



UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Desenvolvimento de um método de reconstrução autónoma de velocidade e direcção de raios cósmicos carregados

*Aplicação aos dados colectados com o protótipo RICH da experiência
AMS*

Rui Miguel Faísca Rodrigues Pereira

Projecto Final da Licenciatura em Eng. Física Tecnológica

Orientador: Prof. Doutor Fernando José de Carvalho Barão

Lisboa, Outubro de 2003



Conteúdo

Conteúdo	2
Lista de Figuras	5
Lista de Tabelas	7
Introdução	9
1 A experiência AMS	11
1.1 Raios cósmicos	11
1.2 A experiência AMS	12
1.3 O detector AMS 02	14
1.4 O efeito de Čerenkov	15
1.5 O detector RICH	16
2 Reconstrução de trajectórias	21
2.1 Motivações para uma reconstrução autónoma	21
2.2 Emissão de fotões Čerenkov	22
2.3 Refracção dos fotões	24
2.4 Algoritmo de reconstrução	26
2.5 Relação fundamental entre ângulos	27
2.6 Método de Newton-Raphson	28
2.7 Aplicação do método à reconstrução	29
2.8 Soluções equivalentes e sua redução ao 1 ^o quadrante em θ e θ_c	30
2.9 Ambiguidade da reconstrução com três fotões	31
2.10 Definição de uma reconstrução correcta	33

2.11	Incerteza nos pontos de impacto	34
2.12	Seleção de reconstruções	34
2.13	Escalas características de erro e clusterização	37
3	Resultados obtidos	39
3.1	Reconstrução de eventos reais	40
3.1.1	Reconstrução em θ	43
3.1.2	Reconstrução em ϕ	46
3.1.3	Reconstrução em θ_c	46
3.1.4	Ajuste dos pontos às curvas reconstruídas	48
3.2	Reconstrução de eventos simulados	49
3.2.1	Dependência com o número de fótons	50
3.2.2	Dependência em θ	60
3.3	Assimetria dos padrões reconstruídos	65
	Conclusões	67
	Bibliografia	71

Lista de Figuras

1.1	Espectro em energia dos raios cósmicos primários	12
1.2	O detector AMS 01 no vaivém Discovery em 1998	13
1.3	Visão artística de AMS 02 na Estação Espacial Internacional	13
1.4	Vista expandida do detector AMS 02	14
1.5	Detector RICH - vista em perspectiva	17
1.6	Detector RICH - vista em corte	17
1.7	Guia de luz - vista em perspectiva	18
1.8	Elemento da matriz de detecção	18
2.1	Emissão Čerenkov no detector RICH	22
2.2	Eficiência quântica dos fotomultiplicadores	25
2.3	Definição de α em função de θ_i e θ_r	25
2.4	Padrões com 1, 2, 3 e 4 reconstruções	32
2.5	Padrões com 5, 6, 7 e 8 reconstruções	33
2.6	Padrão com uma só reconstrução aceitável	35
2.7	Padrões com duas reconstruções aceitáveis	36
2.8	Reconstrução errada baseada em pontos próximos	37
3.1	Protótipo do detector RICH	39
3.2	Distribuição do erro em x e y	41
3.3	Distribuição do erro em θ_c	41
3.4	Evento com bom acordo entre reconstruções	42
3.5	Evento apenas com reconstrução autónoma	42
3.6	Reconstrução em θ	43
3.7	Erro na reconstrução em θ	44
3.8	Erro na reconstrução em θ em função do número de fótons no “cluster”	45

