação do cristalino pela possibilidade de ajustar a distância da lente ao filme. O esquema representa uma máquina simples.

A quantidade de luz que atinge o filme é controlada por um diafragma circular e pelo tempo que este está aberto. Nas máquinas fotográficas o diafragma é controlado em geral rodando uma espécie de rosca junto à lente, com uma escala graduada em 2.8, 4, 5.6, 8, etc. Este mecanismo permite variar o valor do raio de abertura do diafragma por forma a variar a quantidade de luz admitida segundo potências de 2. Na realidade, quando se passa de 2.8 para 4 o raio alterou de 0.7 ou seja de $\sqrt{2}$. Como a quantidade de luz



depende da superfície e, no caso da circunferência, esta depende do raio ao quadrado, o aumento de luz é de $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Os números que regulam a abertura do diafragma designam-se por factores f.

O tempo de exposição é seleccionável. O valor 125 significa que o diafragma deixa

passar luz durante $\frac{1}{125}$ s.

A designação de câmara de 35 mm refere-se às dimensões da porção de filme onde se forma a imagem, neste caso num rectângulo de 35×24 mm.

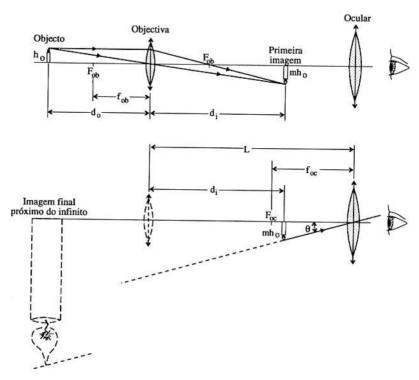
Nos dias de hoje a maioria das máquinas integram um sensor de luz e um microprocessador que executa automaticamente todas as operações necessárias a uma fotografia.

Associação de lentes na construção de aparelhos ópticos

A associação de lentes e espelhos permite obter imagens com uma amplificação que uma só lente não poderia dar, possibilitando ao olho humano «ver» objectos muito pequenos (microscópio), ou muito longínquos (telescópio e binóculo). A natureza e a ampliação da imagem final num sistema multi-lente podem ser calculadas a partir da equação das lentes delgadas aplicada a cada lente funcionando a imagem da lente mais próxima do objecto como objecto para a lente seguinte.

Microscópio

Quando é necessário um aumento para além das possibilidades de uma simples lupa usa-se uma associação de duas lentes convergentes conforme o esquema. A lente próxima do objecto designa-se por objectiva e aquela através da qual vemos é a ocular. O objecto deve ser colocado muito próximo do foco da objectiva para garantir uma grande amplificação e a imagem dada pela objectiva deve estar para além do foco da ocular.



Este tipo de montagem é conhecido pelo nome de microscópio composto.

O valor da ampliação total do sistema M_A é dado pelo produto da ampliação linear ou transversal da objectiva M_{To} , e da ampliação angular da ocular M_{Ao}

$$M_A = M_{To} M_{Ao}$$

Recordando que $M_T = -\frac{x_i}{f}$ e como na maior parte dos microscópios a distância (correspondente a x_i) entre o foco imagem da objectiva f_o e o foco imagem da ocular f_e é 160 mm, esta distância corresponde ao valor de L e no microscópio é denominada por comprimento de tubo. Assim, se a imagem final se encontrar praticamente no infinito

e o ponto próximo a cerca de 25.4 cm teremos
$$M_A = \left(-\frac{0.16}{f_0}\right) \left(\frac{0.254}{f_c}\right)$$
.

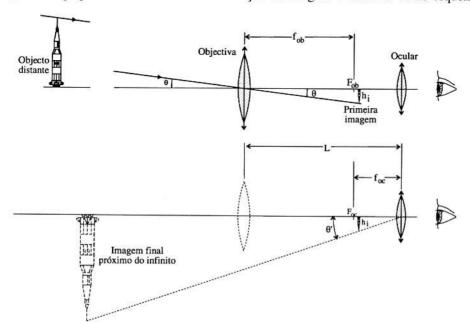
A imagem final é invertida porque M_A < 0.

Uma objectiva com uma distância focal f_o de 0.032 m tem uma ampliação de 5×. Quando combinada com uma ocular de f_e = 0.0254 m, portanto de ampliação 10×, dá um microscópio com uma ampliação de 50×.

Um parâmetro importante num microscópio é o seu poder de resolução que nos dá a separação mínima necessária entre dois objectos pontuais de modo a serem discerníveis pelo sistema óptico.

Telescópio

Ao contrário do que sucede com o microscópio, que serve para observar objectos pequenos e colocados na vizinhança da objectiva, os telescópios servem para ampliar a imagem dos objectos longínquos. São igualmente constituídos por duas lentes: uma objectiva, lente convergente de grande distância focal, e uma ocular que pode ser uma lente convergente ou uma divergente de pequena distância focal. A formação da imagem é como se vê no esquema

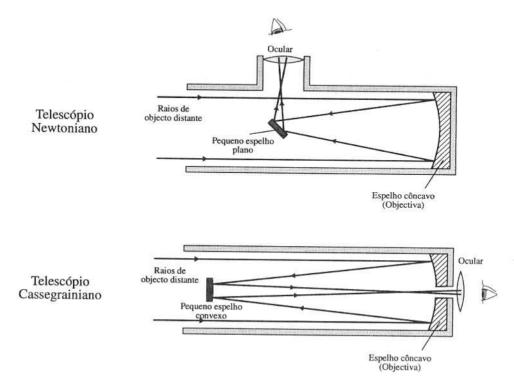


Na prática a posição da imagem intermédia é fixa e a focagem do instrumento faz-se por deslocamento da ocular. A imagem final é invertida. Para os objectos longínquos a luz incidente é um feixe de raios paralelos e a imagem forma-se no plano focal. A ocular está montada de modo a que o seu foco objecto f_o coincida com o foco imagem da objectiva f_o . Os raios que divergem a partir da imagem intermédia emergem na ocular paralelos entre si. Um olho normal pode ver a imagem sem acomodação.

A amplificação angular de um telescópio é dada por

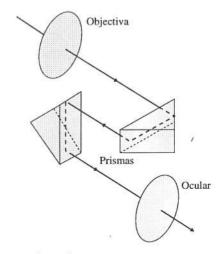
$$M = \frac{\theta'}{\theta'} \approx \frac{-h_i/f_e}{h_i/f_o} = -\frac{f_o}{f_e}$$

Como se deve captar a luz vinda de objectos muito distantes é necessário que a objectiva tenha grande diâmetro transversal. A partir de certos valores é difícil fabricar tais lentes e torna-se preferível construir telescópios que usam como primeiro elemento óptico um espelho côncavo como se vê na figura. São designados por telescópios de reflexão.



Rinóculos

Os binóculos ou telescópios terrestres são idênticos aos astronómicos com a diferença do sistema de lentes estar alojado de modo mais compacto e por forma a permitir uma imagem direita, facto não muito importante quando se observa um planeta mas aborrecido sempre que se tem de ver um elefante e este aparece de patas para o ar. A imagem direita consegue-se juntando uma terceira lente ou usando um sistema de prismas, como se vê na figura. Nos sistemas mais simples, como por exemplo os binóculos de ópera, é usada uma lente divergente como ocular para se conseguir uma imagem direi-

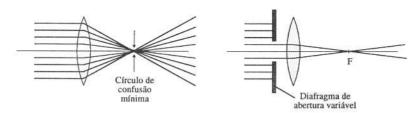


ta. O primeiro telescópio construído por Galileu era deste tipo.

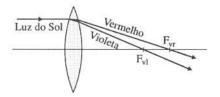
Aberrações nas lentes

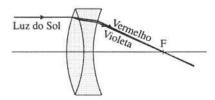
A aberração consiste no facto de vários raios que partem do mesmo ponto objecto atingirem pontos diferentes da imagem, isto é, perde-se a correspondência ponto por ponto objecto-imagem. Os dois tipos mais comuns de aberração são a esférica e a cromática.

A aberração esférica implica que raios incidentes paralelamente ao eixo da lente não convergem no foco, os mais periféricos convergem mais perto da lente e os mais internos para além do foco. Um modo de diminuir a aberração é colocar em frente da lente um diafragma de modo a delimitar lateralmente o feixe.



A aberração cromática provém do facto do índice de refracção da lente ser dependente do comprimento de onda da radiação. Como a luz branca é uma mistura de comprimentos de onda, após a passagem pela lente existe uma certa dispersão, convergindo primeiro a parte violeta-azul do espectro. Esta aberração pode ser corrigida associando à lente convergente uma divergente de igual distância focal.







Células Fotovoltaicas

Define-se uma célula fotovoltaica como um conversor directo da luz solar em energia eléctrica. A corrente eléctrica fornecida é contínua, podendo ser transformada em alterna ou armazenada. Pode dizer-se que é uma pilha solar que usa como combustível a luz: não se podem considerar poluentes e o único inconveniente que apresentam é impedir o terreno onde se encontram colocadas de receber luz solar, o que pode ser um problema se a central for, como em geral sucede, muito extensa.

A primeira célula solar industrial foi desenvolvida pelo Laboratório Bell nos Estados Unidos em 1954. Devido à expansão do programa espacial, estas células foram largamente estudadas e a crise do petróleo no início da década dos anos 70 implementou o uso do Sol como fonte de energia.

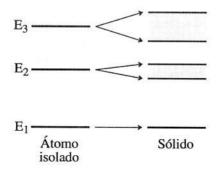
Como os sistemas fotovoltaicos são modulares podem usar-se em pequeno número e de dimensões reduzidas para alimentar sistemas que exijam baixa potência como relógios, calculadoras ou em sistemas maiores, no aquecimento de casa, estufas e mesmo em unidades industriais pequenas.

O material mais usado na construção das células fotovoltaicas é o semicondutor na forma de junções p-n. O parágrafo seguinte explica o que é um semicondutor e como uma junção pode funcionar como fonte de corrente eléctrica.

Semicondutores

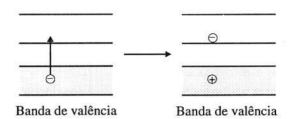
Uma maneira de pensar na formação de um sólido é considerar que isso corresponde a um processo de aproximação dos átomos constituintes desde distâncias muito grandes até à distância interatómica que se observa no material sólido final. Num átomo, os estados permitidos para os electrões (orbitais) correspondem a níveis de energia bem definidos, cuja separação varia desde alguns eV para os níveis mais externos até alguns keV para os níveis mais internos. Quando se aproximam vários átomos, as orbitais idênticas nos átomos individuais sobrepõem-se no espaço. Surge assim uma interacção entre os electrões de átomos diferentes que implica variações de energia dos níveis iniciais — os estados electrónicos variam. Como a energia de uma mesma orbital nos átomos individuais é igual e o princípio de exclusão de Pauli não permite que mais do que dois electrões ocupem a mesma orbital (tendo estados de spin opostos), estas não vão corresponder no sólido a N orbitais idênticas com a mesma energia, mas desdobram-se em diferentes níveis de energia, muito próximos,

que se diz constituírem uma banda. Assim, num sólido a descrição dos níveis de energia não se faz em termos de níveis discretos mas em termos de bandas de energia.



As transições entre níveis electrónicos da mesma banda requerem uma energia muito pequena (inferior a meV), logo a condução eléctrica ocorre facilmente se a banda se encontrar semi-preenchida. Pode dever-se a contribuições dos electrões de diferentes bandas desde que exista mais do que uma banda não totalmente preenchida. No caso em que uma banda se encontra quase completamente preenchida, o movimento dos electrões sob acção de um campo eléctrico é mais facilmente descrito como a ausência de electrões (buracos) movendo-se em sentido oposto. É pois corrente falar-se em portadores de carga negativa (electrões) e portadores de carga positiva (buracos).

A última banda completamente preenchida designa-se por banda de valência. Considerem-se as duas bandas cujo esquema se indica na figura

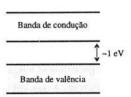


Se se fornecer energia a um electrão da banda de valência, suficiente para provocar a sua transição para uma banda de energia superior deixando um buraco na banda de valência, esse efeito é visto como a criação de um par electrão-buraco.

O efeito fotovoltaico baseia-se neste fenómeno de criação de pares electrão-buraco num material, sendo a energia necessária obtida por absorção de fotões.

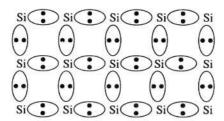
Para que a criação de pares electrão-buraco tenha alguma utilidade, é necessário que a vida média desses portadores de carga no material seja suficientemente longa para que o seu efeito seja sentido nas propriedades eléctricas. Os semicondutores são materiais onde estas características se verificam: é possível criar pares electrão-buraco que têm um efeito importante no comportamento do material.

O esquema das bandas mais externas de um semicondutor sem impurezas encontra-se representado na figura.

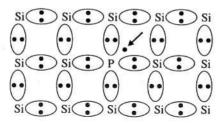


Em primeira aproximação ele é idêntico ao de um isolante, mas existe uma diferença fundamental: a separação de energias entre a banda de valência e a banda seguinte, dita de condução, é muito pequena (da ordem de 1 eV ou inferior), o que torna fácil a excitação de um electrão da banda de valência para a banda de condução. Introduzindo impurezas adequadas, com um electrão a mais ou a menos do que os átomos constituintes do semicondutor, é possível ter à temperatura ambiente portadores livres, respectivamente negativos ou positivos, neste material. A concentração de portadores existentes (electrões ou buracos) é aproximadamente proporcional à concentração de impurezas que lhe dão origem. A importância fundamental dos semicondutores está em ser possível controlar com precisão o valor da condutividade eléctrica, controlando a concentração de impurezas introduzidas.

É fácil compreender o papel das impurezas considerando a alteração da distribuição electrónica na sua vizinhança local. Se um átomo tem no material todas as orbitais de ligação completamente preenchidas, o que acontece nos materiais semicondutores, a introdução de um átomo diferente (com um electrão a mais ou a menos que o átomo do semicondutor que substitui) altera esse equilíbrio. Por exemplo, se no Si se substitui um átomo de Si por um átomo de P, com mais um electrão, a distribuição dos electrões nas ligações passa de

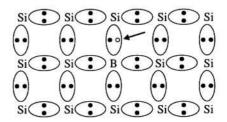


onde se utiliza uma projecção plana das ligações tetraédricas, para



Se o número de átomos de fósforo introduzidos é suficientemente pequeno, a geometria do material inicial não é destruída e cada átomo de fósforo adopta a configuração electrónica externa do Si que substitui, ficando um electrão excedente nas ligações. Este electrão ocupa um nível de energia mais elevado, muito pouco ligado ao ião fósforo de origem e pode libertar-se facilmente dele. O electrão excedente liberto da acção do fósforo é um electrão na banda de condução do material.

Se em vez do P se introduzir B, por exemplo, o material fica



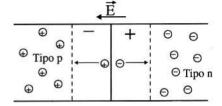
existindo agora um buraco junto do boro, que pode facilmente ser ocupado por um electrão, movendo-se o buraco para outro ião. Neste movimento o buraco liberta-se da acção do ião boro, passando a ser um buraco da banda de valência do Si.

Se o semicondutor tem impurezas que lhe dão electrões excedentes, portadores negativos, diz-se do tipo n, e se tem impurezas que lhe dão buracos, portadores positivos, diz-se do tipo p.

Uma junção p-n é uma junção obtida com estes dois tipos de materiais.

Porque os materiais constituintes da junção têm configurações electrónicas diferentes, esta tem um comportamento não linear no que diz respeito à condutividade eléctrica. A junção é boa condutora para um sentido de polarização que se designará por directo, e má condutora para a polarização inversa. Este comportamento designa-se por rectificador e é directamente utilizado num díodo. Pode entender-se de forma simples se se pensar em termos de concentrações de portadores livres.

Quando se aplica uma ddp negativa entre o lado p e o lado n, os portadores livres são extraídos do lado em que existem de forma importante e a condução pode ter lugar.

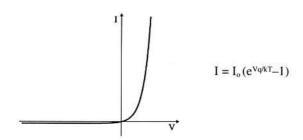


No caso inverso, os electrões do lado n são afastados da zona da junção, assim como os buracos do lado p. Cria-se então uma zona onde não existem cargas livres que se designa por zona de deplexão de carga. Porque o material era neutro inicialmente, os iões que se mantêm fixos (átomos que perderam os electrões ou buracos associados) criam um campo eléctrico, com o sinal indicado na figura, que se opõe ao campo eléctrico aplicado e corresponde a uma barreira de potencial que os portadores livres têm que vencer para contribuirem para a condução.

No caso de não existir diferença de potencial externa aplicada, existe ainda uma zona de deplexão de carga. Esta resulta de serem diferentes as concentrações de portadores dos dois lados, n e p, da junção. Então, quando se efectua a junção, os dois tipos de portadores difundem-se para o lado onde são minoritários até que o campo eléctrico associado a este deslocamento de carga seja suficiente para se opor ao movimento de difusão. Assim, deslocam-se electrões para o lado p e buracos para o lado n. Em cada um destes lados estes portadores recombinam-se com os portadores aí existentes deixando na junção uma região sem portadores livres, a que corresponde um campo eléctrico com a mesma direcção e sentido do indicado na figura acima.

Se incidir luz na zona de deplexão, levando à criação de pares electrão-buraco, estes são imediatamente separados pelo campo eléctrico, estando-lhe associada uma corrente eléctrica. Quanto maior for o número de fotões incidentes maior é a corrente eléctrica gerada. O aparecimento desta corrente eléctrica, resultante da iluminação da junção designa-se efeito fotovoltaico. Se o circuito estiver aberto, o que se detecta é o aparecimento de uma diferença de potencial entre os dois lados da junção.

Uma célula fotovoltaica é essencialmente uma associação de junções p-n em série. Para cada uma destas junções, a corrente é uma função exponencial da ddp V, entre os lados p e n, que se pode representar e escrever do seguinte modo



em que k é a constante de Boltzmann $(1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1})$, T é a temperatura absoluta em kelvin (0 °C = 273 K) e q é a carga do electrão $(-1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$.

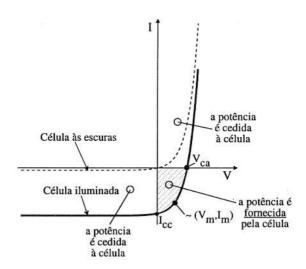
A expressão anterior traduz o efeito rectificador da junção, correspondendo a correntes elevadas para $V \gg 0$ e a $I = -I_o$ para $V \ll 0$. O valor de I_o depende fortemente da temperatura da junção e da concentração de transportadores intrínsecos. I_o é grande para os materiais com uma pequena diferença de energia entre a banda de valência e de condução ($gap\ energy$).

A corrente fornecida pela célula é alterada pela iluminação da junção com radiação de frequência adequada para

$$I = I_o(e^{Vq/kT} - 1) - I_{il}$$

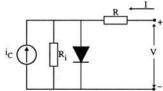
onde I_{il} aumenta com o número de fotões incidentes na célula.

O aparecimento de I_{il} corresponde a uma região de valores (V,I) em que a junção fornece potência para o exterior, como figurado abaixo na curva característica I (V).



Uma célula fotovoltaica pode ser descrita por um modelo, o qual representa uma

célula fotovoltaica como uma fonte de corrente associada a um díodo, a uma resistência em paralelo e a outra em série como representado no esquema.



Eficiência das células fotovoltaicas

A corrente numa célula fotovoltaica é função do número de pares electrão-buraco criados por absorção de luz e da eficiência de recolha destes transportadores, isto é, existem perdas resistivas devido às resistências do modelo anterior.

O diagrama ou curva característica I(V) representado anteriormente dá os parâmetros operacionais da célula: entre eles a corrente em curto circuito I_{cc} e a ddp em circuito aberto V_{ca} e a corrente e ddp correspondentes à potência máxima, respectivamente I_{mp} e V_{mp} .

A potência ideal máxima é dada pelo produto V_{ca} I_{cc}, mas vários factores afectam o valor da potência, os quais são contabilizados pelo Factor de Saturação FS

$$FS = \frac{I_{mp}V_{mp}}{I_{cc}V_{ca}}$$

sendo o produto I_{mp} V_{mp} a potência máxima que se pode extrair das células. O factor FS pode ser determinado teoricamente a partir de parâmetros da célula.

Nas células comerciais o factor FS situa-se entre 0.70 e 0.85. Para um só módulo tem-se como valores típicos $V_{ca} \sim 0.58$ V, fluxo de carga (corrente por unidade de área) $J_{cc} \sim 35$ mA/cm² e FS ~ 0.8 . Assim uma célula de 100 cm² produz 1.6 W.

Como a maioria das aplicações práticas exige maior potência é necessário associar vários módulos em série para obter maior ddp ou em paralelo para maiores correntes. A associação de módulos permite atingir valores da ordem do MW.

A qualidade de uma célula depende ainda de um outro parâmetro designado por factor de conversão, que é dado pela razão η entre a potência da célula e a potência recebida $P_e,\ \eta=\frac{V_{mp}I_{mp}}{P_e}\ \ \text{em}\ \text{que}\ P_e=A\int F(\lambda)\ \frac{hc}{\lambda}\ d\lambda,\ A$ é a área da célula, $F(\lambda)$ o 'número de fotões por cm², por segundo e por unidade de comprimento de onda $\lambda,\frac{hc}{\lambda}$ é a energia de cada fotão, h a constante de Planck e c a velocidade da luz. Em geral a eficiência teórica é da ordem de 30%

Como se vê da expressão anterior os materiais semicondutores são sensíveis à cor da luz do Sol, isto é ao comprimento de onda da radiação. Para um dado comprimento de onda existem materiais que absorvem melhor a luz que outros. Materiais como o arsenieto de gálio e o silício amorfo são melhores que o silício cristalino. Camadas finas do primeiro produzem a mesma potência que camadas espessas de silício cristalino. Para a mesma espessura temos factores de 500:1. Outra característica que joga na escolha do material é o valor do salto em energia ($gap\ energy$) entre a banda de condução e a de valência. Como sabemos o Sol emite radiação com um espectro contínuo e a radiação de energia próxima da do salto é absorvida com maior eficiência. Se a energia incidente for maior provoca sobretudo agitação térmica, e a energia do Sol é desperdiçada. Tome-se como exemplo o silício amorfo cuja energia interbandas é 1.12 eV, donde só se aproveitar a parte do espectro com comprimento de onda entre 0.4 e 1.1 μ m, cuja energia associada é $0.8 < E = \frac{hc}{\lambda} < 3.1$ eV. Aproveita-se o espectro de frequências do visível e ainda parte do ultravioleta e infravermelho.

