NOTAS DE CÁLCULO ANALÍTICO

PARA APOIO DE FÍSICA II (LEEC)

FERNANDO BARÃO

DEP. FISICA
IST

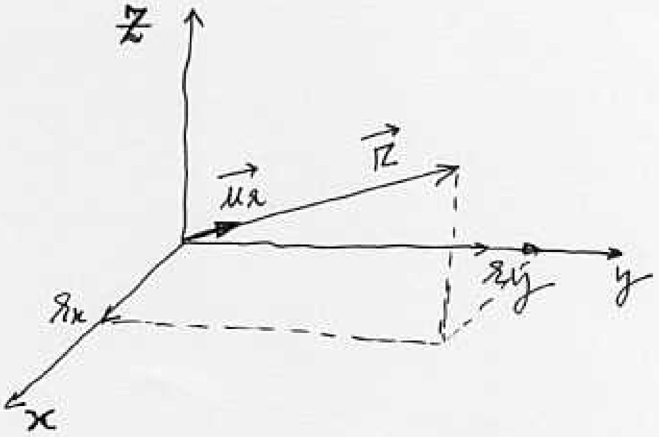
2001-2002 / ~~1~~ 2º SEM

F. BARAO
(DEP. FISICA/IST
2001-2002)

NOTAS SOBRE CÁLCULO ...

VECTORES

Representação de um vector em coordenadas cartesianas:



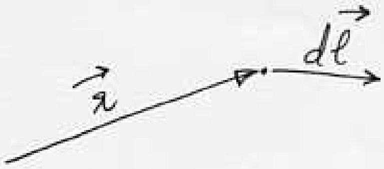
$$\boxed{\vec{r} = r_x \vec{e_x} + r_y \vec{e_y} + r_z \vec{e_z}}$$

O versor de um vector $\vec{r}$:

$$\boxed{\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{r_x \vec{e_x} + r_y \vec{e_y} + r_z \vec{e_z}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}}$$

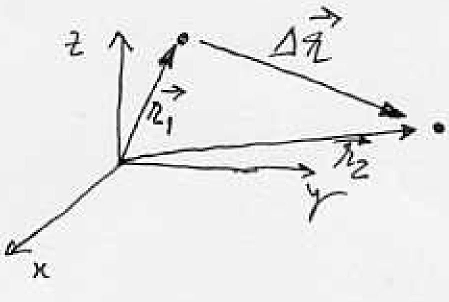
vector deslocamento infinitesimal:

$$\boxed{\vec{dl} = dx\, \vec{e_x} + dy\, \vec{e_y} + dz\, \vec{e_z}}$$



vector distância entre dois pontos:

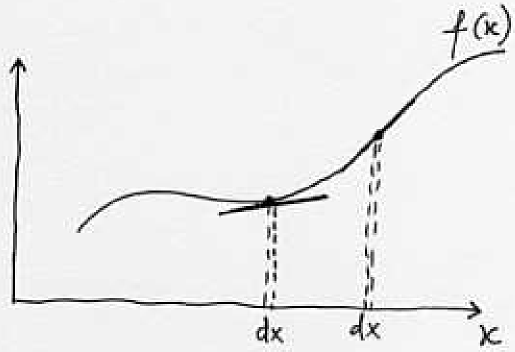
$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r_2} - \vec{r_1}$$



DERIVADAS

A derivada de uma função diz-nos quão rapidamente a função varia.

$$\boxed{df = \left(\frac{df}{dx}\right) dx}$$



Em termos geométricos a derivada representa o declive da curva em cada ponto.

gradiente

Generalizemos a noção de derivada a funções com mais do que uma variável.