3.9	Erro na reconstrução em ϕ	45
3.10	Reconstrução em θ_c	47
3.11	Erro na reconstrução em θ_c	47
3.12	Erro na reconstrução em θ_c em função do número de fotões no “cluster”	48
3.13	Distância de um ponto a uma curva	48
3.14	Distribuição da distância típica dos pontos de impacto às curvas . . .	49
3.15	Reconstrução simulada em θ com 5 a 20 fotões para $\theta = 10^\circ$ e $\theta_c = 13.86^\circ$	50
3.16	Reconstrução simulada em ϕ com 5 a 20 fotões para $\theta = 10^\circ$ e $\theta_c =$ 13.86°	52
3.17	Reconstrução simulada em θ_c com 5 a 20 fotões para $\theta = 10^\circ$ e $\theta_c =$ 13.86°	53
3.18	Reconstrução simulada em θ com 5 a 20 fotões para $\theta = 30^\circ$ e $\theta_c = 13.86^\circ$	55
3.19	Reconstrução simulada em ϕ com 5 a 20 fotões para $\theta = 30^\circ$ e $\theta_c =$ 13.86°	57
3.20	Reconstrução simulada em θ_c com 5 a 20 fotões para $\theta = 30^\circ$ e $\theta_c =$ 13.86°	59
3.21	Reconstrução simulada em θ com 10 fotões para θ variável entre 0° e 30°	61
3.22	Reconstrução simulada em ϕ com 10 fotões para θ variável entre 0° e 30°	62
3.23	Reconstrução simulada em θ_c com 10 fotões para θ variável entre 0° e 30°	64
3.24	Semieixos maior e menor de uma elipse	66
3.25	Assimetria do padrão em função de θ	67

Lista de Tabelas

3.1	Características do protótipo RICH	40
3.2	Reconstrução em $\theta = 10^\circ$ em função do número de fótons	51
3.3	Reconstrução em $\phi = 180^\circ$ com $\theta = 10^\circ$ em função do número de fótons	54
3.4	Reconstrução em $\theta_c = 13.86^\circ$ com $\theta = 10^\circ$ em função do número de fótons	54
3.5	Reconstrução em $\theta = 30^\circ$ em função do número de fótons	56
3.6	Reconstrução em $\phi = 180^\circ$ com $\theta = 30^\circ$ em função do número de fótons	58
3.7	Reconstrução em $\theta_c = 13.86^\circ$ com $\theta = 30^\circ$ em função do número de fótons	58
3.8	Reconstrução em θ em função de θ	60
3.9	Reconstrução em $\phi = 180^\circ$ em função de θ	63
3.10	Reconstrução em $\theta_c = 13.86^\circ$ em função de θ	65

Introdução

O presente trabalho teve como objectivo desenvolver um algoritmo de reconstrução da velocidade e direcção de raios cósmicos carregados a partir dos sinais produzidos no detector RICH (Ring Imaging Čerenkov) da experiência AMS (Alpha Magnetic Spectrometer) [1] por cada partícula e pela radiação Čerenkov a ela associada.

Este projecto foi realizado no Laboratório de Instrumentação e Física Experimental de Partículas (LIP) sob a orientação do Prof. Doutor Fernando Barão, como Projecto Final da Licenciatura em Engenharia Física Tecnológica do Instituto Superior Técnico durante o ano lectivo de 2002/03.

Capítulo 1

A experiência AMS

1.1 Raios cósmicos

A expressão “raios cósmicos” designa genericamente o fluxo de partículas de elevada energia existente no espaço, e que atinge o planeta Terra e a região envolvente.

A existência desta radiação cósmica foi descoberta em 1912 por Victor Hess através da realização de experiências em balão que demonstraram existir um aumento da intensidade da radiação medida com a altitude.

A detecção directa de raios cósmicos primários carregados é impossível na superfície terrestre. A interacção das partículas constituintes dos raios cósmicos com a atmosfera dá origem a novas partículas - raios cósmicos secundários - e só estas são detectadas ao nível do mar.

A radiação cósmica primária compõe-se de partículas carregadas, principalmente prótons (mais de 90%), estando presentes em menor quantidade deuterões, núcleos atómicos com $Z \geq 2$, electrões, positrões e antiprótons. Partículas neutras (fótons e neutrinos) estão também presentes nos raios cósmicos.

Na figura 1.1 apresenta-se o espectro em energia de vários núcleos presentes nos raios cósmicos primários.