O Sol como fonte de energia

A energia solar que recebemos provém do facto de o Sol ser um reactor de fusão nuclear situado a cerca de 150 milhões de quilómetros da Terra. O Sol é essencialmente constituído por hidrogénio e a fusão nuclear destes núcleos é um processo altamente exoenergético.

É difícil estabelecer os valores médios da energia solar que atinge a Terra, depende de múltiplos factores como latitude, estado de humidade do ar, período do ano, etc... Com carácter indicativo pode dizer-se que a energia solar «máxima» disponível ao meiodia solar, em dia límpido é da ordem de 1 kW m⁻², para uma superfície exposta directamente ao Sol.

Na alta atmosfera este valor é maior, perdendo-se quase 400 W/m² ao atravessar a atmosfera. Os principais factores responsáveis pela diminuição da intensidade da radia-

ção que atinge o solo são: a difusão pelas moléculas dos gases que constituem a atmosfera ou pelas partículas em suspensão, a reflexão difusa pelas gotas de água das nuvens, e a absorção por gases atmosféricos, essencialmente pelo oxigénio e azoto nos pequenos comprimentos de onda, e pelo vapor de água e anidrido carbónico nos grandes comprimentos de onda.

A radiação global que incide à superfície tem portanto duas componentes, uma directa e outra difusa de menor importância.

Para maximizar o rendimento de um painel fotovoltaico, este deve estar orientado de forma a receber o máximo de radiação incidente. Atendendo à altura do Sol e aos valores da radiação global medidos em Lisboa, um estudo¹ revelou que para painéis orientados a Sul, a inclinação ideal varia entre 0° em Junho e 60° em Dezembro. No entanto, um painel com inclinação fixa a 45° permite a recolha de 90% da radiação em relação à inclinação ideal. Assim, em Lisboa, para um painel inclinado a 45° a energia disponível média é de 5.12 kWh/dia/m⁻².

O rendimento global de um sistema de conversão fotovoltaico depende ainda de outros factores como sejam:

- temperatura da região;
- potência debitada;
- factor de compactação ou fracção de área do painel que de facto é ocupada com células fotovoltaicas. Pode assumir valores da ordem dos 80%.

Tudo isto faz com que o rendimento do sistema se afaste bastante do rendimento máximo, estimado a partir do material da célula.

Para ter uma ordem de grandeza da energia que é possível obter com este tipo de conversão, consideremos um sistema de painéis solares com dimensões de 10×10 km. A radiação incidente considerada é a global média estimada para Lisboa com painéis inclinados a 45°. O rendimento global estimado incluindo os diversos factores é de 8%. Ao fim de um ano, a energia eléctrica produzida por um tal sistema seria de 1.50×10^{10} kWh.

A título de comparação, podemos calcular a energia potencial armazenada numa albufeira paralelipipédica de profundidade 100 m e ocupando a mesma área. Como $E = mg \, \frac{h}{2} \,$ teríamos $1.36 \times 10^7 \,$ kWh. Isto significa que para produzir a mesma energia se teria que esvaziar a albufeira 1000 vezes com um rendimento de 100% na conversão em energia eléctrica.

²³²

[†] Radiação global incidente em superfícies orientadas a Sul, L. A. Mota e C. V. Marques, Revista do INMG, 1981.

APÊNDICES



APÊNDICE 1

O Osciloscópio

O osciloscópio é um aparelho que permite observar num ecrã uma diferença de potencial (ddp) em função do tempo ou em função de uma outra ddp. O elemento sensor é um feixe de electrões que, devido ao baixo valor da sua massa e por serem partículas carregadas, podem ser facilmente acelerados e a sua trajectória alterada pela acção de um campo eléctrico.

A ddp lê-se a partir da posição de uma mancha luminosa ou *spot* num ecrấ rectangular de dimensões aproximadas 10×8 cm. A mancha é provocada pelo impacto de um feixe de electrões num ecrã revestido de material fluorescente. Uma série de divisões marcadas no ecrã (as maiores de 1 cm e as menores de 2 mm) auxiliam na leitura das coordenadas do ponto luminoso. O rigor que se obtém é normalmente da ordem de 1 mm, mas a precisão da medida depende das escalas escolhidas para os eixos XX (tempo ou ddp) e YY (ddp).

Como quase todas as grandezas físicas são medidas através de um sinal eléctrico o osciloscópio é utilizado em qualquer tipo de laboratório e em situações tão diversas como o diagnóstico médico, mecânica de automóveis, prospecção mineira, etc. Sendo, em geral, um aparelho de controlo e observação, uma escolha justa das escalas permite medidas com uma precisão de 2 a 5%.

O osciloscópio, que passaremos a designar abreviadamente por OSC, é essencialmente constituído por duas partes:

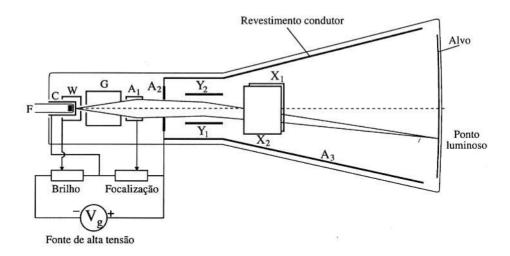
- Tubo de raios catódicos com ecrã fluorescente:
- Circuitos electrónicos.

Funcionamento do osciloscópio

Tubo de raios catódicos e circuito de entrada

O tubo de raios catódicos, em vidro e onde existe vácuo, encerra um emissor ou canhão de electrões, um conjunto de grelhas e eléctrodos, dois pares de placas metálicas paralelas (um de placas horizontais e outro de verticais) e um ecrã de sulfureto de zinco, tudo disposto como se pode ver na figura da página seguinte.

No canhão de electrões produz-se e controla-se o feixe de electrões. Usam-se electrões porque, para além de serem de fácil obtenção, a sua pequena massa (9.11×10⁻³¹ kg) e o facto de serem carregados (-1.6×10⁻¹⁹ C) fazem-nos muito sensíveis a pequenas ddp. Um filamento F de tungsténio é aquecido provocando, por efeito termoiónico, a emissão de electrões de um material alcalino (cátodo C). Para formar e controlar a intensidade do feixe (brilho) e acelerar os electrões existe respectivamente uma grelha W, a potencial negativo, e um ânodo A₂, eléctrodo a potencial eléctrico positivo. A ddp existente entre este ânodo e o cátodo comunica aos electrões uma velocidade horizontal v_z. Um sistema de eléctrodos G e A₁ colocados entre a grelha e o ânodo A₂ permite a focalização do feixe.



As placas X_1X_2 e Y_1Y_2 por onde o feixe posteriormente passa permitem fazer a sua deflexão. Quando aplicada uma diferença de potencial a estas placas é criado um campo eléctrico que actua sobre o feixe de electrões numa direcção perpendicular à das placas, deslocando-o conforme a amplitude da tensão aplicada. A relação entre os deslocamentos horizontal e vertical e as ddp aplicadas é linear

$$X = K_x V_x$$
 e $Y = K_y V_y$

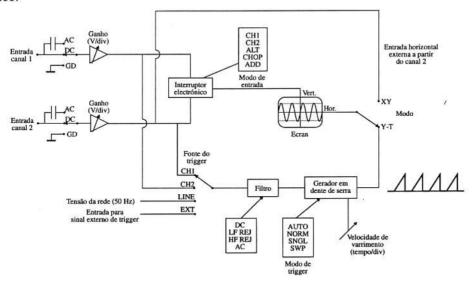
 K_x e K_y são constantes de proporcionalidade que dependem da dimensão das placas, da sua distância ao ecrã e da velocidade dos electrões. Se o OSC é usado para observar a variação de uma ddp em função do tempo, esta tensão é aplicada às placas horizontais Y_1Y_2 , provocando o deslocamento vertical do feixe. O deslocamento vertical é proporcional à ddp V_y aplicada. Às placas verticais X_1X_2 aplica-se uma ddp V_x , fornecida por um circuito electrónico designado por BASE DE TEMPO. A ddp aplicada pelo circuito da base de tempo actuará sobre o feixe deslocando-o na horizontal, da esquerda para a direita, com uma velocidade constante designada por velocidade de varrimento. No ecrã ter-se-á a imagem da função $Y(X) \equiv V_y(t)$. O OSC está a funcionar em MODO Y-T.

O esquema de blocos electrónicos da figura na página seguinte sintetiza o funcionamento do OSC desde a entrada do sinal até ao aparecimento do ponto luminoso no ecrã. Nos parágrafos que se seguem explica-se cada uma das operações representadas.

Para além do modo Y-T, o OSC também permite observar uma ddp v_1 em função de outra ddp v_2 . Para se ver $v_1(v_2)$ deve-se aplicar v_1 ao par de placas deflectoras horizontais (placas Y) e v_2 ao outro par (placas X): o OSC funciona em MODO X-Y.

O OSC é um aparelho que mede diferenças de potencial devendo portanto ter uma resistência interna elevada, tal como é exigido a qualquer voltímetro. Na maio-

ria dos OSC essa resistência é de 1 M Ω , podendo ser aumentada para 10 M Ω com o auxílio de uma ponta de prova apropriada, que descrevemos no fim deste apêndice.

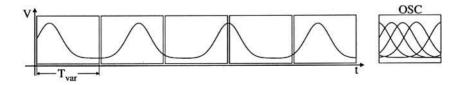


Os osciloscópios simples permitem observar sinais até frequências de 20 MHz. Os sinais à entrada Y_1 ou Y_2 são sujeitos a um ou vários andares de amplificação antes de actuarem sobre as placas deflectoras. A sensibilidade máxima que se obtém no OSC é de 1 cm/5 mV. Este assunto será retomado com maior detalhe num dos próximos parágrafos.

Varrimento e trigger

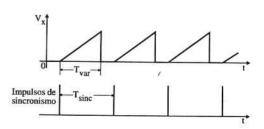
Quando seleccionamos o modo Y-T, designa-se por varrimento o passeio horizontal do ponto luminoso a velocidade constante. O deslocamento começa no lado esquerdo do ecrã e termina à direita. Mas quando e como se inicia?

Devido à frequência dos sinais que queremos em geral observar, o varrimento deve ser automático e rápido. Devido à persistência das imagens na retina, não se consegue ver a mancha a deslocar-se, mas apenas um traço contínuo. Se o varrimento se repete sem interrupção, só por mero acaso é que as frequências de varrimento e do sinal se ajustam, e por isso os ciclos consecutivos de varrimento não se sobrepõem coerentemente, provocando no ecrã uma imagem desordenada. Esta situação encontra-se exemplificada na figura seguinte.



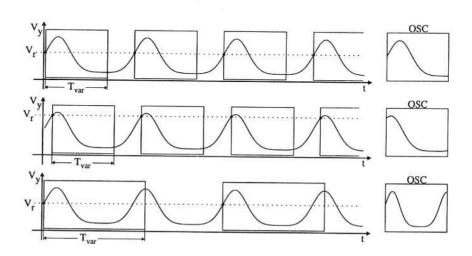
Para que as imagens consecutivas se sobreponham, permitindo uma visualização cómoda, é necessário um circuito de sincronismo que inicie o varrimento do sinal sempre a partir do mesmo ponto. O sincronismo é designado por disparo ou *trigger* e o respectivo circuito está incluído na zona da BASE de TEMPO.

O sincronismo é obtido a partir da comparação da tensão a medir V_y com uma tensão de referência V_r , regulável e constante, designada por nível de *trigger* ou *trigger level*. No instante em que V_y é igual a V_r o circuito envia à base de tempo um impulso e o varrimento inicia-se pela acção de uma tensão em rampa V_x de declive constante, como a da figu-



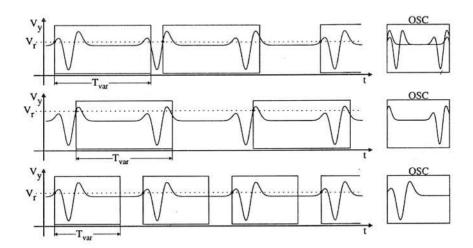
ra, aplicada às placas verticais. O circuito de sincronismo faz ainda a distinção entre as fases ascendente (+) ou descendente (-) do sinal, produzindo o disparo para apenas uma das situações.

A acção da tensão de varrimento V_x cessa quando o feixe de electrões atinge o lado direito. Nesse instante o feixe é desviado rapidamente para a esquerda e para fora do ecrã. O traço de retorno não é observado porque durante esse lapso de tempo a grelha é sujeita a uma tensão mais negativa, impedindo os electrões de atingir o alvo. O ponto luminoso volta ao ecrã quando a base de tempo recebe um novo impulso de *trigger*. As figuras seguintes ilustram esta explicação para diferentes situações.



Na primeira figura o sinal é mostrado a partir de 0 V e a crescer em tensão. Na figura seguinte o sinal é visível a partir de uma ddp superior a 0 V mas ainda com derivada positiva em ordem ao tempo. Finalmente na última figura o disparo é a 0 V mas o varrimento é mais lento permitindo ver um pouco mais do sinal.

Nos exemplos seguintes o sinal é mais complexo e por isso na primeira figura a definição de *trigger level* não é suficiente para se obter uma imagem correcta do sinal. A melhor imagem resulta de uma escolha mais conveniente para o nível de *trigger* e/ou tempo de varrimento, como se ilustra nas outras duas figuras.



Consoante o tipo de sincronismo usado, assim dizemos que estamos em modo TRIG-GER AUTO ou NORMAL.

- TRIGGER AUTO: o varrimento processa-se permanentemente em intervalos regulares, mesmo quando não exista sinal na entrada. Com uma selecção de varrimento lento (s/cm ou alguns ms/cm) é possível ver o ponto luminoso a deslocar-se horizontalmente através do ecrã. Para varrimentos mais rápidos, em vez de um ponto observa-se uma linha horizontal, devido à persistência das imagens na retina. Nos modelos mais simples de osciloscópios este tipo de trigger obtém-se usando o controlo do trigger na posição AT.
- TRIGGER NORMAL: o varrimento inicia-se desde que exista um sinal de entrada compatível com o nível de *trigger* seleccionado. Neste tipo de *trigger* não se vê nenhum sinal no ecrã se não houver sinal na entrada e exige que se regule frequentemente o nível de *trigger* quando se observam ddp diversas.

Conforme a origem do sinal de tensão que é usado para realizar o sincronismo, assim dizemos que se tem o TRIGGER em modo EXTERNAL ou INTERNAL.

TRIGGER INTERNAL: O sincronismo do trigger neste modo é feito a partir da(s) ddp(s) aplicadas à entrada do OSC. Nos osciloscópios de dois canais, o sincronismo obtém-se a partir da tensão aplicada ao canal 1 ou 2, consoante a posição do interruptor TRIG está em I ou II. Nestes OSC, é possível estar a visualizar um sinal num canal, enquanto que o varrimento é sincronizado pelo sinal aplicado ao outro canal. Para obter este efeito basta ter os selectores em MONO e TRIG II.

TRIGGER EXTERNAL: Neste modo só existe varrimento quando na entrada de trigger externo se aplica um sinal. É usado quando o sinal de entrada está misturado com ruído que se quer eliminar e se dispõe de um outro bom sinal com frequência igual ao de entrada.

A maioria dos modelos de OSC permitem a escolha de outras fontes para o sinal de sincronismo, nomeadamente *TV* e *LINE*. No modo LINE o *trigger* é comandado pela frequência de alimentação da rede. No modo TV o sinal de sincronismo interno (I ou II) é filtrado com um filtro passa-baixo (≈ 500 Hz) por forma a facilitar a visualização do sinal de televisão. Alguns modelos mais complexos de OSC têm um selector adicional *TRIG SEL* que permite seleccionar os modos AC, DC, LF e HF que filtram do sinal de sincronismo respectivamente a componente alterna, contínua, de baixa frequência ou de alta frequência.

Osciloscópio de traço simples e duplo

Conforme se pode visualizar, em simultâneo, uma ou duas ddp assim o OSC é de traço simples ou duplo (*DUAL TRACE*). A maioria dos osciloscópios é pelo menos *dual* e actualmente encontram-se facilmente aparelhos com quatro canais.

Usa-se o OSC em traço simples ou MONO, quando se pretende observar um sinal único que se aplica à entrada Y1 ou Y2, independentemente do sinal aplicado à entrada do outro canal.

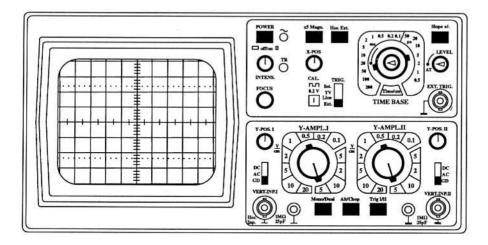
Para se observarem simultaneamente dois ou mais sinais, na maioria dos OSC existe um sistema de partilha do feixe de electrões, de modo que com um único tubo de raios catódicos se possa fazer a visualização de vários sinais. No caso de serem dois, designase por traço duplo e deve seleccionar-se DUAL. Para analisar dois sinais de ddp V_{y1} e V_{y2} , aplicadas às entradas 1 e 2, o OSC possui um circuito de comutação electrónica que envia alternadamente V_{y1} e V_{y2} às placas horizontais. Esta comutação tem de ser muito rápida para que exista persistência das duas imagens.

No modo DUAL existem dois tipo de comutação:

- Modo Alterno (ALT) a comutação faz-se após cada varrimento, registando alternadamente no ecrã V_{y1} e V_{y2}. Para que a alternância não seja perceptível o varrimento deve ter um período inferior a metade da persistência retiniana, i.e., a sua frequência deve ser superior a 50 Hz.
- Modo Repartido (CHOP) a comutação faz-se a elevada frequência (100 kHz). O traço de cada ddp V_y é descontínuo, aparecendo a tracejado no ecrã. Se o varrimento se faz lentamente, com frequência inferior a 1 kHz, o comprimento do tracejado e a distância entre traços consecutivos é inferior ao diâmetro do ponto luminoso, o que provoca uma sequência de pequenos traços percebida como uma linha contínua.

Quando se faz a composição de sinais, partindo do modo Y-T DUAL para o modo X-Y, a base de tempo é substituída pelo sinal do canal 2. Daqui resulta a composição da ddp V_{y2} com ela mesma, o que produz no ecrã uma semirecta inclinada a 45 $^{\circ}$. Esta pode ser suprimida retornando ao modo MONO.

Regulações e opções



As entradas e os diferentes botões de controlo estão resumidos na figura anterior que representa a parte frontal de um modelo de osciloscópio económico e bastante difundido nos laboratórios de iniciação à Física Experimental.

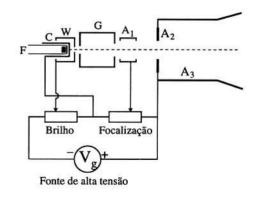
Quando se usa o osciloscópio a primeira operação é ligá-lo:

■ POWER ON provoca o aquecimento do filamento e a consequente emissão de electrões do cátodo. Mas atenção, é necessário que o aparelho esteja alimentado com 220 V e uma boa ligação à massa. A ligação à massa tem por efeito evitar que se desenvolvam no tubo catódico e ecrã tensões electrostáticas elevadas. Uma luz sinalizadora assinala quando o aparelho se encontra ligado.

Regulação do ponto luminoso

O esquema do canhão de electrões ilustra quais os comandos possíveis:

■ INTENSITY: A grelha W, a potencial negativo, repele os electrões obrigando-os a concentrarem-se num feixe. Regulando o potencial da grelha controla-se o fluxo de electrões, isto é, a intensidade do feixe e portanto a luminosidade ou brilho do ponto luminoso. Estas operações são efectuadas com o botão (regulador de um potenciómetro) INTENSITY;



241

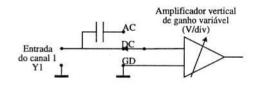
- FOCUS: Os ânodos A1, A2 e A3, a potencial positivo relativamente ao cátodo, permitem acelerar e concentrar o feixe actuando como lentes. A sua tensão é controlada pelo botão (regulador de um potenciómetro) FOCUS. O ânodo A2 determina a intensidade do campo eléctrico a que o feixe de electrões fica sujeito, logo a velocidade final com que se deslocam;
- TR (Trace Rotation) potenciómetro que regula a horizontalidade do varrimento dos electrões.

ATENÇÃO: se o ponto luminoso for muito brilhante quer dizer que se excitam muitos átomos do ecrã e que se pode destruir nesse ponto a camada de substância fluorescente.

Entradas

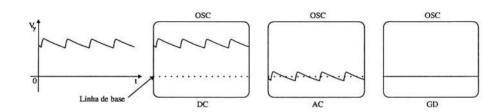
As entradas são as **Y** e a de *TRIGGER EXT*. As entradas **Y** têm três tipos de acoplamento ao circuito de amplificação, ilustradas no esquema:

- DC (acoplamento contínuo): a ddp à entrada é aplicada directamente ao circuito de amplificação;
- AC (acoplamento filtrado): só a componente da ddp variável no tempo é aplicada ao amplificador, a componente contínua é filtrada pelo condensador C;



GD: a tensão de entrada não é aplicada ao amplificador, sendo a entrada deste colocada à massa. Esta posição do comutador é usada sempre que se quer ajustar o nível de tensão zero, também designado por linha de base.

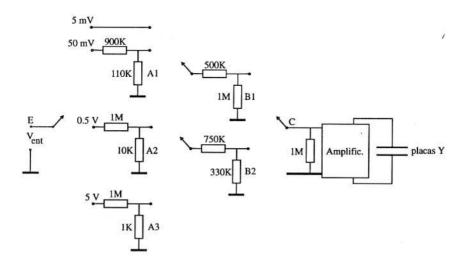
As figuras seguintes ilustram o efeito de cada um dos tipos de acoplamento.



Junto de cada entrada está o regulador de ganho do amplificador vertical com uma escala graduada em V/cm, desde 5 mV/cm a 20 V/cm. O ganho deve ser seleccionado de acordo com a amplitude do sinal em observação. Com a altura do ecrã de 8 cm, estas escalas permitem a observação de ddp até um máximo de 160 V pico a pico.

