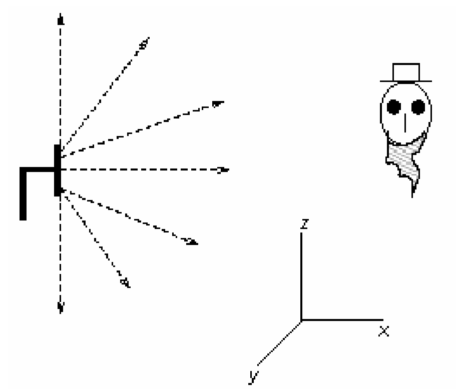
1.1.

Como a emissão é isotrópica e a área das barbas é muito pequena comparada com a distância a que se encontra do emissor, a fracção de intensidade de radiação que nelas incide é dada pela proporção entre a área das barbas e a área delimitada pela emissão, de acordo com a figura. Assim, temos

$$\frac{I_{incidente}}{I_{radiação}} = \frac{A}{4\pi d^2} = \frac{10.25.10^{-2}}{4\pi.10^2} = 1.99.10^{-3}$$

1.2. a)



O vector de Poynting define-se como

$$S = E \times H = E \times \frac{B}{\mu_0}$$

Para o calcularmos necessitamos das expressões dos campos eléctrico e magnético.

Seja E_0 a amplitude da onda associada ao campo eléctrico. Sabendo que o campo eléctrico incidente nas barbas se propaga no sentido positivo de x e tem polarização circular direita, este pode escrever-se como

$$E_y = E_0 cos(\omega t - \kappa x)$$
$$E_z = E_0 sin(\omega t - \kappa x)$$

Sendo ω a frequência angular e κ o número de onda.

O campo magnético associado tem a forma

$$B = \frac{E \times n}{c}$$

obtendo-se

$$B = \frac{1}{c}(E_y.u_y + E_z.u_z) \times u_x = \frac{1}{c}(E_z.u_y - E_y.u_z)$$

Assim, o vector de Poyting é dado por

$$S = \frac{1}{\mu_0 c}(E_z.u_y - E_y.u_z) \times (E_y.u_y + E_z.u_z) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}(E_z^2 + E_y^2) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, E_0^2$$

De acordo com o teorema de Poynting, a potência incidente nas barbas do Barbudo é igual ao fluxo de ***S*** sobre a sua superfície:

$$P = \oiint_{barbas} S.dS = \oiint_{barbas} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, E_0^2.dS = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\, E_0^2.\mathrm{A} = 6.6 \times 10^{-3} E_0^2$$

A intensidade da radiação é dada por

$$I_{radiação} = 1/2\ \epsilon_o.c \times E_0^2 = 1.32 \times 10^{-3} \times E_0^2 = 0.2\ P$$

Assim, recordando que $P = 1kW$, obtemos $I_{radiação} = 200\ W.\ m^{-2}$

1.2 b)

Da alínea anterior concluímos que

$$E_0 = \sqrt{\frac{P}{6.6 \times 10^{-3}}} = 174 V/m$$

A frequência angular e número de onda da radiação são

$\omega = 2\pi.f = 6.28 \times 10^{10}\ rad.s^{-1}$

$\kappa = 2\pi / \lambda = 2\pi.f / c = \omega / c = 209\ rad.m^{-1}$

As expressões para os campos eléctrico e magnético são então

$E_y = 174 \cos (6.28 \times 10^{10} t - 209x)$ (V/m)

$E_z = 174 \sin (6.28 \times 10^{10} t - 209x)$ (V/m)

$B_y = 5.8 \times 10^{-7} \sin(6.28 \times 10^{10} t - 209x)$ (T)

$B_z = -5.8 \times 10^{-7} \cos(6.28 \times 10^{10} t - 209x)$ (T)

1.3

Para avaliarmos a eficácia da protecção fornecida pelo capuz, calculamos qual a atenuação da amplitude da onda incidente após atravessar o comprimento do dito, através do factor dado:

$\Delta = 1 / \sqrt{4\pi \mu_0 f \sigma} = 8.5 \times 10^{-7}\ m$

Imediatamente se vê que a atenuação é enorme, podendo considerar que o campo é efectivamente anulado pela protecção; rigorosamente, a amplitude do campo após atravessar o capuz é de

$$exp(-0.1\ mm / 8.5 \times 10^{-7}\ m) \times E_0 = 1.28 \times 10^{-51} \times E_0$$