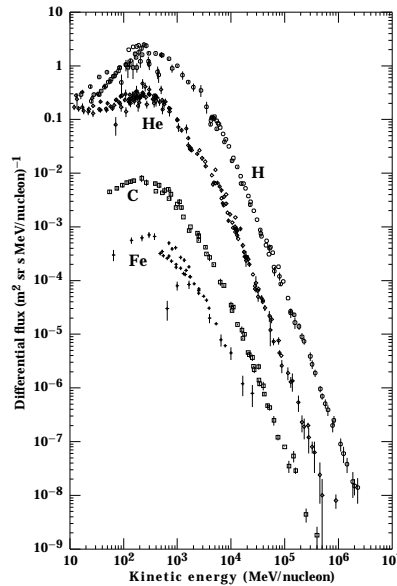


Figura 1.1: *Espectro em energia dos raios cósmicos primários* [2]

De acordo com a sua origem, os raios cósmicos são classificados como solares, galácticos ou extra-galácticos. Os mecanismos de produção e aceleração de raios cósmicos galácticos e extra-galácticos não são ainda hoje bem conhecidos. Entre as origens admitidas como possíveis para esta radiação contam-se as explosões de supernovas e as colisões de nuvens de gás interestelar [3].

1.2 A experiência AMS

O facto de não ser possível detectar directamente raios cósmicos primários na superfície terrestre conduziu à realização, ao longo do século XX, de diversas experiências de detecção de raios cósmicos em balões e satélites no seguimento do trabalho pioneiro de Hess.

A experiência AMS [4] resulta de uma vasta colaboração internacional e tem como objectivo a detecção de raios cósmicos carregados primários no espaço.

No âmbito desta experiência foi construída uma primeira versão do detector, designada AMS 01 [5], que em Junho de 1998 efectuou um voo com a duração de 10 dias a bordo do vaivém norte-americano Discovery (missão STS-91). O tempo efectivo de aquisição de dados foi de cerca de 100 horas. Na figura 1.2, AMS 01 é o objecto na parte traseira do porão.

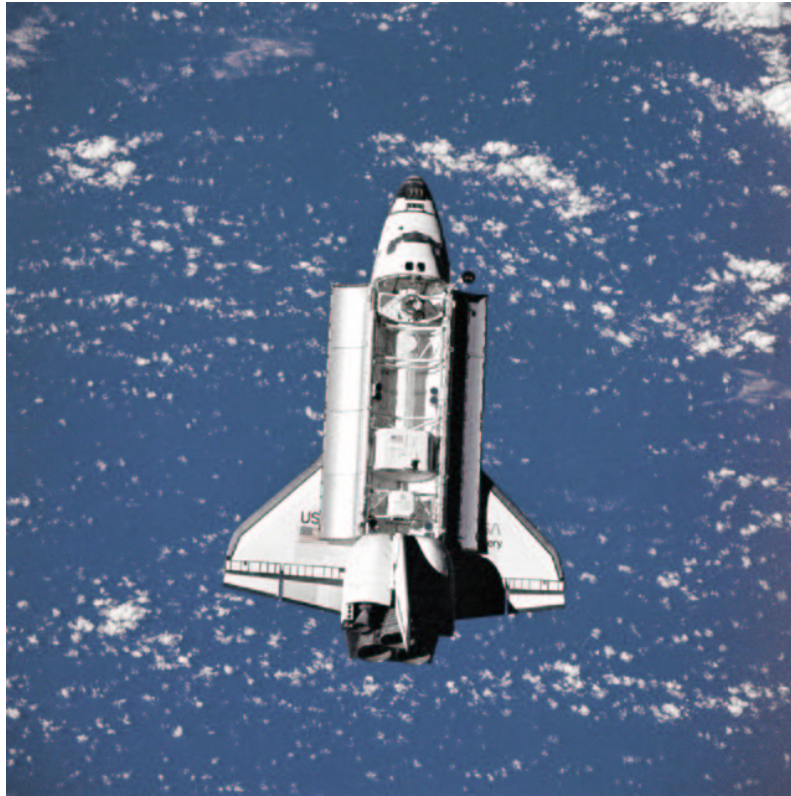


Figura 1.2: O detector AMS 01 no vaivém Discovery em 1998, visto da estação Mir [6]