$T(x,y,z)$ ≡ temperatura de uma sala [função escalar]

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right) dz$$

$$dT = \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)}_{\vec{\nabla} T} \cdot \underbrace{(dx, dy, dz)}_{d\vec{\ell}}$$

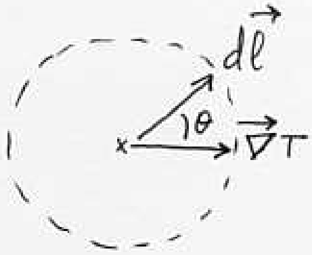
$$\boxed{dT = \vec{\nabla} T \cdot d\vec{\ell}}$$

onde: $\vec{\nabla} T$ ≡ gradiente da função T ou gradiente de T

Bibliografia: Feynman, Vol. II

Ou seja, a variação da função $T(x,y,z)$ depende da direcção ($d\vec{\ell}$) explorada, havendo um número infinito de direcções...

$$dT = \vec{\nabla}T \cdot d\vec{\ell} = |\vec{\nabla}T| \cdot |d\vec{\ell}| \cos\theta$$



Isto é, o gradiente da função T aponta na direcção onde a sua variação é máxima.

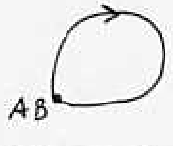
Exercícios:

1. calcular o gradiente da seguintes funções:
   a) $\vec{\nabla}(|\vec{r}|) \equiv \vec{\nabla}(r)$
   b) $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}|}\right) \equiv \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)$

2. Mostrar que $\vec{\nabla}V$ é normal em cada ponto à superfície $V = c^{te}$, que passa por esse ponto. (Problema das equipotenciais em electroestática)

3. Mostrar que a circulação de um vector gradiente ao longo de um contorno fechado, é nula.

$$\oint \vec{\nabla}V \cdot d\vec{\ell} = 0$$



SISTEMAS DE COORDENADAS ESFÉRICAS

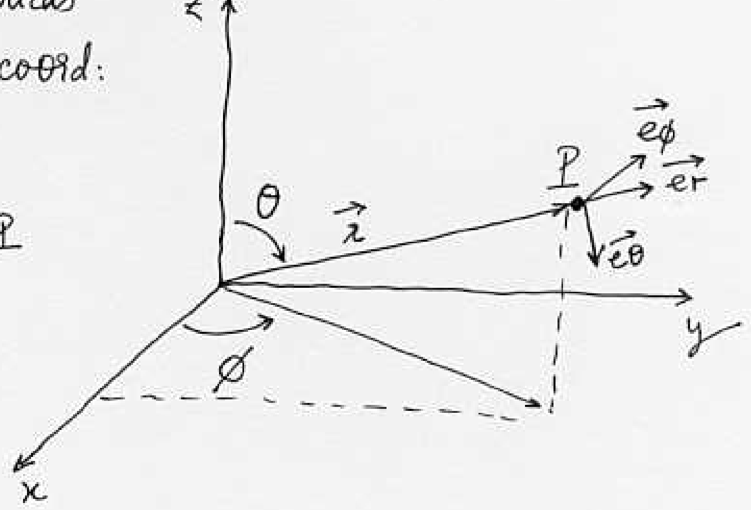
O sistema de coord. esféricas envolve as seguintes coord:

(r, θ, ϕ)

$r \equiv$ distância ao ponto P

$\theta \equiv$ ângulo polar

$\phi \equiv$ ângulo azimutal



A relação entre coordenadas cartesianas e esféricas:

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Os versores:

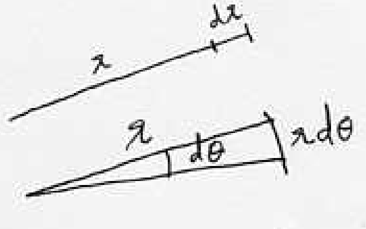
$$\vec{e_r} = \sin\theta \cos\phi \, \vec{e_x} + \sin\theta \sin\phi \, \vec{e_y} + \cos\theta \, \vec{e_z}$$

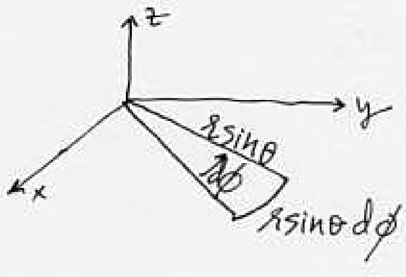
$$\vec{e_\theta} = \cos\theta \cos\phi \, \vec{e_x} + \cos\theta \sin\phi \, \vec{e_y} - \sin\theta \, \vec{e_z}$$

$$\vec{e_\phi} = -\sin\phi \, \vec{e_x} + \cos\phi \, \vec{e_y}$$

vetor deslocamento elementar:

$$\boxed{d\vec{l} = dr \, \vec{e_r} + r d\theta \, \vec{e_\theta} + r \sin\theta \, d\phi \, \vec{e_\phi}}$$



