

2. Descrição do movimento de um ponto material no espaço e no tempo

2.1. Num instante t_i um corpo parte de um ponto x_i num movimento de translação a uma dimensão, com módulo da velocidade v_i e aceleração constante de módulo a . Num instante posterior t_f o corpo alcançou o ponto x_f com velocidade de módulo v_f .

- a) Demonstre que o módulo da velocidade média, v_m , é dado pela expressão:

$$v_m = \frac{v_f + v_i}{2} .$$

- b) Demonstre que:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2 a (x_f - x_i) .$$

2.2. Uma pedra é lançada à superfície da Terra na vertical, para cima, com velocidade inicial $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$. Considere o instante do lançamento $t_0 = 0$ s.

- a) Sabendo que o movimento da pedra se faz com uma aceleração constante $\vec{g}$, calcule as expressões para $v(t)$, o módulo da velocidade em função do tempo, e para $y(t)$, a posição em função do tempo.
- b) Calcule o instante $t_{\max}$ em que atinge a altura máxima $h_{\max}$. Qual a velocidade nesse instante?
- c) Calcule a altura máxima $h_{\max}$ atingida pela pedra.
- d) Calcule ao fim de quanto tempo a pedra volta a passar no ponto de partida e a velocidade nesse instante.
- e) Considere $|\vec{v}_0| = 2$ m/s e $|\vec{g}| = 9,8$ m/s². Calcule $h_{\max}$ e $t_{\max}$.

2.3. Uma pedra é lançada à superfície da Terra com uma velocidade inicial que faz um ângulo α com a horizontal. Considere que a velocidade inicial da pedra é

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y$$

e que a aceleração gravítica é $\vec{g} = -9,8 \vec{e}_y$ m/s². Para efectuar cálculos considere os seguintes valores para as componentes da velocidade inicial: $v_{0x} = 3$ m/s e $v_{0y} = 2$ m/s.

- a) Sabendo que o movimento da pedra se faz com aceleração constante pelo eixo dos yy e com velocidade constante pelo eixo dos xx , calcule $v_y(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$ e $x(t)$.
- b) Relacione v_{ox} e v_{oy} com o ângulo α e com v_o , o módulo da velocidade inicial.
- c) Calcule a expressão para $t_{\max}$ correspondente ao instante em que a pedra atinge a altura máxima, $y_{\max}$, em função do ângulo α e de v_o . Qual o módulo da velocidade nesse instante?
- d) Calcule a expressão para o instante em que a pedra cai no solo.
- e) Demonstre que a pedra cai no solo a uma distância do ponto de lançamento dada pela expressão:

$$x_{\max} = \frac{v_o^2}{g} \sin(2\alpha)$$

- f) Demonstre que

$$y(x) = a + bx + cx^2$$

onde $a = y_o$, $b = \tan(\alpha)$ e $c = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_o^2 \cos^2 \alpha}$. Verifique que $y(x)$ corresponde à equação de uma parábola.

- 2.4. Pretende-se que uma bola, lançada do solo com velocidade inicial $\vec{v}_o$, atinja – no ponto mais alto da sua trajectória – a caixa de uma carrinha (LEGO) colocada em cima de uma mesa. A velocidade da bola no instante em que colide com a carrinha é $\vec{v} = 3 \vec{e}_x \text{ m/s}$. A caixa da carrinha está a uma altura $h = 0,9 \text{ m}$ do solo. Considere que é a essa altura que se dá a colisão. Calcule o módulo da velocidade inicial da bola e o ângulo de lançamento θ (isto é, o ângulo entre o vector velocidade e o solo).
- 2.5. Uma seta e uma maçã estão inicialmente à mesma altura h_1 do chão, sendo $h_1 = 1,5 \text{ m}$. A distância da seta à maçã é de $D = 2 \text{ m}$. Um dispositivo assegura que quando a seta é lançada no sentido da maçã, esta é deixada cair na vertical sem velocidade inicial. Verifica-se que a seta atinge o alvo a uma altura do chão $h_2 = 0,5 \text{ m}$.
- a) Qual a velocidade mínima que deverá ter a seta para que possa atingir a maçã, em função da distância D e da altura h ?
 - b) Qual o intervalo de tempo entre o instante em que a seta é lançada e o instante em que atinge a maçã?
 - c) Qual a velocidade inicial da seta?
 - d) Se por falha do sistema, a seta e a maçã fossem lançadas em instantes diferentes e não houvesse colisão, quais seriam as componentes das velocidades de ambas quando tocassem no chão? Ao fim de quanto tempo chegariam ao chão?