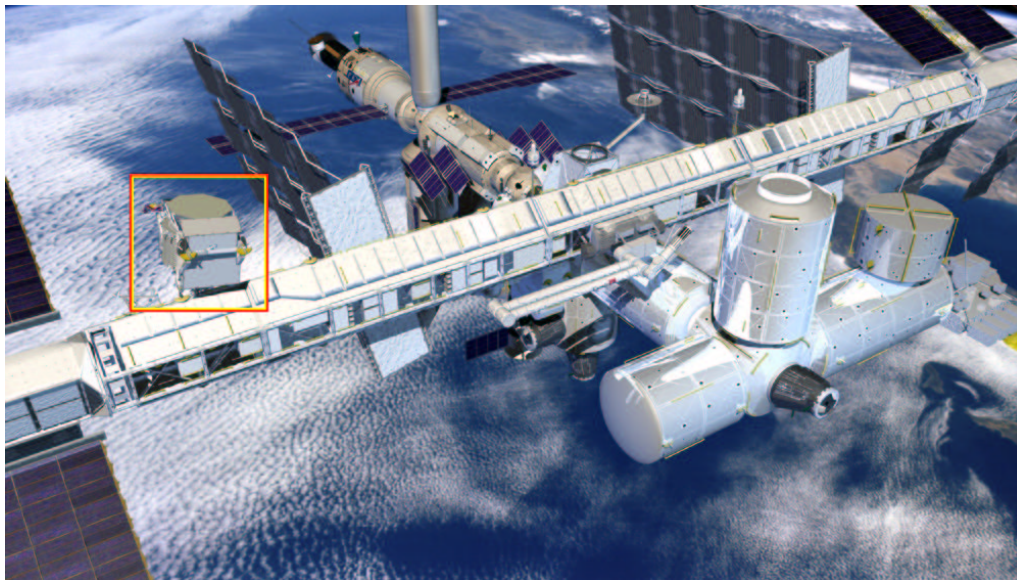


Figura 1.3: Visão artística de AMS 02 na Estação Espacial Internacional [7]

O detector definitivo, AMS 02 (figura 1.3), encontra-se actualmente em construção, estando a sua instalação na Estação Espacial Internacional prevista para

2006, seguindo-se um período de operação com a duração estimada de 3 a 5 anos a uma altitude média de cerca de 400 *km*.

1.3 O detector AMS 02

O detector AMS 02 é constituído por vários sub-detectores, tal como é usual em experiências de Física de Altas Energias. Na figura 1.4 apresenta-se uma vista expandida do detector.

