INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Lic. en Eng. Electrotécnica e Computadores (LEEC)
Física 2 - 1º semestre de 2001-2002
5 de Novembro de 2001

Responsável: Fernando Barão
Jorge Dias de Deus
Filipe Mendes
Óscar Dias
Nuno Matela
Jorge Páramos

Duração do teste: 1H30m.
Na realização do teste não são permitidas máquinas de calcular e formulários.

Constantes:
$c = 3 \times 10^8 m/s$
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}c^2 \simeq 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} N/A^2$
$\ln(12/5) \simeq 1$

Resolução do 1º teste

F. Barão (Dep. de Física do IST)

1. Responda a cada uma das seguintes questões, **justificando sucintamente** os resultados obtidos.

Um plano infinito encontra-se carregado com uma densidade de carga σ (C/m^2).

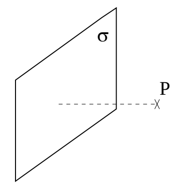


Figura 1

[1.0] **1.1)** Determine a expressão do campo eléctrico existente num ponto a uma distância d do plano. (ver fig.1)

[0.5] **1.2)** Determine a expressão da força que actua uma carga $+Q$ à distância d do plano carregado.

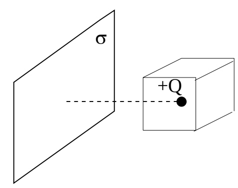


Figura 2

[1.0] **1.3)** Determine o fluxo do campo eléctrico que atravessa uma superfície cúbica. (ver fig.2)

Um fio condutor de forma rectilínea que possui uma condutividade σ $(\Omega^{-1}m^{-1})$ e secção recta A, é percorrido por uma corrente estacionária e uniformemente distribuída I.

[1.0] **1.4)** Determine o campo eléctrico existente no interior do condutor.

[0.5] **1.5)** Determine o campo magnético criado num ponto exterior ao condutor e a uma distância r do seu centro.

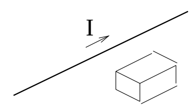


figura 3

[0.5] **1.6)** Determine o fluxo do campo magnético que atravessa uma superfície cúbica na proximidade do fio condutor. (ver fig.3)

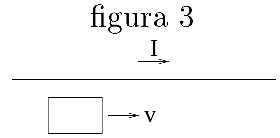
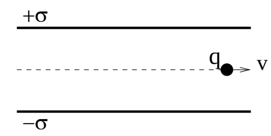


figura 4

[1.0] **1.7)** Determine a corrente induzida existente numa espira quadrada de resistência R que é deslocada paralelamente ao fio condutor. (ver fig.4)

Uma carga $+q$ que passa entre dois planos carregados onde também existe um campo magnético $\vec{B}$, possui movimento uniforme (velocidade v constante).

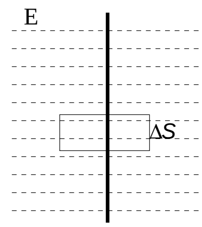
[0.5] **1.8)** Qual a força total exercida sobre a carga? *(Despreze o efeito da força gravítica)*



[1.0] **1.9)** Determine os campos eléctrico e magnético que actuam sobre a carga.

Soluções do problema 1

1.1) *Fazemos passar uma superfície cilíndrica em que um dos topos de área ΔS contém o ponto P e aplicamos a lei de Gauss:*



$$\int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; 2E\Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0} \;\Rightarrow\; E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

1.2) *A força que actua uma carga $+q$ a uma distância d do plano é a força de Coulomb:*

$$\vec{F} = q\vec{E} \;\Rightarrow\; F = q\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

1.3) *O fluxo do campo eléctrico que atravessa a superfície cúbica S é obtido pela lei de Gauss:*

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

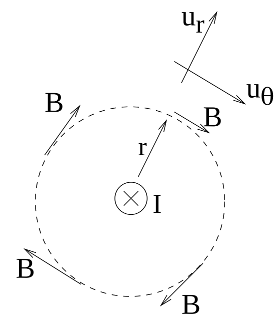
uma vez que que o que conta para o fluxo é somente a carga no interior da superfície fechada.