Na escala de 5 mV/cm a ddp é aplicada directamente à entrada de um amplificador de ganho 1400. Em todas as outras escalas o sinal passa antes por um ou vários atenua-

dores de modo que à entrada do amplificador a amplitude do sinal seja no máximo 5 mV/cm. Os atenuadores usados são divisores de tensão resistivos. Nas escalas 50 mV/cm, 0.5 V/cm e 5 V/cm a ligação é efectuada através dos atenuadores A₁, A₂ e A₃. Uma atenuação suplementar de um factor 2 ou 4 pode ser obtida pela inserção adicional dos atenuadores B₁ e B₂. A aplicação simultânea de A e B permite atenuações que vão de 1/2 a 1/4000. No total podemos ter 12 escalas entre 5 mV/cm e 20 V/cm.



Para medir uma ddp multiplica-se o número de centímetros que o sinal abrange na escala vertical pelo valor do ganho em V/divisão ou V/cm seleccionado. Em qualquer escala o circuito de entrada tem uma resistência equivalente da ordem de 1 $M\Omega$. O selector de escala tem ainda uma posição CAL ou CALIB (calibrado) que garante o valor do ganho seleccionado. Fora dessa posição a amplitude é menor do que a real.

Ao lado das entradas Y₁ e Y₂ existe uma ligação de terra.

Modo Y-T

BASE de TEMPO, X-POS e Y-POS — No modo Y-T os botões X-POS (HORIZONTAL ou ↔) e Y-POS (ou \$\(\)) permitem o enquadramento no ecrã da linha de base. O circuito da base de tempo fornece, como referimos, uma tensão V_x do tipo dente de serra. A selecção do período T do varrimento, ou seja do período da ddp em dente de serra, faz-se com o botão BASE de TEMPO (TIME BASE). Para medir um intervalo de tempo multiplica-se o número de centímetros que o sinal abrange na escala horizontal pelo valor da escala em tempo/divisão ou tempo/cm seleccionado. O tempo é dado em unidades de s, ms ou μs. Quando V_x atinge o valor V_{max} um sinal desvia o ponto luminoso para fora do ecrã. O valor mínimo da escala horizontal pode ser alterado usando o selector × MAGN. O número que acompanha este selector indica o factor por que se pode multiplicar esta escala.



- NÍVEL de TRIGGER (LEVEL) e DECLIVE (SLOPE) o primeiro regulador varia o nível de tensão a partir do qual o sinal é visualizado e o DECLIVE permite seleccionar se a amostragem do sinal é no sentido da amplitude crescente (slope +) ou decrescente (slope -);
- MODO de TRIGGER (ou disparo): O trigger pode funcionar de dois modos diferentes: NORMAL ou AUTO, já referidos anteriormente. No modo NORMAL o trigger ocorre desde que a tensão do LEVEL seja atingida, enquanto que no modo AUTO o trigger ocorre automaticamente. A frequência do varrimento depende da fonte de trigger escolhida: INT, TV, LINE ou EXTERNAL.

Modo X-V

Como já referimos, este modo é usado para estudar uma ddp em função de outra. Aplicam-se os sinais às entradas Y_1 e Y_2 e selecciona-se o modo no botão X-Y ou HOR. EXT. Nesta forma de funcionamento o OSC desliga o circuito base de tempo das placas verticais e aplica a estas a segunda ddp. Nos modelos antigos de osciloscópios existe uma entrada especial para a segunda ddp assinalada com X.

Grandezas que se podem medir directamente com o osciloscópio

Tensões contínuas

Embora vocacionado para a medição de ddp variáveis no tempo, o OSC também pode ser usado para medir uma ddp contínua. Não havendo necessidade de sincronismo, o *trigger* deve estar sempre no modo AUTO. A tensão de referência, o nível zero ou linha de base, deve ser ajustado com a entrada do canal ligada à massa (selector em GND). Com a base de tempo desligada, o nível de referência resume-se a um ponto brilhante. Por isso é mais cómodo escolher uma velocidade de varrimento que produza um traço contínuo no ecrã.

Ao aplicar a ddp desconhecida à entrada do OSC, agora em modo DC, a linha de base realiza um salto proporcional à ddp. Com um erro de leitura de 1 mm, a melhor precisão que se pode obter num ecrã de 8 cm é de ~1%. Para a conseguir é no entanto necessário que a linha de referência coincida com uma das divisões extremas marcadas no ecrã e que o ganho do amplificador vertical seja o máximo permitido pela amplitude do sinal.

Esta é uma característica comum a todas as medições de comprimentos feitas no ecrã do OSC: para maximizar a precisão de leitura, o OSC deve ser ajustado por forma a que a distância lida seja a maior possível.

Tensões alternas periódicas

Para caracterizar uma ddp alterna é necessário medir a sua amplitude máxima V_o e período T. Para conhecer a verdadeira grandeza da ddp deve-se ajustar a linha de zero, tal como foi descrito para a medição de ddp contínuas, e seleccionar a entrada do OSC

em modo DC. Com tensões sinusoidais o mais cómodo é medir a tensão pico a pico $V_{PP} = 2V_o$. Mais uma vez o ganho do amplificador deve ser o máximo permitido pelo nível do sinal.

No caso de se pretender visualizar e medir um sinal de pequena variação misturado com uma componente contínua muito superior, a entrada do OSC deve ser colocada em AC. Um exemplo típico é a observação da oscilação residual duma ddp rectificada com uma ponte de díodos, situação descrita na Leitura 4.

Para medir o período T de um sinal periódico, deve-se ajustar a base de tempo e o *trigger* por forma a visualizar no ecrã uma figura estável com um pequeno número de ciclos completos. Para minimizar o erro de leitura, deve-se medir no ecrã o tempo correspondente a todos os períodos representados. Com um ecrã de 10 cm de largura e um erro de leitura de 1 mm, a precisão máxima que se pode obter é de 1%, ou seja, três algarismos significativos.

Quando a tensão de entrada é aperiódica, como por exemplo no registo da voz humana obtido por intermédio de um microfone, o OSC permite a sua visualização mas a instabilidade da imagem não permite a realização de qualquer medida.

Intensidade de corrente

Embora funcione essencialmente como voltímetro, o OSC pode medir intensidades de corrente em função do tempo (ou uma ddp), através da medida da ddp aos terminais de uma resistência conhecida R. Nestas circunstâncias, os valores de ddp lidos na escala do OSC devem ser convertidos em corrente pela aplicação simples da lei de Ohm.

Diferença de fase entre dois sinais de igual frequência

Consideremos dois sinais sinusoidais, $v_1(t)$ e $v_2(t)$, entre os quais existe uma diferença de fase (ddf) de ϕ .

$$v_1(t) = b\cos(\omega t + \phi)$$
 e $v_2(t) = a\cos\omega$ em que $\omega = 2\pi f$

A ddf ϕ pode variar entre -180° e $+180^{\circ}$. Quando a ddf \acute{e} negativa diz-se que v_1 está atrasada em relação a v_2 e quando a ddf \acute{e} positiva, que v_1 está adiantada em relação a v_2 .

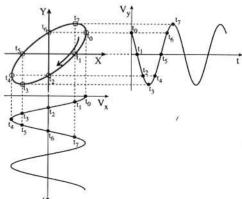
Para medir a ddf pode-se observar no OSC, em modo X-Y, a composição dos dois sinais. Com v_1 aplicada à entrada do canal 1 (Y) e v_2 na entrada do canal 2 (X), o ponto luminoso descreve no ecrã uma figura cujas coordenadas x(t) e y(t) são dadas por

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t$$
 $\frac{y}{b} = \cos(\omega t + \phi)$

Para definir a equação da trajectória descrita pelo ponto, eliminamos a variável t entre as duas equações, obtendo-se

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos\phi = \sin^2\phi$$

que é a equação de um elipsóide com os eixos principais rodados. Desta expressão podemos concluir que a figura é idêntica para uma ddf de ± φ. Os dois casos distinguem-se apenas pelo sentido com que o ponto descreve o elipsóide: no sentido directo se Y estiver atrasado em relação a X, ou no sentido retrógrado em caso contrário. Esta



situação só se pode observar no OSC em modo X-Y para frequências muito baixas.

A figura ao lado ilustra como se processa a composição de sinais e construção da elipse para uma ddf de +45°.

As figuras seguintes mostram o resultado da composição de duas sinusoidais para diferentes ddf, incluindo os casos particulares: $\phi = 0^{\circ}$, em fase; $\phi = \pm 90^{\circ}$, em quadratura; $\phi = 180^{\circ}$, em oposição de fase.





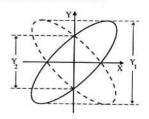




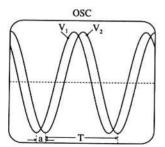


Para sinais em quadratura, se a = b a elipse transforma-se num círculo.

Para medir uma ddf φ arbitrária, deve-se fazer a medição das amplitudes Y_1 e Y_2 como indicado na figura. As propriedades particulares desses pontos da trajectória permitem escrever para a elipse a cheio que



$$|\phi| = \operatorname{sen}^{-1}(Y_2/Y_1)$$



Para a elipse a tracejado, alongada entre o 2.º e 4.º quadrantes, a ddf é dada por

$$|\phi| = 180^{\circ} - \text{sen}^{-1}(Y_2/Y_1)$$

A diferença de fase pode ser igualmente medida com o OSC em modo Y-T, se bem que neste modo a leitura seja menos cómoda. Conhecendo o período T comum às duas ddp, mede-se o tempo a de que v₂ se encontra adiantada em relação a v₁.

Vem então
$$\phi = 360^{\circ} \frac{a}{T}$$

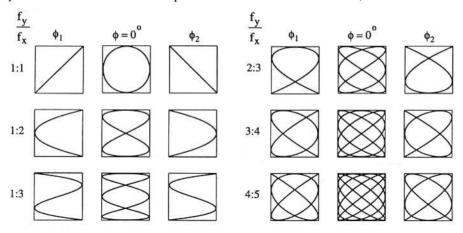
Medição da razão de frequências de dois sinais — figuras de Lissaious

Quando se realiza no OSC em modo X-Y a composição de dois sinais sinusoidais de frequências diferentes,

$$x = A\cos(\omega_x + \phi_{0x})$$
 com $f_x = \omega_x/2\pi = 1/T_x$
 $y = B\cos(\omega_y + \phi_{0y})$ com $f_y = \omega_y/2\pi = 1/T_y$

como a frequência dos sinais não é a mesma, a trajectória da mancha dos electrões no ecrã não é uma figura estável, a não ser que a razão entre as frequências seja um número inteiro ou uma fracção racional. Nestas condições obtêm-se as conhecidas FIGURAS DE LISSAJOUS cuja forma característica depende da razão entre as frequências dos sinais e do valor da diferença de fase inicial, $\Delta \phi_0 = \phi_{0x} - \phi_{0y}$.

Nas figuras seguintes ilustram-se alguns exemplos de figuras de Lissajous formadas para diferentes razões de frequências.

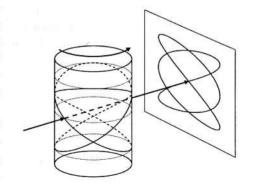


Se conhecermos uma das frequências, podemos medir a frequência do outro sinal a partir da expressão

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{\text{n.° de arcos tangentes ao eixo horizontal}}{\text{n.° de arcos tangentes ao eixo vertical}}$$

No laboratório é muitas vezes difícil obter uma figura de Lissajous perfeitamente estática. Isto deve-se ao facto das frequências não obedecerem exactamente à razão teórica pelo que a ddf inicial não é constante, variando no tempo. Este efeito dá a sensação de se ter no ecrã uma figura cilíndrica a rodar. A figura ilustra esta situação.

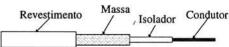
A formação das figuras de Lissajous não é um privilégio dos sinais sinusoidais eléctricos de ddp, formam-se sempre que se tem uma composição de movimentos oscilatórios.



Ponta de prova

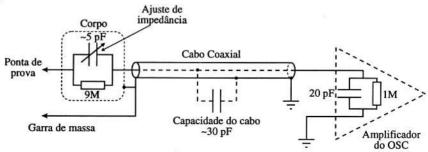
A ligação entre o ponto do circuito onde se quer medir uma ddp e o OSC é, em geral, feita através de uma PONTA DE PROVA. Esta é constituída por um cabo coaxial em que uma das extremidades apresenta um contacto em forma de gancho ou crocodilo e a outra uma ficha compatível com a entrada do osciloscópio. Um cabo coaxial tem a constituição apresentada no esquema.

Na ponta de prova, o potencial de referência, a massa, encontra-se ligada directamente à massa do osciloscópio. Por isso, nos OSC com mais de uma entrada.



os terminais de referência são comuns. Esta característica deve ser tida em conta quando se pretendem observar simultaneamente sinais provenientes de vários pontos do mesmo circuito.

A impedância de entrada do OSC vista pelo circuito sob teste deve ser grande, para não retirar qualquer corrente a este e portanto não perturbar a medida. Ora a resistência de entrada de 1 $M\Omega$ associada em paralelo com uma capacidade da ordem de 20 pF é por vezes insuficiente para garantir a fidelidade da medição. Para evitar este problema insere-se uma resistência de 9 $M\Omega$ em série com a ponta de prova.



A esta resistência é associada uma capacidade ajustada ao valor do paralelo da capacidade de entrada com a capacidade do cabo coaxial por forma a obter um circuito divisor de tensão por 10 para todas as frequências. A impedância de entrada do osciloscópio através da ponta de prova será 10 MΩ em paralelo com alguns pF.

Em certas pontas de prova existe um comutador assinalado por 1X ou 10X que permite a inserção ou não da resistência de $9~M\Omega$. Quando se usa uma ponta de prova com atenuação de 10, todas as leituras de ddp feitas com o OSC devem ser multiplicadas por 10, e a sensibilidade máxima deste passa a ser de 1~cm para 50~mV.

APÊNDICE 2

Multímetros

O s instrumentos de medida habitualmente usados na medição das grandezas eléctricas – intensidade de corrente, diferença de potencial e resistência eléctrica, designam-se respectivamente por amperímetros, voltímetros e ohmímetros. Um multímetro é um aparelho que reúne num mesmo corpo estas três funções. Em relação ao osciloscópio, que é um outro instrumento de medida de grandezas eléctricas (ver Apêndice 1), o multímetro tem a vantagem de ser de menores dimensões e fácil transporte. Além disso, a sua utilização é bastante mais simples e é mais preciso nas medições realizadas. No entanto, um multímetro apenas mede o valor de grandezas constantes, ou o valor eficaz de grandezas com variação periódica, pelo que não permite acompanhar a evolução de grandezas ao longo do tempo, como faz o osciloscópio.

Os multímetros são de dois tipos:

- ANALÓGICOS sensíveis à corrente que os atravessa. Indicam o valor da medida mediante a posição de um ponteiro que se pode deslocar continuamente sobre uma escala:
- DIGITAIS sensíveis à tensão aos seus terminais. Fornecem directamente o valor numérico do resultado da medida.

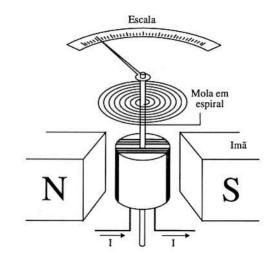
Começamos por analisar o comportamento dos multímetros analógicos, se bem que actualmente se usem quase exclusivamente os digitais, cujo funcionamento se baseia em circuitos integrados. Os multímetros digitais possuem melhores características que os analógicos e o processo de leitura é mais fácil e preciso, porque se lê um número em vez da posição de uma agulha em face de uma escala. Contudo existem medidas muito sensíveis, sobretudo de corrente eléctrica que exigem ainda o recurso aos multímetros analógicos.

Multímetro analógico

Galvanómetro d'Arsonval

Os medidores analógicos fundamentam-se em geral na medida de corrente (tipicamente com um valor máximo de 37.5 µA ou 50 µA) realizada com um galvanómetro de quadro móvel do tipo d'Arsonval.

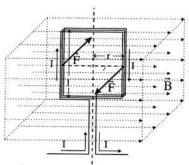
Neste galvanómetro, a corrente cuja intensidade se quer medir é obrigada a atravessar o enrolamento de espiras colocadas no interior do campo magnético produzido pelo imã. A acção do campo magnético sobre a corrente nas espiras traduz-se por um binário que leva à rota-



ção do quadro móvel. Este binário, que é proporcional ao valor da intensidade da corrente, é equilibrado por outro binário simétrico produzido pela deformação angular de uma mola enrolada em espiral. Desta forma, o deslocamento final sofrido pela agulha na escala fica, pelo equilíbrio das interacções envolvidas, proporcional ao valor da corrente.

Vejamos em termos físicos, observando o esquema do galvanómetro, como se processa a medida e como se garante a proporcionalidade entre a corrente e o deslocamento angular.

O binário electromagnético, resultante da interacção entre o campo \vec{B} do imã e a corrente i que atravessa as espiras (com a disposição da figura) é dado por $M = nilB \times 2r = niBa$ em que l e r são as dimensões da espira, a é a sua área e n é o número de espiras.



O binário mecânico de restituição da mola é proporcional ao deslocamento angular sofrido θ e vem dado por $M = k\theta$, em que k é a constante mecânica da mola.

No equilíbrio os dois binários igualam-se

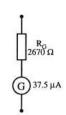
$$niBa = k\theta$$
 e $\theta = \frac{nBa}{k}i$

O deslocamento angular da agulha θ é proporcional à intensidade da corrente i, permitindo a sua medida.

As variáveis que influenciam a sensibilidade deste tipo de instrumento são:

- o campo magnético, limitado pelas dimensões do imã permanente;
- a área das espiras, limitada pelo espaço disponível;
- o número de espiras, limitado pela exigência da resistência do aparelho ser o mais baixa possível;
- a constante da mola, limitada pela propriedades dos materiais utilizáveis.

Tipicamente estes galvanómetros têm uma resistência interna de R_G = 2670 Ω e para uma corrente de 37.5 μA a agulha sofre deflexão máxima. O símbolo de um galvanómetro real está representado no esquema, em que \widehat{G} representa um galvanómetro ideal de resistência interna nula.



250

Amperímetro analógico Para a medicão de corrent

Para a medição de correntes usa-se o galvanómetro que passa a ser designado por amperímetro. Associando ao galvanómetro resistências em paralelo, teremos um amperímetro com a possibilidade de medir correntes superiores a 37.5 µA e construir um amperímetro com diversas escalas. O esquema ilustra a constituição interna de um amperímetro com cinco escalas.

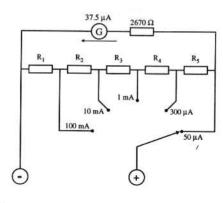
A selecção da escala é feita mecanicamente com o auxílio de um comutador que introduz em paralelo com R_G as resistências apropriadas.

Quando se quer medir a intensidade de uma corrente eléctrica esta deve passar no interior do amperímetro, donde este dever ser colocado em série no ramo em que se efectua a medição. Para não alterar o valor

R₂

da medida a resistência interna do amperímetro ideal deve ser nula. Estas condições são igualmente

Estas condições são igualmente válidas para os amperímetros digitais.

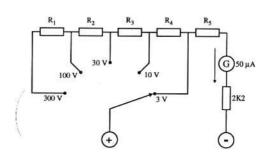


O esquema representa o símbolo de um amperímetro com a respectiva resistência interna. O símbolo (A) representa o amperímetro ideal.

Voltímetro analógico

A deflexão da agulha num galvanómetro é devida à passagem de corrente nas espiras. Como o galvanómetro tem uma certa resistência, a esta passagem de corrente está as-

sociada uma ddp, $V_G = I_G R_G$. Calibrando o deslocamento angular da agulha do galvanómetro em volt passamos a ter um VOLTÍMETRO. Um voltímetro com uma escala de 1 V obtém-se associando em série com um galvanómetro de 50 μ A uma resistência de 20 k Ω , visto que $20k\Omega\times50\mu$ A = 1V. Para se terem várias escalas associam-se ao galvanómetro várias resistências em série.



No esquema ilustra-se a constituição interna de um voltímetro com várias escalas construído a partir de um galvanómetro de 50 μ A com resistência interna de 2.2 k Ω . Como a corrente de fim de escala é sempre a mesma, a resistência interna tem neste caso o valor de 20 k Ω por volt da escala.

A medição de uma ddp entre dois pontos de um circuito faz-se colocando o voltímetro em paralelo com o circuito. Um voltímetro é bom quando não consome qualquer

corrente do circuito sob medida, isto é, quando tem uma resistência interna infinita (voltímetro ideal). Assim, sempre que se usa um voltímetro digital ou analógico deve controlar-se com um ohmímetro a resistência interna da escala escolhida. Um voltímetro representa-se esquematicamente como se indica na figura, em que v é o símbolo do voltímetro ideal.

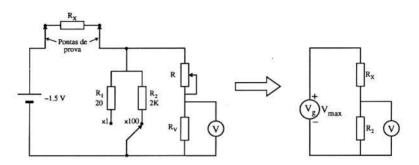


Ohmímetro analógico

Um voltímetro pode ser utilizado como ohmímetro. Associando uma pilha ao circuito de uma resistência conhecida em série com a resistência desconhecida, podemos medir a ddp neste divisor de tensão e assim medir o valor dessa resistência. Os ohmímetros permitem medir resistências de zero a dezenas de megaohm. O seu símbolo é como se indica na figura.



No esquema de ohmímetro que se segue, a resistência variável R, ajustável externamente, permite o ajuste do zero (tensão de fim de escala ou $V_{\rm fe}$), tendo em atenção o valor da ddp da pilha utilizada. Este ajuste é feito antes de cada medida ou sempre que se muda de escala, colocando as pontas de prova do ohmímetro em curto-circuito.