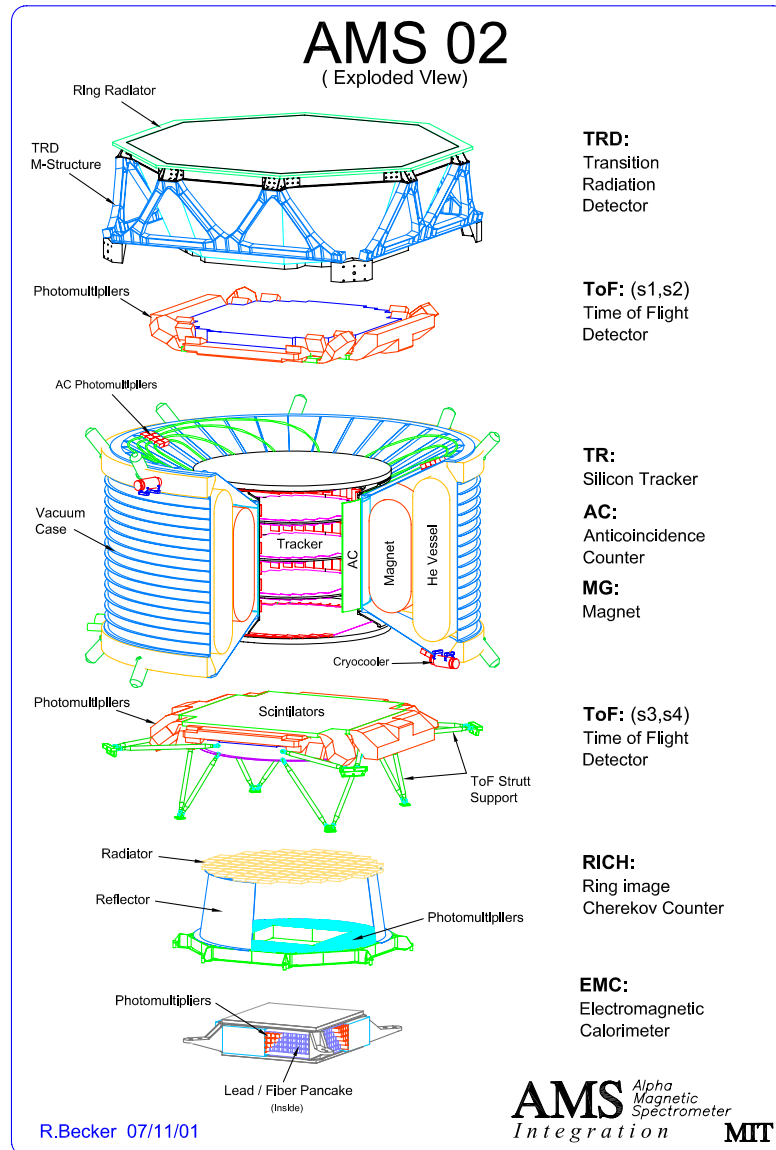


Figura 1.4: Vista expandida do detector AMS 02 [7]

No centro da estrutura encontra-se o detector de traços (Tracker), constituído por 8 planos de silício e rodeado por um magneto supercondutor refrigerado a hélio líquido. Os pontos de passagem das partículas em cada plano permitem determinar a curvatura da sua trajectória sob a influência do campo magnético produzido pelo magneto supercondutor ($0.87 T$) e consequentemente a sua rigidez.

Imediatamente acima e abaixo do detector de traços encontram-se os 4 planos do detector de tempo de voo (TOF). Cada um dos planos regista a passagem da partícula, sendo possível determinar a sua velocidade através da medida do tempo decorrido entre as passagens pelos planos superior e inferior. Será também possível estimar a carga das partículas através da medida da energia depositada.

No topo da estrutura encontra-se um detector de radiação de transição (TRD), sensível à passagem de partículas de energia muito elevada com $\gamma \gtrsim 1000$. Este detector permitirá distinguir entre prótons e positrões de energia semelhante, diminuindo o ruído no espectro de positrões.

Imediatamente abaixo dos planos inferiores do TOF encontra-se o detector de anéis de Čerenkov (RICH), que adiante será descrito em detalhe. Por baixo deste situa-se o calorímetro electromagnético (EMC), onde a interacção das partículas cósmicas produzirá uma cascata, sendo possível a detecção de fotões e a distinção entre cascatas hadrónicas e electromagnéticas.

Todo o detector será inserido numa estrutura de suporte, designada USS (Unique Support Structure).

1.4 O efeito de Čerenkov

Considere-se uma partícula carregada que percorre um meio dieléctrico cujo índice de refração é n . Se a velocidade da partícula, v , exceder a velocidade da luz no meio, isto é, se cumprir a condição

$$v > \frac{c}{n} \tag{1.1}$$

verifica-se que a partícula emite fotões segundo um ângulo θ_c relativamente à sua trajectória, sendo θ_c dado por

$$\cos \theta_c = \frac{1}{n\beta} \quad (1.2)$$

Este fenómeno designa-se Efeito de Čerenkov [8], e foi caracterizado pela primeira vez em 1934 por Vavilov e Čerenkov. A explicação deste efeito foi apresentada por Frank e Tamm no quadro da teoria electromagnética clássica.