1.4) *A densidade de corrente eléctrica no fio é dada por:*

$$J = \frac{I}{A}$$

Aplicando a lei de Ohm, obtemos imediatamente o campo eléctrico no interior do fio condutor:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \;\Rightarrow\; E = \frac{I}{\sigma A}$$



1.5) *Aplicando a lei de Ampère a um contorno circular de raio r, concêntrico com o condutor:*

$$\int_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 I \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Ou seja o vector campo magnético será dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\overrightarrow{u_\theta}$$

1.6) *O fluxo do campo magnético que atravessa uma superfície S fechada é nulo, em consequência da não existência de cargas magnéticas (monopolos) isoladas. É uma das leis do campo magnetostático!!!*

$$\int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

1.7) *O fluxo do campo magnético que atravessa a superfície S delimitada pela espira condutora é dado por:*

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Não há corrente induzida porque não existe variação no tempo do fluxo do campo magnético que atravessa a espira, uma vez que esta corre paralelamente ao condutor.
Note que para que houvesse variação do fluxo pelo menos uma das três condições teriam que ocorrer:
- variação do campo B
- variação da área da espira (S)
- variação da orientação da espira no campo B

1.8) *Uma vez que a carga possui mov. uniforme, significa que a força total aplicada sobre ela é nula.*

$$\overrightarrow{F^{tot}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

1.9) *Como o campo eléctrico produzido por um plano é dado por (ver alínea 1.1) $E = \sigma/2\varepsilon_0$, no interior dos dois planos (condensador de faces* *paralelas) obtém-se, utilizando o princípio da sobreposição:*

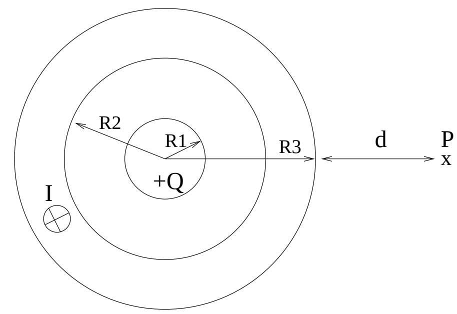
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_y}$$

onde $\overrightarrow{u_y}$ *é o versor que aponta do plano positivo para o negativo.*

Como a força total sobre a carga é nula, obtém-se imediatamente o campo magnético ao qual está sujeita:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \ \Rightarrow \ B = \frac{E}{v}$$

2. Um cabo coaxial formado por dois condutores cilíndricos de condutividade $\sigma = 2 \times 10^8\ \Omega^{-1}m^{-1}$ e raios $R_1 = 5\ cm$, $R_2 = 12\ cm$ e $R_3 = 15\ cm$, possui uma carga por unidade de comprimento $\lambda = 1\mu C/cm$ no condutor interior e uma corrente eléctrica estacionária de $I = 1\ A$, uniformemente distribuída, no condutor exterior. Os condutores estão separados por um material dieléctrico homogéneo de permitividade relativa $\varepsilon_r = 10$.



[2.0] **2.1)** Determine o campo eléctrico no interior do condutor de raio R_1 e na região entre os dois condutores.

[1.5] **2.2)** Calcule a densidade de carga de polarização junto ao condutor interior.

[1.0] **2.3)** Determine o campo magnético num ponto P a uma distância *d=10 cm* do cabo coaxial.

[1.5] **2.4)** Uma espira condutora de resistência R e raio $R_e > R_3$ é colocada à volta do cabo coaxial, concêntrica com este. Se houver variação da corrente no cabo coaxial, diga qual é a corrente induzida na espira. Justifique.