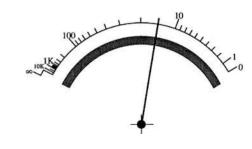


Feito o ajuste de fim de escala, e considerando o voltímetro como ideal $(R_v + R \ge R_i)$ então a ddp aos terminais de R_i , em que $R_i = R_1$ ou R_2 , vale

$$V = V_{fe} \frac{R_i}{R_i + R_X}$$

O valor da resistência R_i determina a escala com que se mede R_x . No esquema têm-se duas escalas controladas por R_1 e R_2 . Em qualquer dos casos, a ddp medida aos terminais de R_i varia entre 0 e V_{fe} . Quando $R_x = \infty$ toda a tensão da pilha é aplicada a R_x , a ddp em R_i é nula e a agulha não se deflecte, ângulo de 0° . Quando $R_x = 0$ toda a ddp fica aplicada em R_i e então a agulha sofre a deflexão máxima, por exemplo de 120° , que é designada por fim de escala. Para valores intermédios de R_x têm-se valores de ddp em R_i , dados pela expressão anterior, que não correspondem a uma escala linear nem logarítmica. A escala do ohmímetro analógico, representada na figura, deve ser construída com base numa tabela do tipo seguinte

R _X	V(R _i)/V _{fe}	ângulo
0	1	120°
R_i	1/2	60°
$2R_i$	1/3	40°
$3R_i$	1/4	30°
$10R_i$	1/11	10.9°
100 R _i	1/101	1.2°

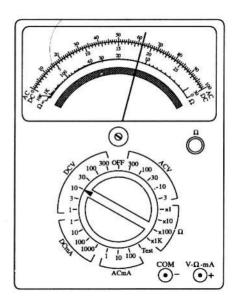


Multímetros

Em geral as três funções de amperímetro, voltímetro e ohmímetro encontram-se instaladas sobre um mesmo galvanómetro e selectores mecânicos permitem escolher o tipo de função e a escala. Estes aparelhos designam-se por multímetros analógicos e a medida obtém-se com base na deflexão de uma agulha em frente de uma escala convenientemente graduada em volt, ampere ou ohm. Para eliminar os erros de paralaxe na leitura da posição da agulha, estes instrumentos dispõem de um espelho auxiliar. Quando realizada com cuidado, o erro de leitura vale metade da menor divisão

que se pode estimar na escala. Os valores numéricos nas escalas indicam o alcance máximo da mesma. SEMPRE que se faz uma medição deve seleccionar-se primeiro a escala de maior alcance e só a seguir comutar para escalas de alcance inferior de modo à leitura se fazer com a agulha no meio do mostrador. Quando se sujeita uma escala a um valor excessivo de corrente, em geral o fusível do multímetro «queima» ou pode danificar-se a agulha.

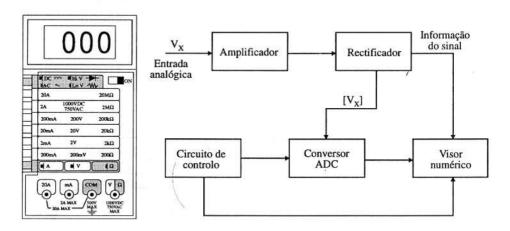
Como para medir resistências é necessário uma fonte de tensão estes aparelhos têm uma pilha. Por isso, quando não utilizados devem ser sempre desligados. Os multímetros analógicos têm igualmente um ajuste de zero que deve ser regulado antes de uma medição. A figura ilustra o aspecto físico de um multímetro.



Multímetro digital

Os multímetros digitais reúnem igualmente num só aparelho a possibilidade de medir pelo menos ddp, correntes, alternas ou contínuas, e resistências. O resultado da medição é um número. São em geral muito mais precisos que os analógicos e permitem medidas mais rápidas e cómodas. Não possuindo partes mecânicas o aparelho resiste melhor quando sujeito a correntes elevadas ou de polaridade invertida, situações que provocam nos analógicos movimentos bruscos da mola, por vezes fatais para esta. Os digitais dão o resultado afectado de sinal – quando não estão ligados de acordo com a polaridade do circuito.

O funcionamento destes multímetros baseia-se em circuitos integrados, não existindo qualquer parte mecânica, para além do selector de função. A figura apresenta conjuntamente o aspecto físico de um multímetro e o diagrama de blocos de um circuito de entrada e medida de ddp.



A ddp V_x a medir é amplificada, A>1, ou atenuada, A<1, os ganhos variam em geral por factores de 10. À saída do amplificador tem-se um rectificador que actua consoante a natureza do sinal e do modo selecionado, AC ou DC.

Modo DC:

- V_x é contínua e positiva o rectificador não actua;
- \mathbf{W}_{x} é contínua mas negativa o rectificador limita-se a inverter o sinal e simultaneamente gera o sinal – no visor.

Modo AC:

■ V_x é alterna, carácter assinalado com selector, o rectificador produz uma ddp contínua de valor idêntico ao RMS do sinal de entrada. O intervalo de frequências em que o rectificador actua de modo linear situa-se em geral entre $\sim 10~{\rm Hz}$ e $\sim 5~{\rm kHz}$.

Estas últimas considerações também são válidas para os multímetros analógicos funcionando em modo alterno ou AC.

A saída positiva do rectificador é aplicada a um conversor analógico digital ADC. Este pode ser de vários tipos, funcionando do seguinte modo: Um circuito de controlo gera um sinal de ddp u(t), em rampa, decrescente no tempo; este sinal é continuamente comparado com V_x e quando são de igual amplitude o circuito de controlo dispara um gerador de frequência fixa que emite impulsos até ao instante em que u(t) se anula. O número de sinais produzidos é por isso proporcional à amplitude de V_x e é este número que é contado e afixado no visor. Neste caso o erro

de leitura é a menor unidade que se pode ler no visor. Para minimizar este erro deve selecionar-se a escala que proporciona o maior número de algarismos significativos

Como vimos, o processo de medição num multímetro não é instantâneo e por isso se observa por vezes uma flutuação descontínua de valores quando a grandeza é variável. Os multímetros digitais permitem medir em geral ddp no intervalo 10^{-4} a 10^3 V e para um intervalo de frequências de 50 Hz a algumas centenas de Hz.

O circuito descrito é facilmente adaptado à leitura de intensidades de corrențe, bastando para isso fazer passar a corrente a medir através de uma resistência interna conhecida e aplicar a ddp gerada à entrada do amplificador. Tipicamente estes multímetros medem correntes entre 10⁻⁴ e 1 A.

Se bem que o aparelho ideal devesse ter resistência interna infinita no caso do voltímetro e nula para o amperímetro, mesmo os multímetros digitais apresentam valores que não são os ideais, especialmente os de baixo custo. Antes de usar um multímetro deve sempre controlar-se com um outro o valor das resistências internas de cada escala e anotar os seus valores, para eventuais correcções às medições realizadas.

O erro que se comete numa medição, devido a não considerar a resistência interna da escala seleccionada, é do tipo sistemático e pode ser eliminado se medido.

Para medir resistências os multímetros possuem um gerador de corrente. Quando se quer medir uma resistência liga-se as extremidades da resistência à entrada assinalada com Ω e, mais uma vez, o que se mede é a ddp criada pela passagem da corrente conhecida na resistência a medir. Existem escalas de 0.1 Ω a 20 M Ω . Quando a bateria está descarregada aparece no visor a indicação de *Low Battery*.

Quando se usa o multímetro na função de ohmímetro, o botão DC/AC, respectivamente assinalado pelo símbolo *HIV* e *LOV*, garante que a ddp aplicada é inferior a 3 V na posição OUT ou inferior a 600 mV na posição IN. Esta opção é importante quando se lê a resistência de componentes sensíveis à ddp, como para a generalidade dos semicondutores. Neste caso, usando o selector em IN (*LOV*), garante-se que a tensão aplicada é inferior a 0.6 V, e por isso inferior à ddp de polarização da generalidade dos semicondutores.

Quando se faz uma medição de ddp ou corrente deve seleccionar-se sempre primeiro a escala de maior alcance para de seguida comutar para a escala que nos permite ter o maior número de algarismos significativos.

Dois fusíveis, um para correntes baixas (<2 A) e outro para correntes mais elevadas (≥ 2 A), protegem estes aparelhos de correntes excessivas.

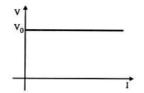
APÊNDICE 3

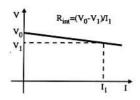
Fontes de Tensão e de Corrente Eléctrica

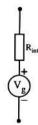
Fonte de tensão

U ma fonte de tensão é um dispositivo que estabelece uma diferença de potencial aos seus terminais, independente da resistência do circuito que alimenta, ou seja, independente da corrente debitada. Por isso uma fonte de tensão ideal não tem resistência interna. As fontes regis entresas

interna. As fontes reais apresentam sempre uma resistência interna ainda que possa ser muito pequena (algumas vezes de apenas $1\ m\Omega$). Os gráficos apresentam as curvas características de uma fonte ideal e de uma fonte real com indicação da forma de calcular a sua resistência interna.







Uma fonte de tensão pode ser alterna ou contínua, consoante a tensão fornecida varia ou não com o tempo. Uma fonte de tensão real é representada pelo modelo do esquema ao lado em que os símbolos \bullet \bullet \bullet ou \bullet \bullet representam uma fonte ideal. Aş fontes que fornecem ddp variável no tempo são igualmente designadas por geradores de sinais.

Na apresentação de uma fonte de tensão, quando não se menciona o valor da sua resistência interna, então ela deve ser considerada como ideal.

São exemplos dos dois tipos de fonte de tensão:



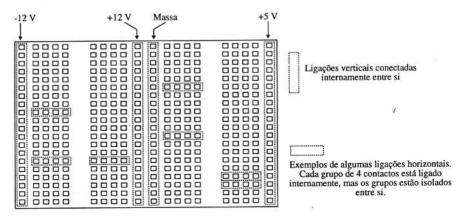
- CONTÍNUA as pilhas (símbolo representado ao lado), as fontes «electrónicas» em que a ddp é obtida a partir da rectificação e alisamento de uma ddp alterna.
- ALTERNA os dínamos, a tensão fornecida pela EDP (rede de distribuição de electricidade), geradores.

Existem muitos tipos de fonte de tensão contínua que podem ser usados no laboratório. Um modelo adequado deve ter as ddp de mais frequente utilização como sejam duas tensões de $\pm\,5$ V e duas ddp de saída simétricas e reguláveis V_p , isto é, quando uma é +V_p a outra é -V_p. O ajuste sendo feito com o mesmo potenciómetro permite a variação entre 0 V e $\pm\,12$ ou $\pm\,15$ V, diferenças de potencial necessárias para alimentar transístores e amp op. As saídas da fonte devem situar-se na parte anterior, assinalada a vermelho a positiva, a azul a negativa e os terminais ligados à massa (0 V de referência) a preto.

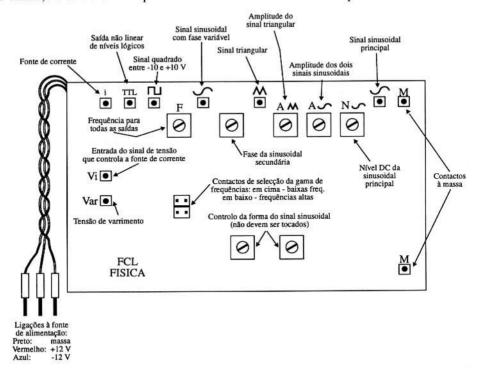
A estas fontes pode estar associada uma base de contactos que permite montar protótipos de circuitos eléctricos. Nesta base podem ter-se igualmente disponíveis

258

as ddp referidas. Os contactos eléctricos destas placas são em geral como os definidos na figura, tendo sido feita uma escolha arbitrária para as linhas de alimentação.



Existem igualmente muitos tipos de fonte de tensão variável no tempo (geradores de sinais). Damos o exemplo de uma fonte construída no Departamento de Física da



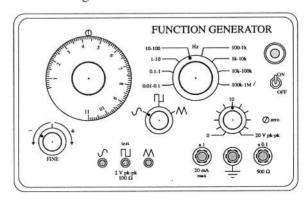
Faculdade de Ciências de Lisboa¹ que pode fornecer duas ddp sinusoidais (principal e secundária), uma ddp triangular e duas ddp quadradas, todas com frequência ajustável

Gerador de Funções, V. S. Oliveira e J. Sousa Lopes, Gazeta de Física 8 n.º 4 (1985), p. 136-139.

entre 5 Hz e 50 kHz. A amplitude das funções triangulares e sinusoidais é ajustável entre 0 e 10 V. A fase da onda sinusoidal secundária, para uma frequência vizinha de 1 kHz, pode variar entre 0 e 180° relativamente às restantes ondas. Uma das funções quadradas tem uma amplitude fixa de ± 5 V e a outra regulável entre 0.1 e 4.5 V. Um nível de

tensão contínuo pode ser adicionado à ddp sinusoidal principal. O controlo externo da frequência permite obter um gerador de varrimento. A figura da página anterior explicita as saídas bem como os potenciómetros de controlo e o selector de frequência.

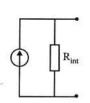
A figura ao lado ilustra um gerador de sinais comercial.



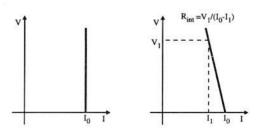
Fonte de corrente

Uma fonte de corrente ideal fornece uma corrente cujo valor não depende da ddp aos seus terminais, porque têm uma resistência interna infinita. As fontes de corrente reais não mantêm a ddp constante porque apesar de terem uma resistência elevada, esta não

é infinita. Os gráficos apresentam as curvas características de uma fonte ideal e de uma fonte real, com indicação da forma de calcular a sua resistência interna.



As fontes de corrente podem ser de corrente contínua ou de corrente variável no tempo. Uma



fonte de corrente real representa-se pelo modelo da figura em que o símbolo representa uma fonte de corrente ideal.

São exemplos de fontes de corrente a célula fotovoltaica, fotodíodos e o transístor. O gerador de sinais descrito anteriormente inclui uma fonte de corrente que pode ser constante ou variável no tempo. A corrente é proporcional à tensão aplicada ao terminal de controlo V_i do esquema do referido gerador. O coeficiente de proporcionalidade é 1 mA/V = 1 m Ω^{-1} . A corrente fornecida está em fase com a ddp aplicada e pode variar no intervalo [-10 mA, 10 mA].

As fontes de corrente mais vulgares que existem comercialmente são capazes de fornecer uma corrente máxima de 0.5 A. Existem outras fontes que fornecem correntes de 3 ou 6 A dentro de custos ainda razoáveis.



APÊNDICE 4

Medidores de Comprimento

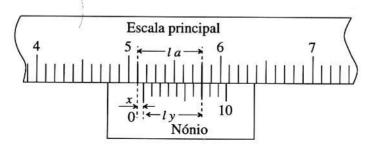
Nónio

 \mathbf{P} ara se obter na medição de comprimentos com uma régua graduada uma precisão superior a meia divisão da escala principal associa-se a esta uma segunda régua deslizante, o nónio. No nónio estão marcadas n divisões cujo comprimento é equivalente ao de n-1 divisões da escala principal. Desta forma, cada divisão do nónio y é menor que o comprimento de uma unidade a da escala principal, e o seu valor é dado por

$$ny = (n-1)a$$
 ou $y = \frac{n-1}{n}a$

A marca zero do nónio designa-se por LINHA DE FÉ do nónio.

Quando se mede um comprimento que não coincide exactamente com uma divisão da régua, o valor da grandeza será um número inteiro de divisões da escala principal mais uma fracção de divisão a determinar. A figura ampliada de uma escala milimétrica exemplifica esta situação.



Se a régua tiver associado um nónio, x pode ser estimado com maior precisão observando o ponto em que uma divisão do nónio coincide com uma divisão da escala. Suponhamos que isso ocorre para a divisão l do nónio. Nesse ponto tem-se uma igualdade de dois comprimentos (indicados na figura), um que é dado por la na escala principal, e o outro que é x+ly no nónio. Assim, atendendo ao valor das divisões do nónio, tem-se

$$x = l - \frac{a}{n}$$

Tudo se passa como se o nónio amplificasse a escala principal, dividindo a unidade *a* em *n* subdivisões, mas evitando o incómodo da leitura de um tão grande número de traços numa escala (alguns sistemas de medida possuem por exemplo uma lupa). Devese no entanto salientar que o nónio não permite obter uma precisão superior àquela com que os próprios traços das escalas são marcados. Por isso os nónios mais vulgares têm 10 ou 20 divisões, encontrando-se ainda nónios de 50 divisões.

No exemplo da figura temos um comprimento L com um valor entre 51 mm e 52 mm. Sem o auxílio do nónio ele seria medido como L=52 mm. Com o auxílio do nónio, o resultado da medição passa a ser L=51.7 mm. Este valor é obtido pela soma do número exacto de divisões na régua (51 mm) com a leitura do nónio de l=0.7 mm. O valor obtido é preciso à décima de milímetro.

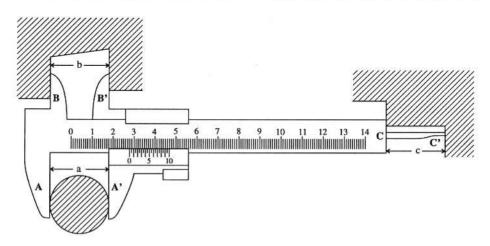
A razão $\frac{a}{n}$ é designada por NATUREZA DO NÓNIO e é o menor comprimento que se pode medir exactamente com o nónio adaptado à régua. A situação mais vulgar é ter a=1mm e os nónios serem de décimas (n=10) ou de vigésimas (n=20). O erro de leitura com um nónio é metade da divisão da escala principal dividido pelo número de divisões do nónio, $\Delta L = \frac{a}{2n}$. No exemplo da figura a unidade da escala principal é o milímetro e o nónio é de décimas, pelo que o erro vale $\Delta L = 0.05$ mm. A expressão correcta das leituras efectuadas com e sem nónio são respectivamente

$$L = 51.70 \pm 0.05 \text{ mm}$$
 e $L = 52.0 \pm 0.5 \text{ mm}$

Com o nónio a precisão é dez vezes superior.

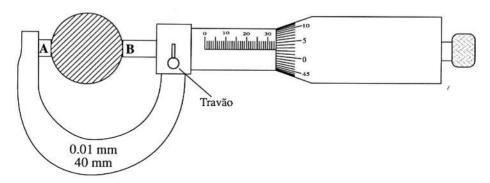
Craveira

A craveira é usada para medir diâmetros externos, diâmetros internos e profundidades. Para esse efeito, a craveira dispõe de três anteparos ABC rigidamente ligados à escala principal e que servem de referência. Os anteparos móveis A'B'C' devem coincidir perfeitamente com os fixos, na leitura do zero da escala. Para que estes bordos não se des-



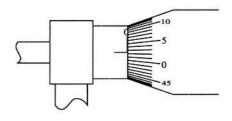
gastem com o tempo, o material da craveira deve ser um metal duro. Para medir diâmetros externos (a) usa-se a parte inferior dos anteparos AA' e para os internos (b) a parte superior BB'. Para medir profundidades (c) faz-se deslizar o espigão C'. Para uma craveira (como a da figura) com a escala principal em milímetros e com um nónio de vigésimas associado, a precisão da medida é de 0.025 mm.

Micrómetro ou palmer



Um micrómetro ou *palmer* é um instrumento mecânico que permite medidas precisas de pequenos comprimentos ou espessuras. Como se vê na figura a escala principal gravada num cilindro tem associada uma manga com 50 divisões, que se desloca ao longo da escala principal por rotação. Este sistema de escalas está solidário com duas esperas (A e B na figura). Uma rotação completa da manga corresponde a uma abertura das esperas de 0.5 mm, e portanto cada divisão deste tambor vale 0.01 mm. O comprimento a medir é colocado entre as esperas e à leitura da escala principal deve adicionar-se o número de divisões da manga que passem o zero. Neste tipo de instrumento devemos ter em atenção se o zero do tambor coincide com o zero da escala principal quando as

esperas estão em contacto. No caso de isto não suceder temos um erro sistemático na medida, conhecido por ERRO DO ZERO. No entanto este erro não afectará o resultado final desde que ele seja medido e depois subtraído ou somado conforme o zero da manga está adiantado ou atrasado em relação à escala principal. Os comprimentos medidos com este aparelho possuem grande precisão. O erro de leitura no caso do *palmer* exemplificado é de 0.005 mm.



Com uma régua normal graduada em milímetros o erro de leitura é 0.5 mm, donde com o *palmer* a medida ser 100 vezes mais precisa.



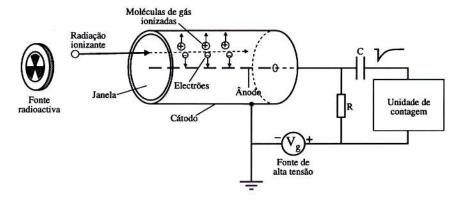
APÊNDICE 5

Detector Geiger-Muller

detector de Geiger-Muller baseia-se na propriedade ionizante das radiações para as detectar. Em geral é um tubo cilíndrico metálico que encerra no seu interior um gás, por exemplo argon, e um eléctrodo positivo, o ânodo, que está ligado a um circuito eléctrico exterior. O invólucro metálico serve de eléctrodo a potencial zero (cátodo). Numa das bases do cilindro o metal é substituído por um material menos absorvente (mica ou grafite) e esta base designa-se por janela do detector que deve estar virada para a fonte radioactiva.

As radiações detectadas por este tipo de detector são as partículas carregadas alfa e beta e mesmo a radiação X e gama de baixa energia. Estas partículas, ao interactuarem com a matéria, provocam a ionização dos átomos, i.e., arrancam um electrão (carga negativa) ao átomo, transformando-o numa carga positiva (ião +). O electrão é então atraído para o ânodo, positivo, não se recombinando com o ião que se deslocará para o eléctrodo a potencial zero (cátodo), embora mais lentamente por ser mais pesado que o electrão. A ionização primária é sucedida de outras ionizações em maior ou menor número consoante o campo eléctrico que existe em torno do ânodo. Cria-se assim, um sinal eléctrico porque os electrões ao atingirem o eléctrodo positivo provocam um abaixamento do potencial deste. O sinal desaparece quando o ião atinge o cátodo, uma vez que a ddp original é restabelecida. O tempo típico de formação do sinal é de 2×10^{-4} s. Este sinal eléctrico permite assim a detecção da radiação que atravessa o detector. O valor da ddp define o tipo de detector. Só se obtém um detector Geiger quando a amplitude do sinal é independente da ddp aplicada ao ânodo.

Um sistema completo de detecção Geiger-Muller é constituído pelo detector, uma fonte de alta tensão para polarizar o ânodo a um potencial conveniente e um sistema de



contagem. Na figura apresenta-se o esquema de um sistema de detecção com a descrição dos efeitos da passagem da radiação através do detector e o processo de formação do sinal eléctrico resultante. A capacidade C tem por função filtrar do sinal de saída a tensão contínua aplicada ao ânodo. O sinal obtido, de centenas de milivolt,

pode ser observado ao osciloscópio ou contado num contador digital. Por vezes a presença da radiação é manifestada através de um sinal sonoro. Como os contadores em geral aceitam apenas sinais positivos, e o sinal gerado é negativo, existe um inversor de sinal entre o detector e o contador. O detector de Geiger-Muller limita-se a revelar se existe ou não uma radiação, sendo incapaz de medir a sua energia ou qualquer outra característica.