1.4

Repetindo os cálculos anteriores, mas com a condutividade da água, obtemos

$$\Delta' = 1 / \sqrt{4\pi \mu_0 f \sigma'} = 2.5 \times 10^{-3}\ m$$

Agora o comprimento característico da atenuação (o comprimento de penetração) é da ordem da espessura do capuz, pelo que esperamos uma pequena atenuação:

$$exp(-1\ mm / 2.5\ mm) \times E_0 = 0.779 \times E_0$$

Assim, neste caso 77.9 % da radiação ainda atinge o Barbudo! A arma deve ter uma potência 1/0.779 = 1.283 superior, de modo a queimar as barbas do meliante. Sabendo que tal sucede quando nelas incide 1 kW, e relembrando o factor geométrico calculado na primeira alínea, temos

$$P_{arma} = 1.283 \times 1 / 1.99 \times 10^{-3} = 644.7\ kW$$

2.1

A velocidade da luz no meio obtém-se facilmente:

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu.\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r.\epsilon_0\epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_0}.\sqrt{\mu_r.\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r.\epsilon_r}} \quad \frac{c}{\sqrt{4.1}} = \frac{c}{2} = 1.5\ \times 10^8 m/s$$

Idem para o índice de refracção:

$$n = \frac{c}{c'} = 2$$

2.2

Visto que as componentes da onda paralela e perpendicular ao plano de incidência têm a mesma amplitude, a polarização pode ser circular (esquerda ou direita) ou linear a ±45º, de acordo com as seguintes expressões:

linear a 45º

$E_\parallel = E_0 \cos(\omega t - \kappa.\mathbf{n})$

$E_\perp = E_0 \cos(\omega t - \kappa.\mathbf{n})$

linear a -45º

$E_\parallel = E_0 \cos(\omega t - \kappa.\mathbf{n})$

$E_\perp = -E_0 \cos(\omega t - \kappa.\mathbf{n})$

circular direita

$E_\parallel = E_0 \cos(\omega t - \kappa.\mathbf{n})$

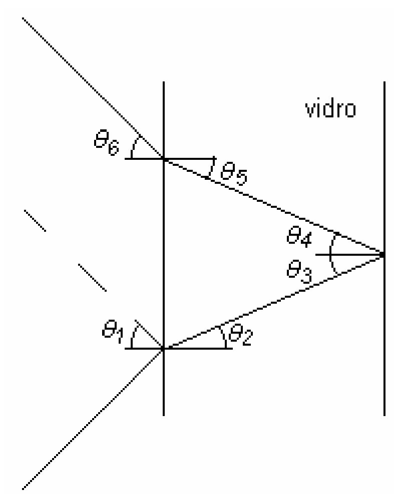
$E_\perp = E_0 \sin(\omega t - \kappa.\mathbf{n})$

circular esquerda

$E_\parallel = E_0 \cos(\omega t - \kappa.\mathbf{n})$

$E_\perp = -E_0 \sin(\omega t - \kappa.\mathbf{n})$

2.3



Analisemos a figura; pela lei de Snell (recorde-se que $n_{ar} = 1$),

$\sin\theta_1 = n \,.\, \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \text{Arcsin}(\sin\theta_1 / n)$

Por construção, vemos que o ângulo de refracção θ_2 e o ângulo de incidência θ_3 são iguais; θ_4 também é igual a θ_3, pois resulta da reflexão de uma onda; também por construção verificamos que θ_5 é igual a θ_4. Temos então que $\theta_5 = \theta_2$. Aplicando a lei de Snell à transmissão da onda do vidro para o ar, temos

$n \,.\, \sin \theta_5 = \sin \theta_6 \Leftrightarrow \theta_6 = \text{Arcsin}\,(n \,.\, \sin \theta_6) = \text{Arcsin}\,(n \,.\, \sin \theta_2) =$
$\text{Arcsin}\,(n \,.\, \sin (\,\text{Arcsin}\,(\sin \theta_1 / n)) = \text{Arcsin}\,(\,n \,.\, \sin \theta_1 / n) = \text{Arcsin}\,(\sin\theta_1) = \theta_1$

Concluimos então que $\theta_6 = \theta_1$. Assim, a onda só ficaria "presa" dentro do vidro, isto é, $\theta_6 = 90^o$, se incidisse com $\theta_1 = 90^o$ (ou seja, se não incidisse)! Neste caso, incide a 45º e é transmitida novamente para o ar também a 45º, de acordo com a figura atrás (e o senso comum!).

