

LABORATÓRIO DE FÍSICA EXPERIMENTAL AVANÇADA
Eng^a Física Tecnológica

GUIA DE TRABALHO

**CAOS E DUPLICAÇÃO DE PERÍODO
NUM CIRCUITO RCL NÃO LINEAR**

Ano lectivo 2011/2012

1. Objectivo do Trabalho

Estudo qualitativo de um circuito não linear aplicando à teoria dos mapas de intervalo: observação dos padrões de resposta periódica.

Trata-se de um circuito RCL não linear forçado sujeito a uma excitação exterior da forma $b + a \cdot \cos \omega t$.

A não linearidade é introduzida por um díodo ou *varicap*, cuja capacidade depende da tensão aos terminais.

A variável que se pretende estudar é a tensão aos terminais do díodo, e os parâmetros de que depende o seu comportamento são a frequência e a amplitude da senoide excitadora, bem como o *offset* b a esta adicionado. Este *offset* é somado à senoide por meio de um amplificador operacional e pode ser variado à mão, por meio de um potenciómetro introduzido na montagem ou, em regime periódico, somando uma função triangular à senoide.

ATENÇÃO

- As alimentações são a **primeira** coisa a ligar e a **última** a desligar.
- Verifique as alimentações antes de as ligar à montagem (+15,-15,+5,-5); assegure-se que as liga correctamente.
- Controle os valores das amplitudes da senoide e da triangular antes de as ligar à montagem.

2. Procedimento Experimental

2.1 Observação da tensão aos terminais do díodo

Gerador 1:

Função: Seno Freqüência: 500kHz Amplitude: 2.8 Vpp

Canal 1 do osciloscópio

Saída (tensão aos terminais do díodo) : Canal 2

Trigger: Canal 2 do osciloscópio

Variando lentamente o potenciômetro da montagem, observe sucessivamente respostas de períodos 1, 2, 4, 8, caóticas, janelas de estabilidade 5,10 (ou 3,6), novamente respostas caóticas, e finalmente a repetição dos mesmos períodos por ordem inversa.

NOTA: Toma-se como unidade de período o do seno; assim, período n significa período (n vezes período do seno).

Para cada um destes períodos registre, por ordem de sucessão, a altura dos picos de tensão. Note que há picos de amplitude muito pequena. Numa folha de papel milimétrico, obtenha a função do intervalo para cada um dos casos representando V_{n+1} em função de V_n .

2.2 Diagrama de bifurcação

Para obter experimentalmente o diagrama de bifurcação, aplica-se uma tensão aos terminais do díodo em função do parâmetro *offset b*. Temos de fazer variar este parâmetro de forma repetitiva: em vez da tensão do potenciômetro, somaremos ao seno uma função triangular de baixa freqüência, e utilizaremos apenas uma das rampas.

Gerador 1:

Função: seno Freqüência: 500 kHz Amplitude: 8 Vpp

Gerador 2:

Função: triangular Freqüência: 50 Hz Amplitude: máxima

Canal 3 do osciloscópio

Saída (tensão aos terminais do díodo): canal 1 do osciloscópio

Trigger: Canal 3 (onda triangular)

NOTA: Para obter um diagrama com boa definição, a freqüência de varrimento da triangular deverá ser muito menor que a do seno, uma vez que o díodo emite aproximadamente um pico por cada período do seno. Assim, por exemplo para os valores indicados, o díodo terá emitido cerca de 10000 picos durante os 20ms de varrimento.

Obterá no osciloscópio um diagrama de bifurcações. De acordo com o observado em 2.1, a resposta do díodo começa por ter o mesmo período que o seno, apresentando picos todos da mesma altura. À medida que o parâmetro aumenta a resposta duplica sucessivamente de período até se tornar caótica, obtendo-se duas bandas no osciloscópio. Note que as bandas são ainda uma "reminiscência" do período 2, visto que a altura do picos está alternadamente contida numa e noutra. A partir de um certo valor do parâmetro, as duas bandas caóticas fundem-se (ponto de Ruelle). O caos não é uniforme: para certos intervalos do parâmetro, a resposta é periódica. Encontram-se facilmente duas janelas de estabilidade (de períodos 5, 10 e, jogando também com a frequência, de período 3, 6, etc.). Note que a partir de certo valor do parâmetro o comportamento do díodo repete-se por ordem inversa (bifurcações inversas), o que é característico desta experiência.

Usando a base de tempo do osciloscópio, amplie a zona correspondente a cada período.

- Determine as primeiras razões de convergência da constante universal δ de Feigenbaum, δ_n , nas regiões de duplicação de período e nas de passagem do período a metade:

$$\delta_n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \frac{b_n - b_{n-1}}{b_{n+1} - b_n} \quad .$$

- Proceda de modo idêntico para os primeiros α_n termos da constante universal α :

$$\alpha_n = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n+1}} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n} \quad .$$

2.3 Complementos

1) Mapas de Intervalo

Define-se trajectória de um ponto x como a sequência de números

$$[x, f(x), f^2(x), f^3(x) \dots]$$

em que $f^n(x)$ significa $f \circ f \circ \dots \circ f$ (n vezes).

Dado um mapa de intervalo com um máximo no ponto $x = c$, define-se o itinerário de um ponto x como a sequência de símbolos

$$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \dots$$

em que

$$A_n = R \text{ (right)} \quad \text{se} \quad f^n(x) > c$$

$$A_n = L \text{ (left)} \quad \text{se} \quad f^n(x) < c$$

$$A_n = C \text{ (center)} \quad \text{se} \quad f^n(x) = c \text{ .}$$

Ao itinerário do ponto $x = c$ chama-se "kneading sequence", significando aproximadamente "sequência de dobragem". Esta sequência simbólica dá informação sobre se as sucessivas iteradas se distribuem à esquerda ou à direita do máximo da função, e é designada por padrão da trajectória.

Com base nos dados obtidos em 2.1 e localizando aproximadamente o máximo da função, determine os padrões das respostas periódicas observadas.

2) Simulações

A convergência lenta para os parâmetros universais de Feigenbaum é típica dos mapas com bifurcações inversas. Determine o δ e o α de Feigenbaum para **uma** das seguintes funções¹ e compare com os resultados experimentais obtidos.

Faça o número de iterações suficiente, tanto para δ como para α , de modo a atingir precisões na terceira casa decimal.

a) $f(x) = 2Mx^2 + 1 - 2M \quad x \in [-1, 1], \quad M \in [0, 1]$

b) $f(x) = \exp(-ax^2) + b \quad a = 7, \quad b \in [-1, 0]$

¹pode basear-se no programa que desenvolveu para a cadeira de Física Computacional