APÊNDICE 6

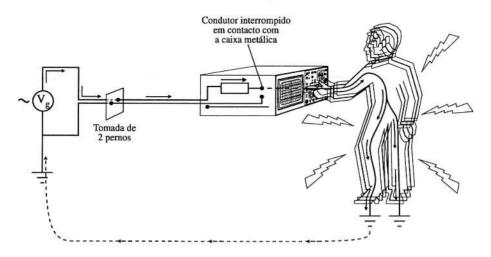
Segurança no Laboratório

As regras de segurança que vamos enumerar devem verificar-se no laboratório ou em qualquer outro local onde existam instalações e aparelhos eléctricos, produtos químicos perigosos, substâncias radioactivas, equipamentos mecânicos especiais ou radiações não ionizantes.

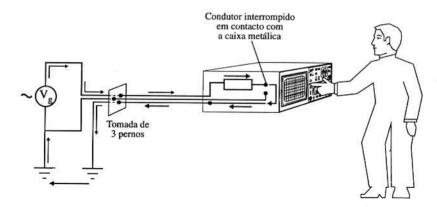
Normas para equipamento eléctrico

Os equipamentos eléctricos devem ter sempre ligação à terra (massa ou *ground*). Esta ligação garante-se nas tomadas com três pernos. Se os aparelhos não tiverem este tipo de tomada deve improvisar-se uma massa ligando um fio de cobre do aparelho a uma tomada de terra. Não se deve usar a ligação a canos de água pois hoje em dia as canalizações são de material plástico.

Na realidade, quando um aparelho não possui ligação à terra, se por qualquer razão se quebra ou se põe em contacto com a caixa do aparelho um ponto do circuito, a caixa carrega-se electricamente e ao tocarmos nela teremos a conhecida sensação de choque eléctrico. O nosso corpo, sendo condutor, fecha o circuito e permite a descarga do aparelho para a terra. Com uma ligação feita à terra, a descarga processa-se através dela e não há perigo de choque. Ambas as situações estão exemplificadas nas figuras seguintes.



A sensação de choque, ou em caso extremo a morte, é devida ao facto do nosso corpo apresentar uma resistência eléctrica que pode variar entre 100 e 10^6 Ω conforme as situações. A resistência eléctrica é mínima no caso de termos a pele húmida e máxima quando calçamos ténis ou sapatos de sola de borracha espessa. O que provoca o dano



nos tecidos e no coração é a intensidade da corrente eléctrica que passa, donde o valor da ddp não ser determinante no acidente mas sim o estado de conductibilidade do corpo.

Vejamos quais os efeitos físicos consoante a intensidade da corrente

Intensidade da corrente (mA)	Efeito físico
I < 1	Ligeiro formigueiro
1 < I < 10	Sensação de choque
10 < I < 20	Espasmos musculares impedindo o indivíduo de se afastar do ponto de contacto
I ≈ 200	Pode ser fatal conforme exista fibrilação do coração ou para- gem cardíaca. No segundo caso, se for rapidamente interrom- pida a corrente ou reanimada a pessoa, o coração pode retomar o ritmo normal
I > 200	Fatal na maioria dos casos

Resumo das principais regras de segurança relativamente a circuitos eléctricos:

- Tomadas com ligação de terra;
- Sapatos de ténis ou com sola de borracha. As solas de borracha são aconselháveis no laboratório, pois para além de isolantes eléctricos evitam escorregar;
- Sinalizadores de fontes de alta tensão e correntes fortes;
- Não manusear o equipamento eléctrico com as mãos molhadas.

Normas para equipamento mecânico

No laboratório deve ter-se um cuidado especial quando se utilizam equipamentos cortantes ou se deslocam grandes peças recorrendo a grua ou guindaste. Esta última situação não ocorre num laboratório universitário didático, mas pode ocorrer sempre que se frequenta a oficina ou laboratórios de investigação. Para minimizar o efeito de um acidente devem usar-se luvas espessas quando se manuseiam objectos cortantes ou de superfície rugosa e usar capacete no caso de deslocamento de objectos pesados.

Normas para produtos químicos

Todos os produtos químicos que, por uma ou outra razão, sejam perigosos não devem circular livremente no laboratório. Devem estar colocados num armário com etiquetas correspondentes à sua perigosidade: tóxico, venenoso, explosivo, corrosivo, inflamável, etc.

Outros produtos, como os gases liquefeitos a temperaturas muito baixas, não devem ser postos em contacto com nada, a não ser com os recipientes que lhe são destinados. Se bem que o contacto instantâneo de alguns deles com a pele (ar ou azoto líquido) não seja perigoso, deve ser evitado.

Os gases comprimidos exigem cuidados especiais no que respeita a abertura de válvulas, que devem ser sempre abertas lentamente e sob controlo de manómetros. O deslocamento dos tubos, que devem estar ligados à parede ou a um suporte, deve ser reduzido ao mínimo porque em geral são muito pesados.



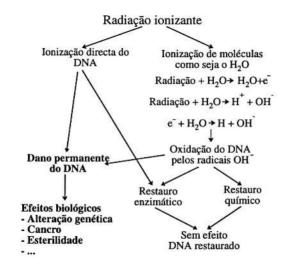
Tóxico



Inflamável

Normas para produtos radioactivos e radiações ionizantes

Os efeitos prejudiciais da radioactividade são devidos à capacidade ionizante das partículas (protões, electrões, alfa, etc.), radiação X e gama. Assim ao atravessarem os tecidos ionizam em especial a água de que somos feitos, provocando a formação de radicais livres perigosos e/ou concentrando energia podem provocar a queimadura dos tecidos.



O efeito das radiações depende do tipo de radiação, da sua energia e do tipo de orgão afectado. Os quadros que seguem resumem estas accões.

Tipo de Radiação	Factor de perigo
Raios X (E ≈ 200 keV)	1
Radiação gama	1
Electrões	1
Protões	10
Partículas alfa	10 a 20
Neutrões lentos	3
Neutrões rápidos	10

Parte do corpo afectada	Dose máxima (Sv/ano)
Medula óssea, gónadas	0.005
Pele, ossos, tiróide	,0.03
Mãos, braços, pés	0.075
Outros	0.015

O significado das unidades referidas nos quadros pode ser consultado na secção das Tabelas.

As fontes radioactivas que existam num laboratório didáctico devem ser de baixa actividade, encapsuladas em materiais rígidos e não porosos (alumínio ou plástico). Devem estar sempre assinaladas com o símbolo de radioactividade e quando em uso deve existir uma protecção de chumbo entre elas e o utilizador. As fontes devem ser arrumadas em cofres de chumbo fechados. No laboratório deve haver um monitor de radiações do tipo Geiger.

No ambiente existe uma radioactividade de que não nos podemos libertar, desde a radiação cósmica essencialmente constituída por muões (partículas como os electrões só que cerca de



Materiais radioactivos

300 vezes mais pesados), ao ⁴⁰K, isótopo radioactivo do potássio vulgar que faz parte do cimento (areia) usado na construção e que é igualmente constituinte dos ossos. A tabela dá um resumo de como cada fonte radioactiva natural contribui para a radioactividade ambiente.

Origem da radiação	Dose (µSv/ano)
Natural	
Raios cósmicos	440
Radioactividade terrestre e atmosférica	400
Radioactividade interna do corpo	180
Tecnológica	
Diagnóstico médico	740
Centrais nucleares e ensaios nucleares	40

A radiação ultravioleta, que faz a fronteira entre radiações electromagnética ionizante e não ionizante, é muito perigosa para os olhos. Quando se trabalha com este tipo de radiação é obrigatório o uso de óculos especiais.

Normas para emissores de radiação não ionizante

Laser

Num laboratório com laser, este deve estar sempre assinalado. O símbolo que indica a presença de um laser é o indicado na figura. Se este for de baixa potência, isto é, com 0.5 ou 1 mW, o seu funcionamento não impede a presença de pessoas na sala, mas NUNCA se deve olhar directamente para o ponto emissor de luz. Se o laser for de alta potência, quando em funcionamento não se pode estar na sala, a não ser que o feixe de luz esteja completamente isolado do meio ambiente.



Micro-ondas

A água é um bom absorvedor de micro-ondas e a energia que recebe destas provoca a sua ebulição. Este é um facto muito conhecido desde que os fornos de micro-ondas chegaram a quase todas as cozinhas. Mas como também somos feitos de 75% de água é de evitar a exposição dos nossos tecidos a estas radiações para que não sejamos o nosso próprio almoço.

Regras gerais em relação a todos os perigos

- Conhecer os possíveis perigos.
- Não estar sozinho num laboratório.
- Não trabalhar em estado de cansaço.
- Exigir a existência no laboratório de um caixa de primeiros socorros devidamente assinalada.
- Estar atento e cumprir todas as sinalizações.





Expressões Matemáticas

POTÊNCIAS DE DEZ E NOTAÇÃO CIENTÍFICA

Em física existem grandezas de dimensões muito pequenas, como a dimensão de um núcleo atómico (10 -15 m), e muito grandes como a distância média da Terra ao Sol (10 +11 m). Para não sermos obrigados a escrever números com muitos algarismos recorrese à representação em termos de potências de dez, designada por notação científica.

```
10^9 = 1\ 000\ 000\ 000

10^3 = 1000

10^2 = 100

10^0 = 1

10^{-1} = 0.1

10^{-3} = 0.001

10^{-9} = 0.000000001

Raio da Terra = 6 378 000 m = 6.378×10<sup>6</sup> m

Raio do Átomo de Hidrogénio = 0.000 000 0529 m = 5.29×10<sup>-11</sup> m
```

POTÊNCIAS E LOGARITMOS

$$\frac{1}{y^n} = y^{-n}$$

$$y^n y^m = y^{n+m}$$

$$\frac{y^n}{y^m} = y^{n-m}$$

$$(y^n)^m = y^{nm}$$

$$\sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$$

Logaritmo decimal

$$y = 10^x$$
 ou $x = \log y$
 $\log xz = \log x + \log z$
 $\log \frac{x}{z} = \log x - \log z$
 $\log x^a = a \log x$

Logaritmo natural ou neperiano

$$y = e^x$$
 ou $\ln y = x$

Relação entre os dois tipos de logaritmos:

$$\ln y = \ln (10^{\log y}) = \ln 10 \times \log y \approx 2.3026 \log y$$

Logaritmo na base a

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

PERÍMETROS. ÁREAS E VOLUMES

Perímetro da circunferência de rajo r

$$P = 2\pi r$$

Triângulo de base b e altura h $A = \frac{1}{2}$ bh

Área do círculo de raio r

$$A = \pi r^2$$

Cubo de aresta l

$$A = 6l^2 \qquad V = l^3$$

$$V = abc$$

Paralelipípedo de arestas a,b,c

Cilindro de raio r e altura h

Esfera de rajo r

$$A=4\pi r^2 \qquad V=\frac{4}{3}\ \pi r^3$$

 $V = \pi r^2 h$

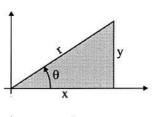
FUNCÕES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS DO ÂNGULO θ

sen
$$\theta = \frac{\text{lado oposto de } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{lado adjacente de } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{r}$$

$$tg \ \theta = \frac{lado \ oposto \ de \ \theta}{lado \ adjacente \ de \ \theta} = \frac{y}{x}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$
 $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$



$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

$$\cos x + \cos y = 2 \left[\cos \frac{1}{2} (x - y) \cos \frac{1}{2} (x + y)\right]$$

$$\cos x - \cos y = 2 \left[\sec \frac{1}{2} (x - y) \sec \frac{1}{2} (x + y) \right]$$

sen x + sen y =
$$2 \left[\cos \frac{1}{2} (x - y) \operatorname{sen} \frac{1}{2} (x + y) \right]$$

$$sen x - sen y = 2 \left[sen \frac{1}{2} (x - y) cos \frac{1}{2} (x + y) \right]$$

$$cos (x + y) = cos x cos y - sen x sen y$$

$$cos (x - y) = cos x cos y + sen x sen y$$

$$sen (x + y) = sen x cos y + cos x sen y$$

$$sen (x - y) = sen x cos y - cos x sen y$$

$$2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen} (x+y) + \operatorname{sen} (x-y)$$

$$2\cos x \cos y = \cos (x+y) + \cos (x-y)$$

$$2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos (x - y) - \cos (x + y)$$

$$sen 2x = 2 sen x cos x$$

 $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 y$

$$sen^2 x + cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$sen^2 x = \frac{1}{2} (1 - cos 2x)$$

DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots \text{ se } n < 0 \text{ para } x^2 < 1 \text{ e } x = 1$$

$$(1-x)^{-n} = 1 - nx + \frac{n(n+1)x^2}{2!} - \frac{n(n+1)(n+2)x^3}{3!} + \dots$$
 se $x^2 < 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$
 para x real

sen
$$x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$
 para x real

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$
 para x real

$$\log (1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots$$
 $x^2 < 1$ e $x = 1$

$$\log (1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right]$$
 $x^2 < 1 \text{ e } x = 1$

DERIVADAS

Nas fórmulas u e v são funções de x, a e n são constantes reais.

$$\frac{da}{dx} = 0$$

$$\frac{dx}{dx} = 1$$

$$\frac{d(au)}{dx} = a \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du^n}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\log_a u)}{dx} = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\ln u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{de^{u}}{dx} = e^{u} \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\text{sen u})}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(\cos u)}{dx} = - \sin u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(tg u)}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$$

INTEGRAIS

Nas fórmulas u e v são funções de x, a e n são constantes reais.

$$\int a dx = ax$$

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$\int (u + v) dx = \int u dx + \int v dx$$

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{excepto para } n = -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x$$

NÚMEROS COMPLEXOS

z=a+bj é um número complexo, a e b são reais e $j=\sqrt{-1}$ é a unidade imaginária. O primeiro termo (a) é designado por parte real e o segundo (bj) por parte imaginária.

A propriedade fundamental da unidade imaginária é a seguinte:

$$j \times j = j^2 = -1$$

Todas as operações algébricas podem ser efectuadas com números complexos

$$(a + bj) \pm (c + dj) = (a \pm c) + (b \pm d)j$$

 $(a + bj) (c + dj) = (ac-bd) + (bc + ad)j$

$$(a + bj) (c + dj) = (ac-bd) + (bc + ad)j$$

$$\frac{a+bj}{c+dj} \ = \frac{(a+bj) \ (c-dj)}{(c+dj) \ (c-dj)} \ = \ \frac{(ac+bd) + (bc-ad)j}{c^2+d^2}$$

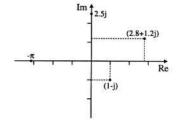
O complexo conjugado de z = a + bj representa-se por z^* e é igual a

$$z^* = a - bj$$

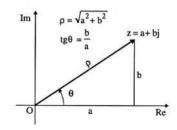
O módulo de um número complexo, z = a+bj, é o produto dele pelo seu conjugado,

$$|z| = |a + bi| = (a + bi)(a - bi) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Pode representar-se graficamente um número complexo a + bj. Para tal, traça-se um sistema de eixos prependiculares em que o vertical é o eixo imaginário e o horizontal o real. No gráfico junto estão representados três números imaginários e um real.



Nos cálculos com números complexos, é por vezes cómodo interpretá-los em termos de vectores definidos pela origem dos eixos e pelo ponto (a,b). Na figura representa-se o complexo a + bj e o vector correspondente. Existem todavia diferenças essenciais entre vectores e números complexos. Aqui os vectores são apenas uma representação geométrica.



O ponto de coordenadas (a,b) fica igualmente definido a partir do comprimento ρ do vector e do ângulo θ que este faz com um dos eixos, como se pode ver na segunda figura; a partir dela também se pode estabelecer ρ e θ em função de a e b

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad e \quad \theta = tg^{-1} \frac{b}{a}$$

Esta formulação designa-se por representação trigonométrica dos números imaginários, os números imaginários podem ser expressos do seguinte modo:

$$z = a + bj = \rho (\cos \theta + j \sin \theta)$$

Existe um teorema que permite escrever um número complexo sob a forma exponencial.

$$e^{j\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

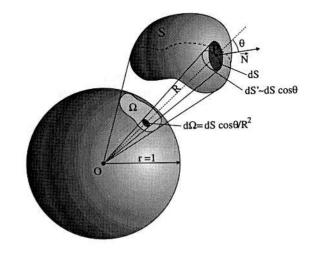
de modo que $z = a + bj = |z| e^{j\theta} = \rho \cos \theta + j\rho \sin \theta$

Separando o número complexo em parte real e imaginária tem-se: $Re (\rho e^{j\theta}) = \rho \cos \theta$ e $Im(\rho e^{j\theta}) = \rho \sin \theta$.

NOÇÃO DE ÂNGULO SÓLIDO

O espaço incluído na superfície cónica que projecta uma superfície S a partir de um ponto exterior O, define o ângulo sólido da superfície. O ângulo sólido mede-se pela superfície Ω que resulta da intersecção do cone de raios projectantes com a superfície de uma esfera de raio unitário, como se ilustra na figura. Para um elemento de área dS à distância R de O e com a normal \vec{N} a fazer um ângulo θ com a direcção projectante OP, o elemento de ângulo vem

dado por d
$$\Omega = \frac{dS'}{R^2} = \frac{\cos\theta \ dS}{R^2}$$
 .



280

A esfera de raio unitário tem uma área de 4π pelo que todo o espaço ocupa um ângulo sólido de 4π esterradiano.

Sistema Internacional de Unidades (SI)

ŒFIAUS D	OS MULTIPI	LUS E SC	BMÚLTIPLO	S DE UNH	JADES
yota	10^{24}	Y	deci	10-1	d
zeta	1021	\mathbf{Z}	centi	10^{-2}	c
exa	1018	E	mili	10^{-3}	m
peta	1015	P	micro	10^{-6}	μ
tera	1012	T	nano	10^{-9}	n
giga	109	G	pico	10^{-12}	p
mega	106	M	fento	10^{-15}	f
kilo	10^{3}	k	ato	10^{-18}	a
hecto	102	h	zepto	10^{-21}	Z
deca	101	da	yocto	10^{-24}	У.

DESIGNAÇÃO DE NÚMEROS GRANDES

	Em geral	USA
106	milhão	milhão
109	mil milhões	bilião
1013	bilião	trilião

GRANDEZA	DIMENSÃO	UNIDADE
comprimento	L	m (metro)
massa	M	kg (kilograma)
tempo	T	s (segundo)
corrente eléctrica	I	A (ampere)
temperatura	Θ^*	K (kelvin)
quantidade de matéria	N*	mol (mole)
intensidade luminosa	J*	cd (candela)

^{*} esta notação para a dimensão não deve ser confundida com as designações mais correntes de θ para ângulo, N para a unidade de força newton e J para a unidade de trabalho joule.

Grandeza de Base Nome (Símbolo)	Unidade de Base Nome (Símbolo)	Dimensão de Base	Definição (data de adopção)
comprimento (l)	metro (m)	L	1m = comprimento do tra- jecto da luz no vazio no tempo de 1/299 792 458 s (1983)
massa (m)	quilograma (kg)	М	1 kg ≤ massa do protó- tipo internacional quilo- grama (1901)
tempo (t)	segundo (s)	T	1s = duração de 9 192 631 770 períodos da radiação da transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de 133Cs (1967)
intensidade de corrente eléctrica (I)	ampere (A)	I	1 A = intensidade de uma corrente constante que mantida em 2 condutores paralelos, rectilíneos, de comprimento infinito, secção circular desprezável e à distancia de 1m no vazio produz uma força de 2x10 ⁻⁷ N/m (1948)
temperatura (T)	kelvin (K)	Θ	1K = 1/273.16 tempera- tura termodinâmica do ponto triplo da água (1967)
quantidade de matéria (n)	mole (mol)	N	a mole é a quantidade de matéria de um sistema contendo tantas entidades elementares quanto os átomos que existem em 0.012 kg de C ¹² (1971)
intensidade luminosa (I _v)	candela (cd)	J	1 cd = intensidade luminosa numa dada direcção de fonte que emite radiação monocromática de frequência 540x10 ¹² Hz e cuja intensidade nessa direcção é 1/683 Wsr ⁻¹ (1979)

¹ Este quadro foi elaborado com base no livro *Sistema Internacional de Unidades* de Guilherme de Almeida referido na bibliografia.

Dimensão de uma Grandeza Física

É possível expressar qualquer grandeza física Y em função das grandezas de base do S.I. (M, T, L, I,...) e esta representação designa-se por EQUAÇÃO DIMENSIONAL.

DIM Y = [Y] =
$$A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} D^{\delta}$$
...

A, B, C e D representam grandezas de base e α , β , γ e δ são os expoentes dimensionais que indicam o número de vezes que a grandeza de base intervém. A dimensão de uma grandeza física derivada representa-se entre parênteses rectos.

Quando existem várias relações matemáticas para a mesma grandeza, deve verificar-se a HOMOGENEIDADE DIMENSIONAL das equações físicas, isto é, quando se igualam as duas equações deve haver igualdade dimensional entre o termo da esquerda e o da direita da equação. Esta homogeneidade pode ajudar na atribuição de dimensão às constantes e a identificar relações matemáticas entre diversas grandezas.

Exemplo 1: A aceleração da gravidade g tem por dimensão LT⁻². Quando obtida a partir do movimento do pêndulo simples tem-se que g é dada a partir de $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Neste caso g tem igualmente, como se esperava, a dimensão de LT⁻² porque 2π é uma constante adimensional.

Exemplo 2: Uma partícula de massa m e carga eléctrica q é sujeita a um campo eléctrico E adquirindo uma aceleração a.

A força «mecânica» em módulo será F = ma e a força eléctrica, também em módulo F = qE. As duas forças são dimensionalmente idênticas. Por um lado

$$[F] = M L T^{-2}$$

e por outro

$$[F] = [Q] [E] = I T^{-1} L^{-1} [V] = I T^{-1} L^{-1} L^{2} M T^{3} I^{-1} = M L T^{-2}$$

como se queria provar.

Exemplo 3: Ao fazer uma experiência sobre a velocidade de propagação *v* de ondas transversais numa corda, verificou-se que esta é dependente da tensão *T* a que a corda está sujeita e da massa *m* da corda por unidade de comprimento. A partir da homogeneidade dimensional é possível estabelecer como a velocidade depende da tensão e da massa.