A condição de velocidade mínima pode ser traduzida em energia, verificando-se que uma partícula de massa m emitirá radiação de Čerenkov se a sua energia E cumprir a condição

$$E > m \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}} \quad (1.3)$$

O número de fótons radiados por unidade de comprimento e energia é dado pela expressão

$$\frac{d^2 N}{dx dE} = \frac{2\pi\alpha}{hc} Z^2 \sin^2 \theta_c = \frac{2\pi\alpha}{hc} Z^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \quad (1.4)$$

O número de fótons emitidos é assim proporcional à distância percorrida e ao quadrado da carga eléctrica da partícula, aumentando com β e com n .

1.5 O detector RICH

O sub-detector RICH (figuras 1.5 e 1.6) é essencialmente constituído por um radiador (aerogel), com uma espessura $d = 3 \text{ cm}$, um espelho cónico e uma matriz de detecção de fótons constituída por cerca de 680 fotomultiplicadores acoplados a guias de luz piramidais (figuras 1.7 e 1.8).

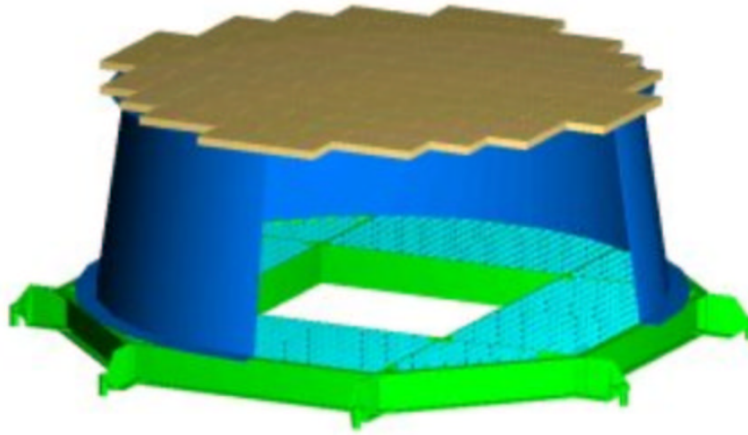


Figura 1.5: *Detector RICH - vista em perspectiva* [7]

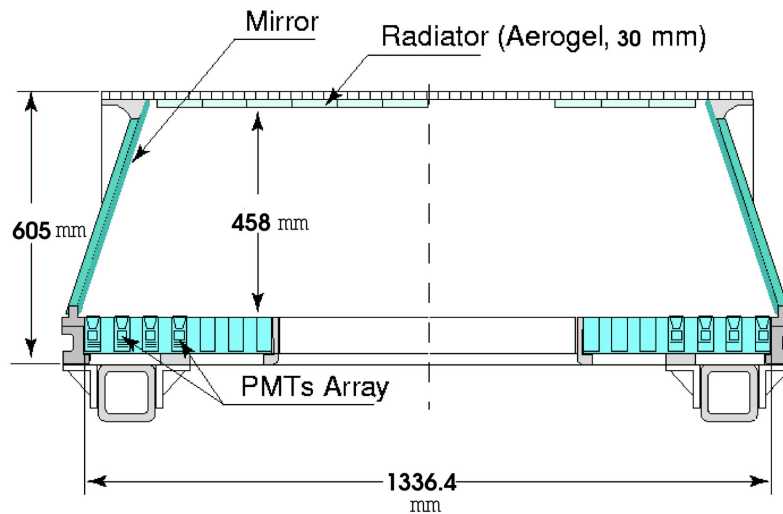


Figura 1.6: *Detector RICH - vista em corte* [7]

Em geral, as partículas incidem no detector RICH provenientes do topo. Ao atingir o radiador, uma partícula com $v > \frac{c}{n}$ emite fótons Čerenkov. A maioria dos fótons emitidos alcança a matriz, mas destes apenas será detectada uma fração determinada pela eficiência do sistema constituído pelos guias de luz e fotomultiplicadores.