2.4

Encontremos primeiro o ângulos de transmissão do ar para o vidro, pela lei de Snell:

$\theta_2 = \text{Arcsin}\,(\sin \theta_1 / n) = \text{Arcsin}\,(\sin 45^o / 2) = 20{,}7^o$

Desprezando as reflexões múltiplas, temos de considerar apenas as transmissões ar-vidro e vidro-ar, aplicando os coeficientes de Fresnel de transmissão para as componente normal ou paralela ao plano de incidência:

transmissão ar-vidro:

$$\frac{E_{\parallel 2}}{E_{\parallel 1}} = \frac{2}{\dfrac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)} + \dfrac{n_{vidro}}{n_{ar}}} = \frac{2}{\dfrac{\cos(20{,}7^o)}{\cos(45^o)} + 2} = 0.6$$

$$\frac{E_{\perp 2}}{E_{\perp 1}} = \frac{2}{\dfrac{n_{vidro}}{n_{ar}}\dfrac{\cos(\theta_2)}{\cos(\theta_1)} + 1} = \frac{2}{2\dfrac{\cos(20{,}7^o)}{\cos(45^o)} + 1} = 0.548$$

transmissão vidro-ar:

$$\frac{E_{\parallel 1'}}{E_{\parallel 2}} = \frac{2}{\dfrac{\cos(\theta_1)}{\cos(\theta_2)} + \dfrac{n_{ar}}{n_{vidro}}} = \frac{2}{\dfrac{\cos(45^o)}{\cos(20{,}7^o)} + 0.5} = 1.59$$

$$\frac{E_{\perp 1'}}{E_{\perp 2}} = \frac{2}{\dfrac{n_{ar}}{n_{vidro}}\dfrac{\cos(\theta_1)}{\cos(\theta_2)} + 1} = \frac{2}{0.5\dfrac{\cos(45^o)}{\cos(20{,}7^o)} + 1} = 1.45$$

Assim, a relação entre as componentes do campo eléctrico no ar, antes e depois da entrada no vidro, é

$E_{\parallel 1'} / E_{\parallel 1} = 0.6 \times 1.59 = 0.955$ $\qquad$ $E_{\perp 1'} / E_{\perp 1} = 0.548 \times 1.45 = 0.7946$

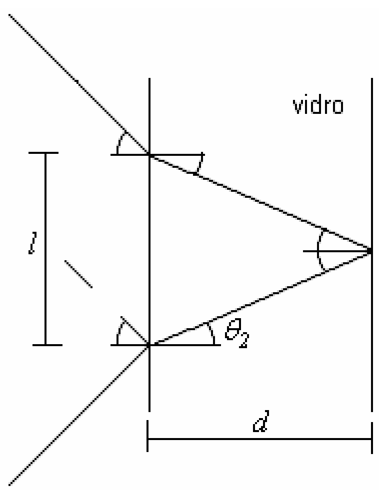
A fracção de energia devolvida obtém-se calculando a razão entre a intensidade da onda incidente e da onda “devolvida”; como a onda é polarizada a 45º temos a relação $E_\perp = E_\parallel$:

$$\frac{I_{devolvida}}{I_{incidente}} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E^2_{devolvida}}{\frac{1}{2}\varepsilon_0 c E^2_{incidente}} = \frac{E^2_{devolvida}}{E^2_{incidente}} = \frac{E^2_{\perp 1'} + E^2_{\parallel 1'}}{E^2_{\perp 1} + E^2_{\parallel 1}} = \frac{E^2_{\perp 1'} + E^2_{\parallel 1'}}{2E^2_{\perp 1}} =$$

$$\frac{E^2_{\perp 1'}}{2E^2_{\perp 1}} + \frac{E^2_{\parallel 1'}}{2E^2_{\perp 1}} = \frac{E^2_{\perp 1'}}{2E^2_{\perp 1}} + \frac{E^2_{\parallel 1'}}{2E^2_{\parallel 1'}} = 0.5 \times (0.6 \times 1.59)^2 + 0.5 \times (0.548 \times 1.45)^2 = 0.77$$

Concluimos então que a energia devolvida pelo espelho é 77 % da energia neste incidente.

2.5



Da figura retiramos a seguinte relação trignométrica:

$tg\ \theta_2 = l/2\ /\ d \Rightarrow l = 2d\ tg\ \theta_2 = 2 \times 4 \times tg\ 20.7^o = 3\ mm$

Sabemos assim que a onda abandona o espelho 3 mm afastada do ponto de incidência (e reflexão), no ponto 2. Esta imagem que viaja no vidro é uma imagem fantasma porque, devido às duas transmissões sofridas, terá uma amplitude mais fraca que a imagem proveniente de 1, pois esta sofre apenas uma reflexão.