Assim, $v \in \text{proporcional a } T^a m^b$, $v = kT^a m^b$ em que $k \in \text{uma constante adimensional}$.

Como as dimensões de uma velocidade são $[v] = LT^{-1}$ e a tensão T é uma força logo a sua dimensão será: $[T] = MLT^{-2}$ e a massa por unidade de comprimento tem por dimensão $[m] = ML^{-1}$.

Devido à homogeneidade

[v] =
$$[T]^{\alpha}$$
 [m] ^{β} i.e. LT⁻¹ = $(MLT^{-2})^{\alpha}$ $(ML^{-1})^{\beta}$
Obtendo-se para M $0 = \alpha + \beta$
L $1 = \alpha - \beta$
T $-1 = -2\alpha$
assim, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ e portanto $v = k$ $\sqrt{\frac{T}{m}}$

Exemplo 4: A lei da atracção universal estabelece que a força entre duas massas m e m' a menos da constante G varia na razão inversa do quadrado da distância, i.e., $F = G \frac{mm'}{r^2}$. A partir da homogeneidade dimensional estabelece-se a dimensão de G, que é:

$$[F] = MLT^{-2} = [G]M^2L^{-2}$$
 donde $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$

A constante universal da gravitação tem como valor e unidades: G = 6.67x10-11 m³ kg-1 s-2,

GRANDEZAS E UNIDADES DERIVADAS CORRENTES EM FÍSICA 2

Grandeza Nome (Símbolo)	Unidade SI Nome (Símbolo)	Dimensão de Base	Equação de Definição
área (A)	metro quadrado (m2)	L ²	11.12
volume (V)	metro cúbico (m3)	L^3	$1_1.1_2.1_3$
período (T)	segundo (s)	T	intervalo de tempo no qual um fenómeno pe- riódico efectua um ciclo
frequência (f, v)	hertz (Hz ou s-1)	T-1	f = 1/T
frequência angular (ω)	radiano por segundo (rad s ⁻¹)	T-1	
fase (φ)	radiano (rad)	1	
comprimento de onda (λ)	metro (m)	L	
velocidade (v)	metro por segundo (m s ⁻¹)	LT-I	$v = d\mathbf{r}/dt$
aceleração (a)	metro por segundo quadrado (m s ⁻²)	LT-2	$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$
massa volúmica ou densidade (p)	quilograma por metro cúbico (kg m ⁻³)	ML^{-3}	$\rho = m/V$
força ou peso (F ou P)	newton (N)	MLT ⁻²	F = ma
momento de uma força (M)	metro newton (m N)	ML^2T^{-2}	

² A escrita a carregado assinala o caracter vectorial das grandezas.

GRANDEZAS E UNIDADES DERIVADAS CORRENTES EM FÍSICA² (continuação)

Grandeza Nome (Símbolo)	Unidade SI Nome (Símbolo)	Dimensão de Base	Equação de Definição
momento linear ou quantidade movimento (p)	quilograma metro por segundo (kg m s ⁻¹)	MLT ⁻¹	$\mathbf{p} = \mathbf{m}\mathbf{v}$
momento angular (L)	kilograma metro quadrado por segundo (kg m² s-1)	ML ² T ⁻¹	$L = r \times p$
momento de inércia (I)	quilograma metro quadrado (kg m²)	ML^2	$I = \sum m_i r_i^2$
trabalho (W) energia (E)	joule (J) joule (J)	ML ² T ⁻²	$\mathbf{W} = \mathbf{F}.\Delta\mathbf{r}$
potência (P) temperatura celsius (t)	watt (W) grau Celsius (°C)	ML^2T^{-3}	P = dE/dt t = T - 273.15 K
carga eléctrica (Q,q) campo eléctrico (E)	coulomb (C) volt por metro (V m ⁻¹)	TI MLT ⁻³ I ⁻¹	Q = It E = F/Q
potencial eléctrico, diferença de potencial ou tensão (V)	volt (V)	ML ² T ⁻³ I ⁻¹	V = W/Q
capacidade eléctrica (C)	farad (F)	$M^{-1}L^{-2}T^4I^2$	C = Q/V
resistência (R)	ohm (Ω)	$ML^{2}T^{-3}I^{-2}$	R = V/I
resistividade (ρ) impedância (Z)	ohm metro (Ω m) ohm (Ω)	$ML^{3}T^{-3}I^{-2}$ $ML^{2}T^{-3}I^{-2}$	$\rho = RS/L$
potência eléctrica (P) campo magnético (H)	watt (W) ampere por metro (A m ⁻¹)	$\begin{array}{c} ML^2T^{-3} \\ L^{-1}I \end{array}$	P = VI
indução magnética (B)	tesla (T)	$MT^{-2}I^{-1}$	$F = I\Delta l \times B$
fluxo magnético (Φ)	weber (Wb)	$ML^{2}T^{-2}I^{-1}$	$F = B \cdot S$
indutância (L)	henry (H)	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	$L = \Phi/I$
distância focal (f)	metro (m)	L	
potência de lente (1/f')	por metro (m ⁻¹)	L-1	
actividade (A)	becquerel (Bq)	T-1	A = - dN/dt
constante de desintegração (λ)	por segundo (s-1)	T-1	$\lambda = A/N$
período de semivida (T _{1/2})	segundo (s)	T	$T_{1/2} = \ln 2/\lambda$
dose de radiação absorvida (D)	gray (Gy)	L^2T^{-2}	D = E/m
dose de radiação equivalente (H)	sievert (Sv)	L^2T^{-2}	

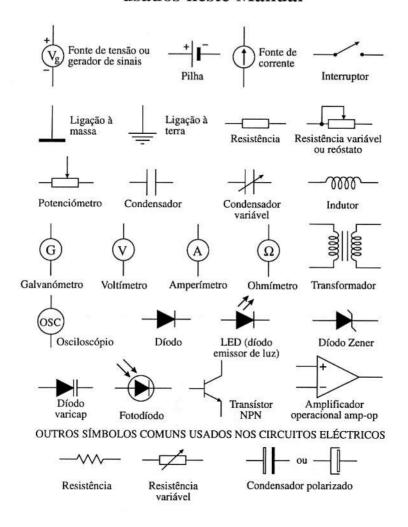
QUANTIDADE	SÍMBOLO	VALOR	UNIDADE	PPM ⁴
carga elementar do protão	e	1.602 177 33	10⁻¹9 C	0.03
número de Avogadro	N_A	6.022 136 7	10 ²³ mol ⁻¹	0.59
velocidade da luz	c	2.997 924 58	108 m s ⁻¹	exacta
constante de Planck	h	6.626 075	$10^{-34} \mathrm{J \ s}$	0.60
constante de Boltzmann	k	1.380 658	10 ⁻²³ J K ⁻¹	8.5
permitividade eléctrica do vazio	ε_{o}	8.854 187 817	$10^{-12} \; \mathrm{F} \; \mathrm{m}^{-1}$	exacta
permeabilidade magnética do vazio	μ_{o}	1.256 637 061	10-6 H m ⁻¹	exacta
massa do electrão	m _e	9.109 389 7	10 ⁻³¹ kg	0.59
		0.510 999 06	MeV/c ²	0.30
massa do neutrão	m_n	1.674 928 6	10 ⁻²⁷ kg	0.59
		939.565 63	MeV/c ²	0.30
massa do protão	m_p	1.672 623 1	10 ⁻²⁷ kg	0.59
	3,600	938.272 31	MeV/c ²	0.30
volume molar do gás ideal (PTN)	V_{mol}	2.241 410	10-2 m ³ mol-1	
constante universal de gravitação	G	6.672 59	$10^{-11} \text{ m}^{3} \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	128
constante dos gases	R	8.314 510	J mol-1 K-1	8.4
π		3.141 592 653		
e		2.718 218 828		

GRANDEZA	NOME	SÍMBOLO	VALOR NO SI
comprimento	1 polegada (inch)	in ou "	0.0254 m
comprimento	1 pé (foot)	ft ou '	0.3048 m
comprimento	1 milha (mile)	mi	1.609×10 ³ m
volume	1 barril (barrel)	-	$\approx 0.120 \text{ m}^3$
comprimento	1 angstrom	Å	10 ⁻¹⁰ m
comprimento	1 fermi	fm	10 ⁻¹⁵ m
força	1 dine	dyn	10⁻⁵ N
energia	1 erg	erg	10⁻ ⁷ J
energia	1 electrão-volt	eV	1.602×10 ⁻¹⁹ J
massa	1 eV/c ²	eV/c ²	$1.783 \times 10^{-36} \text{ kg}$
indução magnética	1 gauss	G ou Gs	10−4 T
temperatura	1 grau Celsius	°C	1 K
actividade	1 curie	Ci	3.7×10 ¹⁰ Bq
carga eléctrica	1 esu	esu	1/2.997 924 58×10°C
pressão	1 atmosfera	atm	1.013 25×105 Nm-2
pressão	760 mm de mercúrio	mm Hg	1.013 25×105 Nm-2
pressão	760 torr	Torr	1.013 25×105 Nm ⁻²
comprimento	1 ano-luz	_	9.460×10 ¹⁵ m
comprimento	1 parsec	pc	$3.084 \times 10^{16} \text{ m}$
energia	1 caloria	cal	4.1868 J
aceleração	1 gal	Gal	10^{-2} m s^{-2}

 $^{^3}$ Handbook of Chemistry and Physics — A ready reference book of chemical and physics data, D R Lide $73^{\rm nd}$ ed. CRC Press 1992-1993.

⁴ Incerteza relativa em parte por milhão.

Símbolos Gráficos para Circuitos Eléctricos usados neste Manual



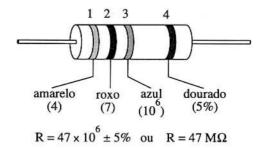
Código de Leitura de Resistências

1 — Resistências de baixa dissipação (P≤ 2W)

Código de cores: 4 riscas coloridas no corpo da própria resistência

cor	risca 1 e 2 1.º e 2.º dígito	risca 3 multiplicador	risca 4 tolerância	
preto	0	100	,	
castanho	1	101	1%	
encarnado	2	102	2%	
laranja	3	103		
amarelo	4	104		
verde	5	105	0.5%	
azul	6	106		
roxo	7	107		
cinzento	8	108		
branco	9	109		
dourado		10-1	5%	
prateado		10-2	10%	
sem cor			20%	

EXEMPLO



2 - Resistências de Média e Elevada Dissipação (P≥2W)

São em geral resistências bobinadas, com suporte cerâmico sobre o qual se enrola um filo metálico. O conjunto é montado dentro de uma estrutura cerâmica de forma paralelipipédica sobre a qual se escreve o valor da resistência e a tolerância. Na escrita a letra R tem a função de vírgula e nas resistências de valor elevado usa-se o prefixo SI escrito em maiúscula no lugar da vírgula.

EXEMPLOS

 $R47 = 0.47 \Omega$, $1R0 = 1.0 \Omega$, $470R = 470 \Omega$, $1K8 = 1.8 k\Omega$, $18K = 18 k\Omega$, $1M8 = 1.8 M\Omega$

Código de Leitura de Capacidades

Nem sempre é fácil ler o valor de uma capacidade escrito pelo fabricante, dependendo muito das dimensões físicas do condensador. Contudo a sinalização do valor não obedece em geral a nenhuma norma como no caso das resistências, dependendo mesmo do fabricante.

CONDENSADORES ELECTROLÍTICOS são em geral de dimensão suficiente e o valor da capacidade vem escrito normalmente.

Por exemplo: +500MF em que o sinal + significa polaridade (a respeitar) e MF significa microfarad.

EXEMPLOS de algumas regras seguidas por vezes nos condensadores de reduzidas dimensões Tipo Tântalo: cilíndricos e prateados. Uma notação do tipo $+4R7\mu$ significa $4.7~\mu$ F ou +475K é o mesmo que $47x10^5~\mu$ F $\pm 10\%$ de tolerância.

Como os valores das capacidades são pequenos, em geral referenciados em relação ao μF , quando aparecem dezenas ou centenas em geral são pF.

Tipo Mylar: cilíndricos e amarelos, uma notação do tipo 0.1MFD pode representar 0.01 μF

Tipo Cerâmico: formato de bolacha

Disco	Z5U	Z5U	tipo
	.02M	560	.02 μ F e 560 pF M ~ 20% de tolerância
	1 kV	1 kV	tensão máxima que suportam
Cubo	CK05		St. 1851
	101K		100 pF K ~ 10% de tolerância
	200V		tensão máxima que suportam.

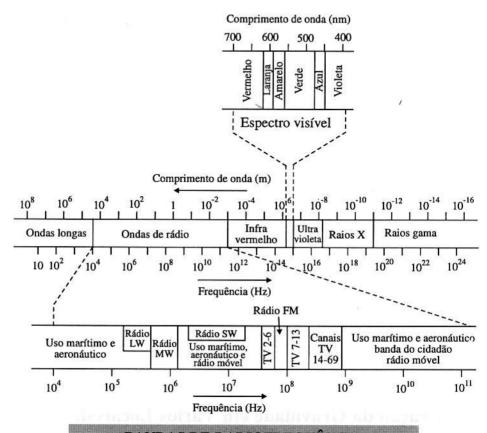
Aceleração da Gravidade em Vários Locais da Terra (ao nível do mar)

LOCAL	LATITUDE	g (m s ⁻²)
Equador	0.00°	9.780 31
Lisboa	38.71°	9.800 54
Greenwich	51.44°	9.811 70
S. Pittesbourg	59.95°	9.819 30
Pólo Norte	90.00°	9.832 32

 $g = (9.806\ 12 - 0.025\ 865\ \cos2\varphi + 0.000\ 058\ \cos^22\varphi - 0.000\ 00308h)\ m\ s^{-2}$

φ – latitude geográfica, h – altitude

Espectro de Frequência das Ondas Electromagnéticas



BANDAS DE RADI	OFREQU	UEN	CIA
FM (Frequency Modulation)	88	a	108 MHz
SW (Short Wave)	2.3	a	22 MHz
MW (Medium Wave)	525	a	1625 kHz
LW (<u>L</u> ow <u>W</u> ave)	150	a	350 kHz

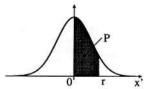
_		_
1	0	^
1	ų	()

		COR E C	OMPRIME	ENTO DE	ONDA	
cor	violeta	azul	verde	amarelo	laranja	vermelho
c.d.o (nm)	<435	435-490	490-570	570-595	595-605	>605

Tabela de Probabilidade da Distribuição Normal Reduzida

Probabilidade P $\left(0 < \frac{x - \mu}{\sigma} < r\right)$ de um valor se situar entre a média e r desvios padrão

 $\begin{aligned} P_{bilateral} &= 2P \\ P_{monolateral} &= P \! + \! 0.5 \end{aligned}$



0.0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000				0.10	0.05	0.00	0.07	0.00	0.09
		0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
28/65/98	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
18090000	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.0000000000000000000000000000000000000	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
37.75.75.	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
10009846	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
105340000	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
1000000	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
- 1	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
000000000000000000000000000000000000000	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
1574375	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
200000	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
0.00	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
1. The state of th	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000
4.0 (0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

A coluna vertical dá o valor até às décimas e a horizontal as centésimas.

Tabela de Probabilidade da Distribuição t de Student

Valores críticos de t para vários graus de confiança e número de graus de liberdade

P _{hilateral} P _{monolateral}	0.200	0.400 0.700	0.600	0.800	0.900	0.960	0.980 0.990
n *					namanan an	101001000000	20000202020
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	15.895	31.820
2 3	0.289 0.277	0.617 0.584	1.061 0.978	1.886	2.920 2.353	4.849	6.965
4	0.271	0.569	0.978	1.638 1.533	2.333	3.482 2.999	4.541 3.747
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.757	3.365
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.612	3.143
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.517	2.998
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.449	2.896
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.398	2.821
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.359	2.764
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.328	2.718
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.303	2.681
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.282	2.650
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.264	2.624
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.249	2.602
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.235	2.583
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.224	2.567
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.214	2.552
19 20	0.257	0.533 0.533	0.861 0.860	1.328 1.325	1.729 1.725	2.205 2.197	2.539
21	0.257	0.533	0.859	1.323	1.723	2.197	2.528 2.518
22	0.256	0.532	0.858	1.323	1.721	2.183	2.508
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.177	2.500
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.172	2.492
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.167	2.485
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.162	2.479
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.158	2.473
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.154	2.467
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.150	2.462
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.147	2.457
31	0.256	0.530	0.853	1.309	1.696	2.144	2.453
32	0.255	0.530	0.853	1.309	1.694	2.141	2.449
33	0.255	0.530	0.853	1.308	1.692	2.138	2.445
34	0.255	0.529	0.852	1.307	1.691	2.136	2.441
35	0.255	0.529	0.852	1.306	1.690	2.133	2.438
36 37	0.255	0.529	0.852	1.306	1.688	2.131	2.434
38	0.255	0.529 0.529	0.851	1.305	1.687 1.686	2.129 2.127	2.431
39	0.255	0.529	0.851	1.304	1.685	2.127	2.429 2.426
40	0.255	0.529	0.851	1.304	1.684	2.123	2.423
41	0.255	0.529	0.850	1.303	1.683	2.121	2.421
42	0.255	0.528	0.850	1.302	1.682	2.120	2.418
43	0.255	0.528	0.850	1.302	1.681	2.118	2.416
44	0.255	0.528	0.850	1.301	1.680	2.116	2.414
45	0.255	0.528	0.850	1.301	1.679	2.115	2.412
46	0.255	0.528	0.850	1.300	1.679	2.114	2.410
47	0.255	0.528	0.849	1.300	1.678	2.112	2.408
48	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.111	2.407
49	0.255	0.528	0.849	1.299	1.677	2.110	2.405
50	0.255	0.528	0.849	1.299	1.676	2.109	2.403
00	0.252	0.524	0.842	1.282	1.645	2.055	2.326

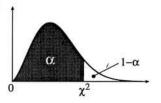
P_m

²⁹²

^{*} Número de graus de liberdade.

Tabela de Probabilidade da Distribuição χ²

	α 0.500	0.400 0.600	0.300 0.700	0.200 0.800	0.100 0.900	0.050 0.950	0.020 0.980	0.010 0.990	0.001 0.999
n*									
1		0.708	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.828
2	1.386	1.833	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.816
3		2.945	3.666	4.644	6.253	7.815	9.835	11.342	16.269
4		4.044	4.878	5.990	7.781	9.488	11.667	13.276	18.468
5		5.132	6.064	7.289	9.237	11.071	13.388	15.086	20.516
6 7		6.211	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.811	22.458
8		7.283 8.350	8.383 9.524	9.803 11.030	12.017 13.361	14.067 15.507	16.622 18.168	18.475	24.322
9		9.414	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	20.090 21.666	26.125 27.878
10		10.473	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.210	29.589
11	10.341	11.530	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.265
12	A. TORTO 270 - 107	12.584	14.011	15.812	18.549	21.026	24.054	26.217	32.911
13		13.636	15.119	16.985	19.812	22.362	25.471	27.688	34.531
14		14.685	16.222	18.151	21.064	23.685	26.873	29.141	36.124
15		15.733	17.322	19.311	22.307	24.996	28.259	30.578	37.698
16		16.780	18.418	20.465	23.542	26.296	29.633	32.000	39.253
17		17.824	19.511	21.615	24.769	27.587	30.995	33.409	40.790
18		18.868	20.601	22.760	25.989	28.869	32.346	34.805	42.313
19		19.910	21.689	23.900	27.204	30.144	33.687	36.191	43.820
20	19.337	20.951	22.775	25.038	28.412	31.410	35.020	37.566	45.315
21	20.337	21.991	23.858	26.171	29.615	32.671	36.343	38.932	46.797
22	21.337	23.031	24.939	27.301	30.813	33.924	37.659	40.289	48.268
23		24.069	26.018	28.429	32.007	35.172	38.968	41.638	49.728
24		25.106	27.096	29.553	33.196	36.415	40.270	42.980	51.179
25	24.337	26.143	28.172	30.675	34.382	37.652	41.566	44.314	52.620
26	25.336	27.179	29.246	31.795	35.563	38.885	42.856	45.642	54.052
27	26.336	28.214	30.319	32.912	36.741	40.113	44.140	46.963	55.476
28	27.336	29.249	31.391	34.027	37.916	41.337	45.419	48.278	56.892
29	28.336	30.283	32.461	35.139	39.087	42.557	46.693	49.588	58.301
30	29.336	31.316	33.530	36.250	40.256		47.962	50.892	59.703
31	30.336	32.349	34.598	37.359	41.422	44.985	49.226	52.191	61.098
32	31.336	33.381	35.665	38.466	42.585	46.194	50.487	53.486	62.487
33	32.336	34.413	36.731	39.572	43.745	47.400	51.743	54.776	63.870
34 35	33.336 34.336	35.444	37.795	40.676	44.903	48.602	52.995	56.061	65.247
36	35.336	36.475 37.505	38.859 39.922	41.778 42.879	46.059 47.212	49.802 50.998	54.244	57.342	66.619
37	36.336	38.535	40.984	43.978	48.363	52.192	55.489 56.730	58.619 59.892	67.985
38	37.335	39.564	42.045	45.076	49.513	53.384	57.969	61.162	69.347 70.703
39	38.335	40.593	43.105	46.173	50.660	54.572	59.204	62.428	72.055
40	39.335	41.622	44.165	47.269	51.805	55.758	60.436	63.691	73,402
41	40.335	42.651	45.224	48.363	52.949	56.942	61.665	64.950	74.745
42	41.335	43.679	46.282	49.456	54.090	58.124	62.892	66.206	76.084
43	42.335	44.706	47.339	50.548	55.230	59.304	64.116	67.459	77.419
44	43.335	45.734	48.396	51.639	56.369	60.481	65.337	68.709	78.750
45	44.335	46.761	49.452	52.729	57.505	61.656	66.555	69.957	80.077
46	45.335	47.787	50.507	53.818	58.641	62.830	67.771	71.201	81.400
47	46.335	48.814	51.562	54.906	59.774	64.001	68.985	72.443	82.720
48	47.335	49.840	52.616	55.993	60.907	65.171	70.197	73.683	84.037
. 49	48.335	50.866	53.670	57.079	62.038	66.339	71.406	74.919	85.351
50	49.335	51.892	54.723	58.164	63.167	67.505	72.613	76.154	86.661



 $^{^{1}}$ Em que $1-\alpha$ é o nível de significância.