2.6. Um passageiro dentro de um comboio atira uma pedra ao ar com velocidade $\vec{v}_o^* = v_o^* \vec{e}_y^*$, onde $v_o^* = 2 \text{ m/s}$. A pedra não toca no tecto da carruagem. Analise o movimento da pedra do ponto de vista do passageiro dentro do comboio e de uma pessoa na estação, em relação à qual o comboio se desloca com velocidade constante $v_c = 200 \text{ km/h}$.

- a) Verifique que as equações do movimento da pedra para o passageiro do comboio são dadas por:

$$\begin{aligned} y^*(t) &= y_o^* + v_{oy}^* t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x^*(t) &= x_o^* \end{aligned}$$

- b) Ao fim de quanto tempo a pedra atinge a altura máxima para o passageiro do comboio?
- c) Verifique que as equações do movimento da pedra para o passageiro na estação são dadas por:

$$\begin{aligned} y(t) &= y^*(t) = y_o^* + v_{oy}^* t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x(t) &= v_c t + x^*(t) = v_c t + x_o^* \end{aligned}$$

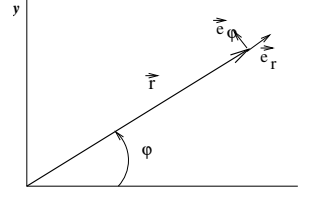
- d) Ao fim de quanto tempo a pedra atinge a altura máxima para o passageiro na estação?
- e) Com base nos resultados anteriores demonstre que, para um observador na estação a trajectória da pedra é uma parábola, cuja equação é dada por

$$\begin{aligned} y(t) &= y_o^* + \frac{v_{oy}^*}{v_c} x(t) - \frac{1}{2} \frac{g}{v_c^2} x^2(t) \\ x(t) &= v_c t + x^*(t) = v_c t + x_o^* \end{aligned}$$

2.7. Num simulador de vôo de um Boeing 737 pretende-se simular uma travagem do avião após uma aterragem. O comandante tem 1000 metros de pista para parar e tocou a pista a 180 km/h . A sensação de travagem é conseguida inclinando o módulo do simulador. Qual o ângulo a que se deve inclinar o módulo do simulador para simular esta travagem e para que o piloto sinta a mesma desaceleração? Quais as conclusões desta experiência no que diz respeito à comparação entre a massa gravitacional e a massa inercial?

2.8. A escolha de um referencial e de um sistema de eixos adequado pode simplificar bastante a análise do movimento de um corpo. Para o demonstrar, na aula teórica analisou-se o caso do movimento circular uniforme de um corpo usando coordenadas polares (r, φ) , como definido na figura ao lado.

Seja $\vec{r}$ o raio vector que caracteriza a posição do corpo A e $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$. Seja r o módulo de $\vec{r}$. Os versores $\vec{e}_r$ e $\vec{e}_\varphi$ estão definidos na figura.



Definição de coordenadas polares

- a) Defina o vector $\vec{r}$ em coordenadas polares.
 - b) Sabendo que o ângulo φ varia com o tempo, considere $\omega = d\varphi/dt$. Calcule a velocidade $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ em coordenadas polares. Indique as componentes radial e tangencial da velocidade. *Sugestão:* Comece por demonstrar que $d\vec{e}_r/dt = \omega\vec{e}_\varphi$ e $d\vec{e}_\varphi/dt = -\omega\vec{e}_r$.
 - c) Calcule a aceleração do corpo em coordenadas polares no caso particular do movimento circular uniforme. Identifique as componentes radial e tangencial. Qual a aceleração centrípeta?
 - d) Obtenha a expressão para $\vec{v}$ e $\vec{a}$ em coordenadas cartesianas (x, y) para o movimento circular uniforme.
- 2.9. Calcule a velocidade de um corpo relativamente a um sistema inercial de coordenadas que passa pelo centro da Terra no caso em que o corpo está situado num ponto sobre o equador terrestre e com velocidade nula relativamente à Terra.