Soluções do problema 2

2.1) *O condutor interior (de raio R_1) possui uma carga por unidade de comprimento $\lambda \equiv Q/\ell$; em equilíbrio electroestático, esta carga distribui-se à superfície do condutor.*

O campo eléctrico no interior do condutor obtém-se por aplicação da lei de Gauss, escolhendo para tal uma superfície cilíndrica de raio $r < R_1$.

$$\int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0}$$

Uma vez que toda a carga se distribui à superfície do condutor, obtemos um campo eléctrico nulo no interior deste.

$$E(r < R_1) = 0$$

Na região entre os dois condutores temos um material dieléctrico, pelo que é conveniente usar o vector deslocamento eléctrico ($\vec{D}$). O fluxo do vector deslocamento eléctrico que atravessa uma superfície cilíndrica S de raio $R_1 < r < R_2$, tendo em conta que o capo $\vec{D}$ é radial (lembre-se do campo produzido por um fio condutor de espessura desprezável), é dado por:

$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{dS} = Q^{int}_{free} \;\Rightarrow\; D 2\pi r \ell = Q \;\Rightarrow\; D = \frac{1}{2\pi}\frac{Q}{\ell}\frac{1}{r} = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

Como o campo eléctrico se relaciona com o vector deslocamento eléctrico através de:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$$

vem para o campo eléctrico na região entre os condutores:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}\overrightarrow{u_r}$$

2.2) *A densidade de carga de polarização que resulta do alinhamento dos dipolos eléctricos existentes no material, obtém-se através de:*

$$\sigma_{pol} = \vec{P}_{(r=R_1)} \cdot \vec{n}$$

onde:

– *$\vec{P}$ é o vector polarização dado por: $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_E \vec{E}$*

– *$\vec{n}$ representa o versor normal à superfície definida pelo dieléctrico e que aponta para o exterior desta ($\vec{n} = -\vec{u_r}$)*

Vem então para a carga de polarização:

$$\sigma_{pol} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}_{(r=R_1)} \cdot (-\vec{u_r}) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\frac{\lambda}{2\pi R_1}$$

2.3) *Um ponto no exterior do cabo coaxial (distância de 10 cm) possui um campo magnético que resulta da aplicação da lei de Ampère, escolhento para tal um contorno circular C de raio r concêntrico com o cabo (em que todos os pontos estão à mesma distância do cabo e portanto o campo $\vec{B}$ será o mesmo):*

$$\int_C \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I$$

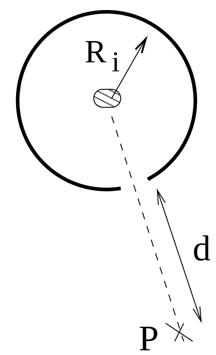
em que I é a corrente eléctrica total que passa no interior do contorno.

$$B 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R_3 + d}$$

Ou seja o vector campo magnético é dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R_3 + d}\vec{u_\theta}$$

2.4) *O fluxo do campo magnético que atravessa a espira é sempre nulo, uma vez não há linhas de campo magnético a atravessá-la. Portanto mesmo que a corrente I varie no tempo, o fluxo não varia. Donde não há corrente induzida.*



3. Um *robot* de vídeo-vigilância de última geração é constituído por uma coroa esférica condutora com carga $+Q$ de raio interno R_i e espessura x desprezável ($x << R_i$). Esta coroa tem um pequeno orifício de dimensões desprezáveis por onde entra a luz que é detectada por uma câmara vídeo colocada no seu centro e electricamente neutra. Este orifício constitui também o único ponto vulnerável do sistema pois uma bala disparada radialmente destrói a câmara de vídeo.

[1.0] **3.1)** Determine o campo eléctrico criado pelo sistema de vigilância nas regiões interior ($r < R_i$) e exterior à coroa esférica($r > R_i + x$).

[2.0] **3.2)** Uma bala carregada (resultante da fricção com o cano da arma) com carga q e massa m é disparada do ponto P que se encontra a uma distância d do orifício. Sabendo que a velocidade à saída da arma é v_0, determine a velocidade de entrada da bala no orifício.

3.3) Para impedir a bala de atingir a câmara, activa-se um campo magnético $\vec{B}$ na região interior à coroa esférica ($r < R_i$).

[1.5] **a)** Carcaterize a trajectória da bala na região interior da coroa esférica.

[1.5] **b)** Sabendo que a bala choca elasticamente com a parede da coroa esférica e que nela incide perpendicularmente, indique qual a trajectória seguida pela bala depois do ricochete. Justifique.