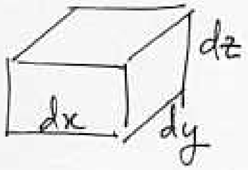


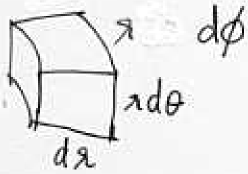
elemento de volume

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz \qquad \text{(coord. cartesianas)}$$

$$dv = dr \cdot r\,d\theta \cdot r \sin\theta\, d\phi$$

$$= r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad \text{(coord. esféricas)}$$





Exercícios:

1. Calcular a área de uma superfície esférica.
2. Calcular o volume de uma esfera.

gradiente em coordenadas esféricas

Vimos que o gradiente da função $T(x,y,z)$ é dado pelo vector,

$$\vec{\nabla} T \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \equiv \frac{dT}{d\vec{l}}$$

A forma simples de escrever o gradiente num novo sistema de coordenadas (por exemplo, as coord. esféricas) é ter em conta os novos deslocamentos elementares:

cartesianas	esféricas
$dx \longrightarrow$	dr
$dy \longrightarrow$	$r\,d\theta$
$dz \longrightarrow$	$r \sin\theta\, d\phi$

$\Longrightarrow$

Cartesianas	esféricas
$\frac{\partial}{\partial x} \longrightarrow$	$\frac{\partial}{\partial r}$
$\frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow$	$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$
$\frac{\partial}{\partial z} \longrightarrow$	$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$

Donde, em coord. esféricas o gradiente é:

$$\boxed{\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi}\vec{e_\phi}}$$

EXERCÍCIOS:

1. Considere a função potencial criada por uma carga num ponto a uma distância r da carga dada por:

$$V(x,y,z) = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Determine o gradiente da função V da forma mais simples.

DIVERGÊNCIA

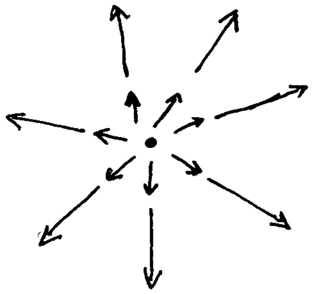
A divergência de uma função vectorial (campo vectorial, como o é o campo eléctrico $\vec{E}$) expressa-se como:

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(E_x, E_y, E_z\right) = \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

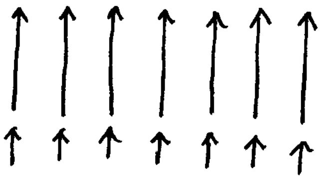
O resultado é um valor <u>escalar</u>, ou seja não há direcção nem sentido associados.

A divergência mede o grau de variação em direcção e valor da função vectorial; isto é, o seu espalhamento.

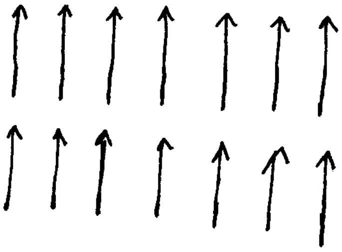
Nas figuras ao lado representam-se graficamente três funções vectoriais $\vec{E}$. Nos casos (A) e (B) a função varia, seja em direcção e valor (A), seja em valor (B); no caso (C) a função é constante. Donde será de esperar uma divergência <u>não nula</u> nos casos (A) e (B) e <u>nula</u> no caso (C).



(A)



(B)



(C)

EXERCÍCIOS:

Considere as funções representadas graficamente nas figuras:

(A) $\vec{E} = \vec{r} = x\,\vec{e_x} + y\,\vec{e_y} + z\,\vec{e_z}$

(B) $\vec{E} = z\,\vec{e_z}$

(C) $\vec{E} = a\,\vec{e_z}$ $\quad (a = c^{\underline{te}})$

Determine a divergência das diferentes funções.