^{*} Número de graus de liberdade

BIBLIOGRAFIA



BIBLIOGRAFIA 1

Cursos básicos de Física

- ALONSO, M. e FINN, E. J., Física, Vols. I, II, III, S. Paulo, ed. Edgard Blucher, 1981.
- DEUS, J. Dias de, PIMENTA, M., NORONHA, A., PEÑA, T. e BROGUEIRA, P., Introdução à Física, ed. McGraw-Hill, 1992.
- HALLIDAY, D., RESNICK, R. e WALKER, J., 4th edition, Fundamentals of Physics extended, ed. J. Wiley, 1993.
- HECHT, E., Óptica, ed. Fundação Calouste Gulbenkian, 1991.

Cursos básicos de Matemática

APOSTOL, Tom M., Calculus, Vol. I, 2.ª ed., Wiley International Edition, 1967.

MARTINHO, E. J. C., OLIVEIRA, J. Costa e FORTES, M. Amaral, *Matemática para o estudo da Física*, ed. Fundação Calouste Gulbenkian, 1985.

Circuitos eléctricos

- HAYES, T. e HOROWITZ, P., Student Manual for the Art of Electronic, ed. Camb. Univ. Press, 1989.
- HOROWITZ, P., The Art of Electronics, Capítulos 1, 2, 4.1, 4.2 e 15, ed. Camb. Univ. Press, 1990.
- OUININHA, J. Maia, O Osciloscópio, ed. Departamento de Física, 1980.

Análise e tratamento de dados

- BARFORD, N. C., Experimental measurements: precision, error and truth, 2.ª ed., ed. John Wiley and Sons, 1985.
- LOBBAN, C. S., e SCHEFTER, M., Successful Lab Reports A Manual for Science Students +, Camb. Univ. Press, 1992.
- LYONS, L., A Practical Guide to Data Analysis for Physical Science Student, Camb. Univ. Press, 1991.
- TAYLOR, J., An introduction to error analysis, the study of uncertainties in physical measurements, ed. University Science Books, 1982.

¹ A bibliografia não engloba a referida no texto, pois onde citada foi convenientemente documentada em notas de rodapé. A bibliografia assinalada com + é facultativa.

Sistemas de unidades

- ALMEIDA, Guilherme de, Sistema Internacional de Unidades (SI) Grandezas e Unidades Físicas, Plátano Editora, 1988.
- LIDE, D. R., Handbook of Chemistry and Physics A ready reference book of chemical and physics data +, 73.ª ed., CRC Press, 1992-1993.

Outras experiências

- PRESTON, D. W., Experiments in Physics A laboratory manual for scientists and engineers +, ed. J. Wiley & Sons, 1986.
- RIBEIRO, A. C. e TOMÉ, F., Física Experimental Laboratório +, ed. Dep. Física, IST, 1988. WHITTLE, R. M. e YARWOOD, J., Experimental Physics for Students +, ed. Chapman and Hall, 1973.
- MEINERS, H., EPPENSTEIN, W., OLIVA R. e SHANNON, T., *Laboratory Physics* +, 2.ª ed., ed. J. Wiley & Sons, 1987.

PROBLEMAS RESOLVIDOS



PROBLEMAS RESOLVIDOS

Experiência 0

0.1 A liga metálica trata-se de uma mistura de elementos. Desta forma o volume total é igual à soma dos volumes de cada um dos elementos $v = v_1 + v_2$.

Tomando o inverso da densidade tem-se

$$\begin{split} \frac{1}{\rho_{liga}} &= \frac{v}{m_1 + m_2} = \frac{v_1}{m_1 + m_2} + \frac{v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{v_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_1}{m_1} + \frac{v_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{m_2}{m_2} \\ &= \omega_l \cdot \frac{1}{\rho_1} + \omega_2 \cdot \frac{1}{\rho_2} \end{split}$$

onde

$$\omega_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$
 e $\omega_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$

Experiência 1

1.3 A anomalia gravimétrica é provocada pela diferença entre a massa do jazigo m_j e a massa média da crosta m_c , e por isso depende apenas do contraste de densidades $\Delta \rho = \rho_j - \rho_c$. A massa anómala vale $m_a = 4\pi R^3$ ($\rho_j - \rho_c$) = 5.328×10 lo kg. A atracção da massa anómala, considerada pontual à profundidade h, provoca um aumento no valor da gravidade de



$$\Delta g = G \frac{m_a}{h^2} = 1.42 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Experiência 2

2.5 De acordo com a lei do declíneo radioactivo o número N de núcleos existentes numa amostra radioactiva em cada instante é dado por N = $N_o \exp(-\frac{t}{\tau})$, onde τ é a vida média e N_o o número de átomos existentes inicialmente. O número de desintegrações por unidade de tempo é então igual a

$$A = -\frac{dN}{dt} = \frac{N_o}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}) = A_o \exp(-\frac{t}{\tau}).$$

Tomando o logaritmo em ambos os membros da expressão obtém-se: $\ln A = \ln A_o - \frac{t}{\tau}$ que é a equação de uma recta de declive $m = \frac{1}{\tau}$ e ordenada na origem $b = \ln A_o$. Podemos então fazer um ajuste linear aos pontos experimentais, se tomarmos o logaritmo de cada medida efectuada. Em relação aos erros devemos contudo ter alguma precaução. Os erros associados a cada número de contagens A é igual a \sqrt{A} mas para acharmos o erro associado a $\ln A$ devemos utilizar a fórmula de propagação dos erros. Assim tem-se

$$\sigma^2(\ln\,A) = \left(\,\frac{\partial\,\ln\,A}{\partial\,A}\,\right)^2 \sigma^2(A) = \,\frac{1}{A^2}\,\,A = \frac{1}{A} \ .$$

301

é

Usando a fórmula para o ajuste de uma recta a um conjunto de pontos experimentais obte-

$$m = \frac{1}{\tau} = -0.008999$$
 $\sigma (m) = 0.001$
 $b = \ln A_o = 4.721$ $\sigma (b) = 0.064$

A vida média é portanto

$$\tau = 111.1 \pm 0.1 \text{ s}$$

O χ^2 deste ajuste é igual a 15.6 sendo 8 o número de graus de liberdade. O χ^2 reduzido é portanto igual a 15.6/8 = 1.96, valor este que é um pouco alto. Contudo se calcularmos a probabilidade $P(\chi^2>15)=0.05$, verificamos que é ainda razoável. Um valor do χ^2 elevado pode significar que a forma escolhida para a curva de ajuste não é a melhor, podendo contudo ser aceitável.

2.6 Para cada uma das distribuições calculamos o valor médio μ e desvio padrão σ através das expressões

$$\mu = \frac{\sum \! \omega_i \, x_i}{N} \qquad \quad \sigma = \ \sqrt{\frac{\sum \! \omega_i \, (x_i - \mu)^2}{N}} \ = \ \sqrt{\frac{\sum \! \omega_i \, x_i^2}{N} - \mu^2} \quad e \quad N = \sum \! \omega_i$$

onde ω; são as frequências em cada intervalo, e x; o valor do ponto médio de cada intervalo.

ano 90/91
$$\mu$$
 = 11.3 σ = 4.10 Número total de alunos N = 126 ano 92/93 μ = 11.8 σ = 3.39 Número total de alunos N = 223

Agora para cada intervalo vamos calcular o valor da frequência esperada de acordo com uma distribuição normal de média μ e desvio padrão σ .

Notemos que a probabilidade de se obter a nota x comprendida entre x_1 e x_2 pode ser calculada a partir da distribuição normal reduzida (i.e. $\mu=0$ e $\sigma=1$) que se encontra tabelada. De facto tem-se

$$P\left(x_{1} < x < x_{2}\right) = P\left(x_{1} - \mu < x - \mu < x_{2} - \mu\right) = P\left(\frac{x_{1} - \mu}{\sigma} < \frac{x - \mu}{\sigma} < \frac{x_{2} - \mu}{\sigma}\right)$$

Por exemplo para o ano de 90/91 e para o primeiro intervalo

$$P(0 < x < 2) = P\left(\frac{0 - 11.3}{4.1} < X < \frac{2 - 11.3}{4.1}\right) = P(-2.76 < X < -2.27) = 0.0087$$

Obtém-se para os vários intervalos

	ano 90/91		ano 92/93
P(0 < x < 2)	= 0.0087	P(0 < x < 2)	= 0.0016
P(2 < x < 4)	= 0.0259	P(2 < x < 4)	= 0.0088
P(4 < x < 6)	= 0.0610	P(4 < x < 6)	= 0.0329
P(6 < x < 8)	= 0.1134	P(6 < x < 8)	= 0.0878
P(8 < x < 10)	= 0.1626	P(8 < x < 10)	= 0.1667
P(10 < x < 12)	= 0.1930	P(10 < x < 12)	= 0.2258
P(12 < x < 14)	= 0.1779	P(12 < x < 14)	= 0.2183
P(14 < x < 16)	= 0.1295	P(14 < x < 16)	= 0.1471
P(16 < x < 18)	= 0.0735	P(16 < x < 18)	= 0.0739
P(18 < x < 20)	= 0.0346	P(18 < x < 20)	= 0.0328

As frequências f_i esperadas teoricamente de acordo com a distribuição normal obtêm-se multiplicando as probabilidades P por N, o número total de alunos em cada ano

$$f_1 = P (0 < x < 2) \times N$$
 etc...

O χ2 obtém-se a partir da expressão

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i - \omega_i)^2}{f_i}$$

donde

$$\gamma^2 = 46.9$$
 ano 90/91

$$\chi^2 = 55.8$$
 and 92/93

Para 10-3=7 graus de liberdade o valor crítico χ_c^2 para um nível de significância de 0.05 é igual a 14.0 e para um nível de significância de 0.001 é igual a 24.3. Portanto a hipótese das distribuições das notas seguirem uma distribuição normal é rejeitada para ambos os níveis de significância.

Experiência 3

3.1 Inicialmente os electrões são acelerados pela ddp V_a e adquirem uma velocidade v antes de entrarem na região das placas deflectoras. Dado que o trabalho realizado pelo campo eléctrico aplicado aos electrões é igual à variação da sua energia cinética tem-se

$$W = qV_a = E_c = \frac{1}{2} m_e v^2$$

onde $q=1.6\times 10^{-19}$ C é a carga eléctrica do electrão e $m_e=9.1\times 10^{-31}$ kg a sua massa. Como o electrão é acelerado segundo o eixo dos yy fica-se com $v_y=\sqrt{\frac{2qV_a}{m_e}}=1.3\times 10^7$ m/s.

Quando um electrão entra na região das placas horizontais fica sujeito a uma força eléctrica $F_x = E_x$ $q = \frac{V_p}{d}$ q, onde V_p é a ddp aplicada às placas deflectoras. O electrão sofre uma aceleração $a_x = \frac{F_x}{m_e}$. Após ter atravessado a região das placas horizontais a componente v_x da velocidade é dada por

$$v_x = a_x t = \frac{V_p}{dm_e} q t$$

onde t é o tempo que o electrão leva a atravessar a região das placas, $t = \frac{L_1}{v_v}$.

Supondo que o electrão efectua sempre uma trajectória rectilínea desde o ponto O, o trajecto percorrido nas coordenadas x e y serão dadas por

 $\Delta x' = v_x t'$ e $\Delta y = L_1 + L_2 = v_y t'$ em que $L_2 = 20$ cm é a distância entre as placas e o ecrã logo

$$\Delta x' = \frac{v_x}{v_y} (L_1 + L_2) = \frac{1}{2} \frac{V_p}{V_a d} L_1(L_1 + L_2)$$

se admitirmos que a ddp aplicada às placas é da ordem de 12 V obtemos $\Delta x' = 1.2$ cm.

Para fazermos o cálculo exacto dividimos a trajectória do electrão em duas partes: uma trajectória parabólica no interior das placas, e uma trajectória rectilínea fora dessa zona. Entre as placas o desvio Δx_1 sofrido pelo electrão é dado por

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} \frac{V_p}{m_e d} q \frac{L_1^2}{v_v^2} = \frac{1}{4} \frac{V_p}{V_a d} L_1^2$$

e fora das placas a distância percorrida vale

$$\Delta x_2 = \frac{v_x}{v_y} L_2 = \frac{1}{2} \frac{V_p}{V_a d} L_1 L_2$$

e portanto o desvio total sofrido pelo electrão é

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{1}{2} \frac{V_p}{V_a d} L_1 L_2 + \frac{1}{4} \frac{V_p}{V_a d} L_1^2$$
 obtendo-se $\Delta x = 1.1$ cm

O erro relativo cometido a fazer-se a aproximação da trajectória rectilínea é igual a

$$\delta = \frac{-\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\frac{L_1^2}{2}}{L_1 L_2 + \frac{L_1^2}{2}} = 7\%$$

3.2 A atenuação é dada pela razão entre a ddp de saída V_s e a ddp de entrada V_e

$$A = \frac{V_s}{V_e} = \frac{R_s}{R_s + R_e}$$

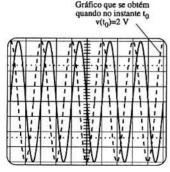
A resistência de saída (do atenuador) R_s é constituída pelo paralelo entre a resistência de $1M\Omega$ de entrada do amplificador do OSC e a resistência que se encontra à massa em cada um dos atenuadores. A resistência de entrada do OSC é pois igual a $R_{osc} = R_s + R_e$. Tomando como exemplo o atenuador A1 tem-se

Atenuador A1:
$$R_s = \frac{110 \times 1000}{110 + 1000} = 99K$$
 $R_c = 900K \log o$
$$A = \frac{99}{900 + 99} \approx 0.1$$
 e $R_{osc} = 900 + 99 = 999K \approx 1M$

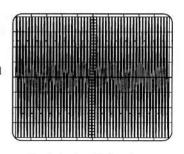
para os outros atenuadores obtém-se

A2:
$$A = 0.01$$
 A3: $A = 0.001$ B1: $A = 0.5$ B2: $A = 0.25$ tendo-se em todos os casos $R_{osc} = 1M$.

3.3

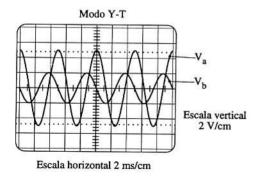


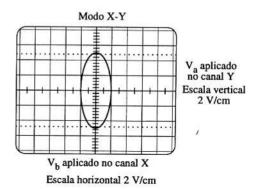
Escala vertical 0.5 V/cm



Escala horizontal 0.5 ms/cm

Escala horizontal 5 ms/cm





Experiência 4

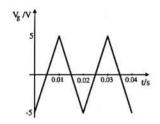
4.2 a) A equação de carga do condensador é $V_c = V_o \left[1 - exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$ pelo que tomando $V_c = 3V,~V_o = 5V,~R = R_1 = 3.3K$ e $C = 100\mu F$ vem

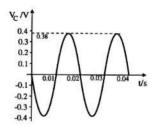
$$t = -\ln\left(1 - \frac{3}{5}\right) RC = 0.30 s$$

- b) A intensidade de corrente nesse instante pode ser facilmente calculada notando que, a queda de tensão em R_1 é igual a $V_1 = V_o V_c = 5 3 = 2V$ e pela lei de Ohm vem $i = \frac{V_1}{R_1} = 0.606 \,\text{mA}$.
- c) No instante em que se liga o interruptor I_2 a ddp V_2 na resistência R_2 vale 5V. Logo pela lei de Ohm tem-se $i_2 = \frac{V_2}{R_2} = \frac{5}{1.1 \times 10^{-3}} = 4.55 \text{ mA}$
- d) Na situação de equilíbrio a intensidade de corrente que sai do condensador é nula pelo que a intensidade de corrente que atravessa R_1 é igual à que atravessa R_2 pelo que se tem:

$$i = \frac{V_o}{R_1 + R_2}$$
 e $V_2 = i R_2$ pelo que $V_2 = V_o \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1.25 \text{ V}$

4.4





4.7 a) A impedância equivalente vista entre os pontos A e B obtém-se substituindo a fonte de tensão pela sua resistência interna, que vamos supor ser nula. Nesse caso verificamos que Z_1 fica em paralelo com Z_2 e que Z_3 fica em paralelo com Z_4 , ou seja

$$Z_{eq} = Z_1 // Z_2 + Z_3 // Z_4$$
 logo $Z_{eq} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4}$

O valor da ddp dada pela fonte de tensão equivalente de Thevenin é igual à ddp entre os pontos A e B quando não passa corrente entre estes dois pontos.

Assim a queda de tensão em Z_1 é igual a $\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}$ V_g e em Z_3 é igual a $\frac{Z_3}{Z_3+Z_4}$ V_g . A ddp entre A e B é então dada por

$$V_{eq} = V_A - V_B = \left(\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} + \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\right) V_g$$

b) Se $V_A - V_B = 0$ então vem:

$$\frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$
 donde $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$

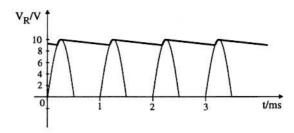
é a condição de equilíbrio da ponte de Wheatstone.

c)
$$Z_1 = R_1$$
, $Z_2 = R_2$, $Z_3 = \frac{-j}{\omega C}$ e $Z_4 = \frac{-j}{\omega C_x}$ de forma que se fica com $\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_x}{C}$ relação que é independente da frequência ω do sinal usado.

Experiência 5

tensão no díodo.

5.2 a) O díodo rectifica o sinal, deixando passar apenas as alternâncias positivas.



- b) Comecemos por admitir que o condensador se carrega até ao valor máximo da ddp dada pelo gerador. De facto, se a intensidade de corrente que atravessa o díodo é pequena a queda de tensão é também pequena (ver curva característica do díodo) e pode ser desprezada face à ddp dada pelo gerador. Pelo contrário, se nas alternâncias em que conduz a intensidade de corrente que atravessa o díodo é apreciável (alguns miliampere) então temos que ter em conta a queda de
 - i) A partir do valor máximo da alternância positiva o condensador vai-se descarregar através de R. A queda de tensão na resistência (e também no condensador) em cada instante será dada pela equação de descarga do condensador $V = V_o$ e $\frac{t}{RC}$. Tomando o tempo total em que

307

o condensador se descarrega como sendo aproximadamente igual a um período T (esta aproximação é válida sempre que a variação da ddp no condensador é pequena face a $V_{\scriptscriptstyle 0}$) a amplitude total da variação da ddp em R vem dada por

$$\Delta V = V_o - V(T) = V_o \left(1 - e^{-T/RC} \right)$$

que no caso em que T \leq RC se reduz a $\Delta V = V_o \frac{T}{RC}$

ii) No instante em que o condensador se começa a descarregar a intensidade de corrente i que atravessa R é igual a $\frac{V_o}{R}$. Admitindo que se mantém aproximadamente constante durante o tempo de descarga (que tomaremos também como sendo igual a um período) vem:

$$\Delta V = \frac{1}{C} \int_{0}^{T} i dt = \frac{1}{C} \int_{0}^{T} \frac{V_{o}}{R} dt = V_{o} \frac{T}{RC}$$

substituindo os valores numéricos R = 100 k Ω , C = 100 nF, V_o = 10V e T = $\frac{2\pi}{\omega}$ = 0.001 s obtemos ΔV = 1 V.

- c) Da equação de descarga do condensador temos: $V = V_o \left(1 e^{-T/RC}\right)$. Então o instante de tempo t para o qual se tem $V = 0.01V_o$ é dado por: $0.01V_o = V_o \left(1 e^{-T/RC}\right)$, resolvendo em ordem a t e substituindo-se os valores numéricos obtém-se: t = 46 ms.
 - 5.3 a) A ddp na bobina é dada por: $V_L = L \frac{di}{dt}$ pelo que tomando os valores do gráfico vem

$$i(t) = \frac{5 \times 10^{-3}}{1 \times 10^{-6}} t = 5 \times 10^{3} t$$
 e $V_L = 1.5 \times 5 \times 10^{3} = 7.5 \times 10^{3} V$

b) A potência média dissipada pelo indutor num período de tempo T é dada por

$$P = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} i(t)V(t) dt = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} 7.5 \times 10^{3} \times 5 \times 10^{3} t dt = 1.875 \times 10^{7} \times T$$

Assim tomando $T = 1 \times 10^{-6}$ s vem P = 18.75 W. Portanto a bobina irá queimar-se!

- c) O díodo limita a queda de tensão na bobina a um valor máximo de aproximadamente 0.6V. Assim a potência dissipada pela bobina é muito menor! A intensidade de corrente que percorre a bobina passa a ser dada por: $V_L = L \frac{di}{dt}$ ou substituindo $V_L = 0.6 \ V$ e $L = 1.50 \ H$ vem $0.6 = 1.5 \frac{di}{dt}$ donde $i = 0.4 \ t$ e para $t = 1 \mu s$ tem-se $i = 0.4 \ \mu A$. A potência média dissipada será assim igual a: $P = \frac{1}{T} \frac{T}{0} = 0.6 \times 0.4 \ t$ d $t = 0.12 \times T = 0.12 \ \mu W$ para $t = 1 \mu s$
 - d) Se a intensidade de corrente não varia então: $\frac{di}{dt}$ = 0 e V_L = V_D = 0.

5.5 a) Ganho do amplificador
$$A_1 = -\frac{R_3}{R_1} = -6.7$$

b)
$$V_s = A_1 V_e = A_1 V_1 = -6.7 V_1 = -13.3 V_2$$

c)
$$A_2 = -\frac{R_3}{R_2} = -3.3 \text{ e } A_2 V_2 = -3.3 \times 1 = -3.3 \text{ V}$$

$$V_s = A_1V_1 + A_2V_2 = -16.6 \text{ V}$$

d) O circuito faz a combinação linear das duas ddp.

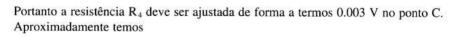
Experiência 6

6.4 O circuito da figura apresenta uma solução possível do problema. A resistência R é o transdutor de comprimento. A medida dos comprimentos faz-se entre os pontos A («zero» da escala) e B («fim» da escala). A resistência R₁ limita a intensidade de corrente que circula em R a um valor da ordem dos mA. A ddp entre os pontos A e B é dada por $V_R = V_o \ \frac{R}{R_1 + R} = 12 \ \frac{5}{1000 + 5} = 0.060 \ V$ onde se tomou o valor de R entre A e B.