[1.0] **c)** O ladrão (homem que pensa ter fartos conhecimentos de física...) depois de ter observado experimentalmente o resultado do disparo, tem a ideia de ligar a coroa esférica à Terra. Diga, justificando, se a resposta dada à alínea anterior se modifica.

Soluções do problema 3

3.1) *O campo eléctrico no interior da coroa esférica de raio R_i é nulo, uma vez que a carga encerrada numa superfície esférica gaussiana de raio $r < R_i$, é nula.*

Num ponto qualquer exterior à coroa esférica o campo eléctrico obtém-se a partir da lei de Gauss, usando para tal uma superfície esférica S de raio r concêntrica com a coroa:

$$\int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{Q^{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

3.2) *Entre o ponto P onde é disparada a bala e o orifício da coroa existe um campo eléctrico, calculado anteriormente. O trabalho realizado pela força eléctrica que actua a bala $\vec{F} = q\vec{E}$ traduz-se numa diminuição da energia cinética da bala (a força tem sentido contrário ao movimento).*

A variação em módulo da energia cinética (ΔT)é igual à variação em módulo da energia potencial(ΔU), uma vez que a energia mecânica (ΔE) da bala se conserva (não há dissipação de energia).

$$\Delta T + \Delta U = \Delta E = 0 \Rightarrow \Delta T \equiv T_f - T_i = -\Delta U$$

O potencial eléctrico no exterior da coroa é dado por:

$$V = -\int \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Daí que se obtenha para a variação da energia potencial da bala:

$$\Delta U = q\Delta V = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i + d})$$

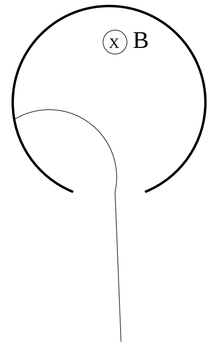
A velocidade com que a bala atinge o orifício (v_f) obtém-se então:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_f^2 &= \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i + d}) \\
\Rightarrow v_f^2 &= v_0^2 - \frac{1}{m}\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i + d}) \\
\Rightarrow v_f &= \sqrt{v_0^2 - \frac{1}{m}\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i + d})}
\end{aligned}$$

3.3.a) *Um campo magnético existente no interior da coroa esférica e perpendicular ao papel, faz com que a bala tenha uma trajectória circular; o valor da velocidade não se altera uma vez que o trabalho realiuzado pela força magnética é nulo.*

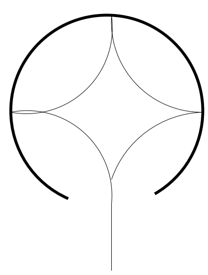
O raio de curvatura desta trajectrória seria:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow\ R = \frac{mv}{qB}$$



3.3.b) *A bala ao chocar elasticamente (conservação da energia cinética no choque) com a coroa esférica, é reflectida com a mesma velocidade. Além do mais como a incidência da bala é normal à coroa, esta volta para trás na mesma direcção (pense no choque duma bola de borracha lançada perpendicularmente contra a parede).*

Portanto a bala seguiria a trajectória indicada na figura e voltaria a sair pelo orifício atingindo o ladrão. Note que uma incidência perpendicular à superfície esférica implica uma trajectória circular de raio de curvatura $r = R_i$.



3.3.c) *O ladrão de facto pensava bem!!! É que ligando à Terra a coroa esférica as cargas nela contida escoavam-se para a Terra. Teríamos agora um potencial nulo (o potencial da Terra) em qualquer ponto exterior à coroa; ou seja, o campo eléctrico existente no exterior da coroa seria nulo. A bala de carga q já não iria ser desacelerada pelo campo* *eléctrico; a sua velocidade* v_0 *manter-se-ia constante até à entrada da coroa esférica e portanto no interior desta teria uma trajectória circular devido ao campo magnético existente, mas seria caracterizada por um raio de curvatura maior* ($r \propto v$)*. Assim, se antes tínhamos a bala a ricochetear saindo da coroa esférica (e atingindo o ladrão), agora esta ficaria a ricochetear eternamente (!!!) no interior da coroa.*