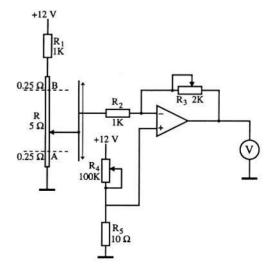
Se pretendemos ter à saída uma ddp de -100 mV quando o cursor se encontra na posição B então o ganho G do amplificador deve ser tal que $G = \frac{V_s}{V_e} = -\frac{0.1}{0.060} = -1.67$ e portanto R_3 deve ser ajustada a 1.67K já que $G = -\frac{R_3}{R_2}$ e $R_2 = 1$ K.

Se o cursor se encontrar na posição A à saída do amplificador obtemos $0\ V$ se a tensão no ponto C for igual a V_A . A tensão no ponto A vale

$$V_A = 12 \frac{0.25}{1000 + 5.5} = 0.003 \text{ V}$$



$$V_C = 0.003 = 12 \frac{10}{R_4} \log_{10} R_4 = 40 \text{ k}\Omega$$



Experiência 7

7.1 A impedância do circuito LC paralelo é dada por

$$\frac{1}{Z_{LC}} = j \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)$$
 ou $Z_{LC} = \frac{j}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}$

A razão entre a tensão de saída e de entrada é igual a

$$A = \frac{|V_{\text{safda}}|}{|V_{\text{entrada}}|} = \frac{|Z_{LC}|}{\sqrt{R^2 + |Z_{LC}|^2}}$$

Calculemos os valores da frequência ω para o qual a atenuação A é igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $A^2 = \frac{1}{2} = \frac{|Z_{LC}|^2}{R^2 + |Z_{LC}|^2} \qquad \text{donde} \qquad R^2 = |Z_{LC}|^2$

As duas soluções possíveis são

a)
$$R = \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}$$
 ou b) $R = -\frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}$

No caso a) obtém-se a equação

$$\omega^2 R L C + \omega L - R = 0$$

de soluções

$$\omega = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4LCR^2}}{2RLC}$$

Dado que a frequência ω apresenta sempre valores positivos escolhemos a solução

$$\omega_1 = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4LCR^2}}{2RLC}$$

No caso b) obtém-se a equação

$$-\omega^2 RLC + \omega L + R = 0$$

de soluções

$$\omega = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + 4LCR^2}}{2RLC}$$

Escolhendo a solução positiva ficamos com

$$\omega_2 = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + 4LCR^2}}{2RLC}$$

A largura $\Delta\omega$ da curva é pois igual a $\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=\frac{1}{RC}$. Por definição têm-se que o factor de qualidade $Q=\frac{\omega_o}{\Delta\omega}$ pelo que se tem $Q=\omega_o$ RC.

Experiência 8

8.6 A partir da lei de Snell tem-se

$$n_{vidro} = n_{ar} \; \frac{sen \; \theta_1}{sen \; \theta_2} \; donde \; substituindo \; n_{ar} = 1, \; \theta_1 = 61^{\circ} \; e \; \theta_2 = 36^{\circ} \; vem \; n_{vidro} = 1.5.$$

O erro que afecta n_{vidro} é calculado a partir de

$$\sigma_{n} = \sqrt{\left[\frac{\partial n}{\partial \theta_{1}} \, \sigma(\theta_{1})\right]^{2} + \left[\frac{\partial n}{\partial \theta_{2}} \, \, \sigma(\theta_{2})\right]^{2}}$$

ou calculando as derivadas e dividindo ambos os termos por $n_{vidro} = n_{ar} \frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2}$

$$\frac{\sigma_n}{n_{\text{vidro}}} = \sqrt{\left[\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1} \sigma(\theta_1)\right]^2 + \left[\frac{\cos\theta_2}{\sin\theta_2} \sigma(\theta)\right]^2}$$

onde os erros $\sigma(\theta_1)$ e $\sigma(\theta_2)$ devem ser expressos em radiano. Assim, substituindo os valores obtém-se $\sigma_n = 0.1$.

ÍNDICE ANALÍTICO



A	audiofrequência 74, 195	Chauvenet, critério 107
	Avogadro (ver número de	circuito
aberração cromática 223	Avogadro)	comparador 61, 177 diferenciador 51, 157
esférica 223		eléctrico 51
	В	integrado 176
abertura, máquina fotográfica 219	baínha 211	integrador 51, 54, 157
aceleração 284	banda	LC 55, 71-3, 163
acomodação 216	de condução 226-7	RC 157
actividade, radioactiva 143-4	de valência 226-7	RL 55, 161
activo, componente 174	barra de erro 122	RCL 71, 162
ajuste, linear 113, 119, 130 algarismos significativos 109-12	barril 286	ressonante 51, 55, 163-4
	base	soma 180-1
alfa, partícula 139, 270 alisamento 61,171	de tempo 236	círculo, confusão mínima 223
The second contract of	transistor 174	código
amp op (ver amplificador	batimentos 48	resistência 288
operacional)	becquerel 143, 285	capacidade 289
ampere 145, 282 amperimetro 250, 255	Bessel, processo 79, 215	coeficiente
	bicôncava (ver lentes)	correlação 116, 129
ampliação 209	biconvexa (ver lentes)	temperatura 65, 189
angular 78, 217, 222 longitudinal 214	bilateral (ver probabilidade)	colector, transistor 174
transversal 77, 214, 221	bilião 281	comprimento de onda 194, 284,
amplificação 175	binomial (ver distribuição)	290
amplificador 62, 175, 179-80	bobina 73-4	côncavo (ver espelho, lente)
operacional 59, 176	Boltzmann, constante de 169, 286	condensador 51
amplitude	bottom (ver quarks)	carga e descarga do 54, 155-6
máxima 45-7, 151	binóculos 223	condutor 189
pico a pico 45-7, 151	bosões 140	confiança, intervalo 116-7, 129
amostra 96	buracos 226	conservação (ver energia)
analógico 249	buracos 220	constante
angstrom 286		desintegração 285
angular (ver frequência)	C	Planck 202, 286
ângulo	cabo coaxial 248	tempo do circuito RC 155
crítico 206	calor 184	universal δ 75
desvio 210	caloria 286	constantes fundamentais 286
incidência 204	campo	convexo (ver espelho, lente)
plano 283	eléctrico 191, 285	córnea 216
reflexão 204	magnético 191, 285	correlação 113
refracção 204	caos 74	corrente
sólido 280, 283	capacidade 54, 153	alterna 146
ano-luz 286	capacímetro 154	eléctrica 145
ânodo 41, 167, 236, 265	carga	saturação 169
antena 73-4	de um condensador 155	coulomb 145, 285
área 28, 276, 284	eléctrica 145, 285	craveira 28, 262
arsenieto, de gálio 170, 173	candela 281-2	cristalino 216-7
associação	cátodo 167, 235, 265	curie 286
paralelo 148, 154, 161, 166	Celsius	curva
série 148, 154, 161, 166	escala de 186	calibração 67
astigmatismo 217	grau (ver grau)	característica 59, 61, 168
atmosfera 286	célula, fotovoltaica 81-2, 225	distribuição 94-5
átomo 139	centro,	curvatura
ato 281	curvatura 207	centro 207-8, 212
	da massa 20	raio 207-8, 212

de massa 29

atrito, pêndulo 135

313

raio 207-8, 212

D	conservação 30	fase 284
deca 281	interna 183	diferença 45-7, 53, 245
deci 281	potencial 30	feedback (ver realimentação)
decibel 159	rotação 30	fento 281
declínio radioactivo 142	solar 231	fermi 286
densidade 29, 284	equação	fibra óptica 211
derivadas 278	declínio radioactivo (ver lei)	fibrilação 268
descarga do condensador 54, 155	dimensional 283	fidelidade 87
desenvolvimento (ver séries)	equivalente massa-energia 141	filtros
desmodulação 197	espelhos esféricos 77, 208	CL 71-73
desvio	lentes delgadas 77, 217	passa-alta RC 51, 54, 158
médio 27, 98	propagação das ondas 192-3	passa-baixa RC 51, 54, 158
padrão 40, 97, 128	transformação 165	ópticos 78
detector Geiger-Muller 41, 86, 265	erro	fluxo magnético 285
diafragma 219, 223	absoluto 27, 94	foco 207
diferença de potencial 45-7, 51,	aleatório 27, 92-3	imagem 207-8, 212
145, 151, 285	acidental 27, 92-3	objecto 207-8, 212
diferença de fase (ver fase)	calibração 27, 91-2	real 207, 212
difusão 204	estatístico 27, 92-3, 129	virtual 208, 212
digitais 249	leitura 27, 91-2	fonte de
dimensional	limite superior 27, 108, 129	corrente 82, 259
equação 283	paralaxe 27, 91-2	tensão 257-8
díodo 59, 61, 167	propagação 27, 107, 129	força 284
emissor de luz 173	relativo 27, 94, 129	de impulsão 34
sinal 61, 172	sistemático 27, 91-2	fotão 139, 202
varicap 74, 173, 197	zero 27, 263	fotovoltaico (ver célula
Zener 64, 172	escala	fotovoltaica)
dioptria 77, 215, 285	absoluta de temperatura 185	frequência 45-7, 284
dioptro 204	Celsius 186	angular 132, 146
distância, focal 79, 207, 285	Fahrenheit 186	de corte 159
distância visão mínima 78, 220	milimétrica 122	de oscilação do pêndulo 132
distribuição de probabilidades	logarítmica 124	de ressonância do circuito 51
39, 99	esfero-cilíndricas (ver lentes)	71-3, 163, 197
binomial 100, 103, 128	espelho 77-8	funções, trigonométricas 276
Gauss ou normal 41, 101,	côncavo 207-8	FWHM 102
103, 128, 291	convexo 208-9	
Poisson 40-1, 100, 103, 143	esféricos 207-9	G
t de Student 42, 104, 128, 292	plano 207	
χ² 106, 129, 293	espectro electromagnético 290	gama (ver radiação)
divisor	estacionária (ver onda)	gal 286
corrente 148-9	esterradiano 280, 283	galvanómetro, d' Arsonval 249
tensão 148-9	estimador 97	ganho 59-60, 175-7
down (ver quarks)	esu 286	Gauss (ver distribuição)
	exa 281	gauss 286
	exactidão 87	Geiger, detector (ver detector)
E	exponencial 286	gerador de sinais 259
-E-12-1-5-1-1-1-220		germânio 170
eficiência fotovoltaica 230	F	giga 281
eixo, principal 207	c	gluão 139, 142
electrão 139	factor	gráficos 121
feixe 235	conversão 231	graus
volt 286	f 219	Celsius, 186, 285-6
emissor, transístor 174	de qualidade Q 72-3, 164	Fahrenheit 186
energia 285	saturação 230	kelvin 281-2

farad 153

de liberdade 105-6

314

cinética 30

gravidade	J	M
aceleração da 33, 36, 136, 289	joule 285-6	malha 146
gravimetria 137	junção n-p 167, 228	máquina fotográfica 219
gravimenta 157	3-3	massa
	3	centro de 29
Н	K	eléctrica 145, 267
harmónica (ver onda)	kelvin 281-2	média 27, 40, 96-7, 128
hecto 281	Kirchhoff, leis de 51, 147	estimada 96-7
Heisenberg (ver princípio)	Kircinion, leis de 31, 147	ponderada 97, 128
henry 160, 285		real 97
hertz 284	L	mediana 96
heterodino (ver receptor)	100	medição 85-9
hipermetropia 217	laser 271	medida 85-9
histogramas 42, 94-5	LED 173	medir
homogeneidade dimensional 283-4	lei	aceleração da gravidade 36
humor	declínio radioactivo 142	áreas 28
aquoso 216	Kirchhoff (ver lei das malhas	capacidades 54
vítreo 216	e nós)	centro de massa 29
Huygens, princípio de 203	malhas 147	densidades 29
	nós 147	diferenças de potencial 47-8
I	Ohm 51, 145 ohm generalizada 166	diferenças de fase 48
imã 249	reflexão 77-8, 204	espessuras 27
	refração 77-8, 204	frequências 47-8
imagem real 206-9, 213, 216-7	lentes 77-9, 212-15	tempo 30, 47-8 volumes 28
virtual 206-9, 213	anamórficas 217	mega 281
impedância 51, 285	bicôncavas 212	mercúrio (ver termómetro)
capacitiva 153	biconvexas 212	método dos mínimos quadrados
generalizada 166	côncavas 212	114, 127, 129
indutiva 160	convergentes 212	metro 281-2
impulso eléctrico 152	convexas 212	micro 281
incerteza (ver princípio)	delgadas 77-8, 212-3	micro-ondas 271
indice de refraçção 202	divergentes 212	micrómetro (ver palmer)
indução electromagnética 160, 164	esfero-cilíndricas 217	microscópio 79, 220
indutância 160, 285	menisco-côncavas 212	mili 281
indutor 51, 55, 160	menisco-convexas 212	milha 286
ionização 265	plano-cilíndricas 217	milhão 281
interacção	plano-côncavas 212	miopia 217
electromagnética 142	plano-convexas 212	moda 96
forte 139, 142	tóricas 217	modulação
fraca 140, 142	leptão 141	amplitude 194
gravitacional 142	limite central (ver Teorema)	frequência 198
integrado (ver circuito)	limite (ver erro) linearização 113, 123-4	profundidade 196
integrais 278	linha, de fé 261	modo
intensidade de	Lissajous, figuras 46, 48, 247	alterno 240
corrente 51, 145, 245, 282 luminosa 281-2	logaritmo	repartido 240 X-Y 236, 244
intervalo,	decimal 275	Y-T 236, 244 Y-T 236, 243
confiança 99, 116-7, 129	natural ou neperiano 276	mole 281-2
funcionamento 87	logbook 21-2	momento,
inversor, amplificador 179	lupa 218-9	angular 285
íris 216	luz	de inércia 30-1, 285
isolantes 268	velocidade da 201	de uma força 284
isótopos 139	visível 201-2	linear 285
1.5500.550 1 550 5550 550		

monolateral (ver probabilidade)	rádio 194	lentes 77, 79, 215
movimento periódico 135-6	sísmica 191	média 156, 161
multímetro	sobreposição de 193	potencial elípico 285
analógico 249, 253	sonora 191	precisão 88
digital 253	transversal 191	presbiopia ou presbitia 217
múltiplos 281	ondulação residual 59, 171-2	primário, do transformador
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	operacional (ver amplificador)	164
	óptica geométrica 201-3	princípio
N	osciloscópio 47-8, 53-5, 61, 235	incerteza de Heisenberg 88
	oscilador harmónico 132, 193	da sobreposição 53, 149
nano 281	55011ado1 11a111611160 152, 155	de Huygens 203
natural (ver logaritmo)	-	prisma 210
natureza, do nónio 262	P	probabilidade
neperiano (ver logaritmo)	palmer 27, 37, 263	bilateral 103
nervo, óptico 216	paralaxe 27	de desintegração 40
neutrino 141	paralelo (ver associação)	monolateral 103
Newton (ver equação)	paraxiais, raios 203	propagação, velocidade 102,
equação 226	parsec 286	194
nível,	pé (foot) 286	propagador 139, 142
energia 226	pêndulo	propagador 155, 142
significância 117-8	simples 33, 131	
nó 146	composto 131	Q
nónio 261-2	período 45-7, 132-2, 194,	quantidade de matéria 282
notação, científica 275	284-5	quarks 139, 141
NTC 68, 188	periscópio 211	qui-quadrado (χ²) 106
nucleão 139	permeabilidade magnética do	quilo 281
núcleo atómico 139	vazio 201, 286	quilograma 281-2
número	permitividade eléctrica	18
atómico 139	vazio 201, 286	
Avogadro 286	relativa 201	R
complexo 279	peso 131, 284	radiação
massa 139	peta 281	electromagnética 191, 201,
	pi (π) 286	290
0	pico 281	ionizante 269-70
O	poder	não-ionizante 271
objectiva 219, 220-1	de resolução 221	radiano 283
obturador 219	resolvente 87	radioactividade 139
ocular 219, 220-1	polarização	radiofrequência 74, 195, 290
óculos 217	díodo (ver tensão de	raio
ohm 145, 228	polarização)	curvatura 207
Ohm, lei de 145	directa 59, 167	gama 139, 270
ohmímetro 252	inversa 59, 167	luminoso 203
olho 215-6	transístor 174-5	incidente 77, 204
onda 191	polegada (inch) 286	paraxial 203
comprimento 201, 290	ponta de prova 48, 248	reflectido 77, 204
equação de 192-3	ponto triplo 282	refractado 77, 204
frente de 202-3	população 96	ramo 146
harmónica 193	discreta 128	realimentação 178
longitudinal 191	contínua 128	receptor, heterodino 199
luminosa 203	potência 285	rectroacção 178
mecânica 191	de dez 275	rectificação
número de 194	eléctrica 150, 156, 161, 230,	meia-onda 61, 170
portadora 195, 198	285	completa 59, 61, 171
		1994 DO 101

reduzido	prob. dist. t de Student 292	\mathbf{v}
distribuição normal 102, 128	prob. dist. χ^2 117, 293	ă.
χ^2 119	tábua, de calibração 86	valor eficaz 45-7, 151-2
reflexão	telescópio 221	valor
total 78, 206	Cassegreiniano 222	numérico 89
refracção	Newtoniano 222	médio quadrático 45, 151
índice de 78	reflexão 222	variância
rejeição, de observações 107	refracção 79, 222	estimada 96-7, 128
regressão, linear 113	termómetro 187	real 97
relações, trigonométricas 276-7	junção semicondutora 189	varicap 74, 173, 197
relatório, de uma experiência 22-3	mercúrio 187	varrimento 237
residual (ver tensão)	temperatura	velocidade 284
resistência dinâmica 169	absoluta 183, 282	angular 30
resistência eléctrica 145, 285	Celsius 285-6	de fase 192, 203
resistividade 146, 187, 285	tempo de	da luz 201, 286
ressonância (ver frequência)	relaxação 34, 136	de propagação 192
ressonante, circuito 71-3	resposta 87	translação 30
retina 216	tensão (ver também diferença	vida média 142
rigor 88	de potencial)	virtual
ripple 171	de polarização 167, 170	foco 208, 212
ruído 152	residual 171	imagem 206-9, 213
1998 198	teorema	vista cansada 217
2	do limite central 104	volume 28, 276, 284
S	sobreposição 53, 149	volt 145, 285
saturação, corrente 169	tera 281	voltímetro 47-8, 251, 254-5
secundário, do transformador 165	termístor 65-6, 68, 185	
segundo 282	tesla 285	
semicondutores 225	teste do χ^2 117-20, 129	W
sensibilidade 87	Thévenin, equivalente 150	***
série (ver associação)	top (ver quarks)	watt 150, 285
desenvolvimento 277	trabalho 184, 285	Weber 285
silício 227-8	transdutores 67, 187	
símbolos 269-71, 287	transformador 164	
sinal eléctrico 151	transístor 67, 173	Y
degrau 152	trigger 47-8, 237	
dente de serra 152	auto 239	yocto 281
quadrado 152	interno 239	yota 281
rampa 152	normal 239	ž
sinusoidal 151	externo 240	
triangular 151	trigonométricas	X
sintonização 74, 197	funções 276	21
Sistema Internacional 281-3	relações 276-7	raios X 192, 265, 270
Snell, lei de 205	trilião 281	
sobreposição (ver teorema)	tubo de raios catódicos 235	
spin 142		Z
submúltiplos 281	TT	2
250	U	zepto 281
T	unidades	zero
T	de base do SI 281-3	absoluto 185
tabela	derivadas 284-5	erro de 263
prob. dist. normal reduzida	imaginária 51, 279	zeta 281
201	un (una mundia)	7 16-1-64 67 170

up (ver quarks)

291

317

Zener, díodo 64, 67, 172

ERRATA

Onde se lê

Deve-se ler

pag. 31, li. 24

concerto

conserto

$$\Delta g = 1.42 \times 10^{-5} \,\text{m/s}^2$$

 $\Delta g = 1.19 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$

$$\chi^2 = 0.465$$

$$\chi^2 = 1.77$$

$$P_{d} = 67.7 \text{ mW}$$

$$P_d=15.6 \text{ mW}$$

pag. 71

Na figura de fim de página falta uma resistência em série com a fonte de tensão

pag. 77, li. 8

e

$$10^{-12}$$

10-11

$$\sigma(K) = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2} \sigma(y_i)$$

$$\sigma^{2}(K) = \frac{1}{\sum x_{i}^{2}} \sigma^{2}(y_{i}) \text{ onde}$$

$$\sigma^{2}(y_{i}) = \frac{1}{N-1} \sum (y_{i} - Kx_{i})^{2}$$

$$y_0=3$$

$$y_0 = 5$$

$$\Delta f = |\cos x| \Delta y$$

$$\Delta f = |\cos x| \Delta x$$

$$A = \frac{\sum_{i} x_{i}^{2} \sum_{i} y_{i} - \sum_{i} x_{i} \sum_{i} x_{i} y_{i}}{n \Delta}$$

$$A = \frac{\sum_{i} x_{i}^{2} \sum_{i} y_{i} - \sum_{i} x_{i} \sum_{i} x_{i} y_{i}}{\Lambda}$$

$$\sigma_{K} = \frac{\sum x_{i}}{\sum x_{i}^{2}} \sigma(y_{i})$$

$$\sigma_{K}^{2} = \frac{1}{\sum_{i} x_{i}^{2}} \sigma^{2}(y_{i})$$
 onde
 $\sigma^{2}(y_{i}) = \frac{1}{N-1} \sum_{i} (y_{i} - Kx_{i})^{2}$

$$g=1\omega^2$$

$$g=1\omega_0^2$$

pag. 243, pen. li. \times MAGN ×5 MAGN

pag. 301, prob. 1.3 $m_a = 4 \pi R^3 (\rho_j - \rho_c) = 5.328 \times 10^{10} \text{ kg}$ $m_a = 4/3 \pi R^3 (\rho_j - \rho_c) = 1.776 \times 10^{10} \text{ kg}$

prob. 1.3
$$1.42 \times 10^{-5} \,\mathrm{m/s}^2$$

 $1.19 \times 10^{-6} \,\mathrm{m/s}^2$

pag. 307, prob. 5.2 c) $V = V_0 (1 - e^{-T/RC})$

$$V = V_0 e^{-T/RC}$$

$$0.01V = V_0(1 - e^{-T/RC})$$

$$0.01V = V_0 e^{-T/RC}$$