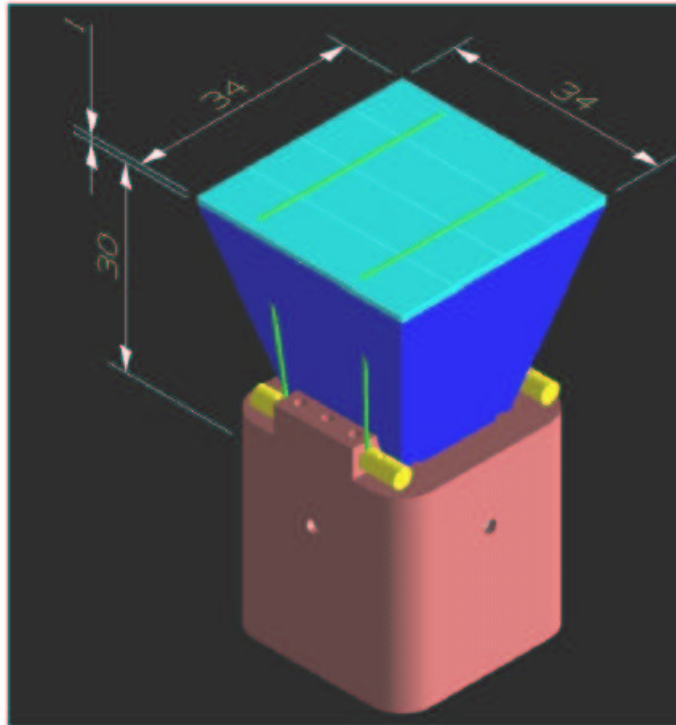


Figura 1.7: Guia de luz - vista em perspectiva [7]

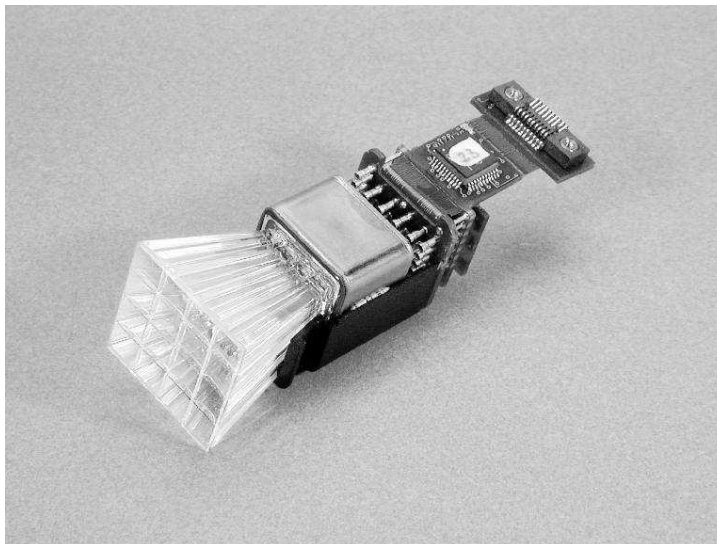


Figura 1.8: Elemento da matriz de detecção com guia de luz, fotomultiplicador e electrónica associada [9]

Uma minoria de partículas (albedo terrestre) entra no detector vinda de baixo,

produzindo trajectórias semelhantes às de uma partícula de sinal contrário proveniente do topo. O detector RICH desempenha um papel importante na exclusão destas partículas, uma vez que não produzem sinal na matriz devido ao facto de a sua emissão Čerenkov apontar para cima.

Prevê-se que no detector RICH de AMS 02 a passagem de uma partícula de carga eléctrica unitária (protão ou electrão, por exemplo) com $\beta \approx 1$ pelo radiador provocará em média a detecção de 5 fotões na matriz. Partículas com carga mais elevada permitirão a detecção de um número muito superior de fotões, pois a intensidade da radiação é proporcional a Z^2 .

O detector RICH fornece também informação relativamente ao ponto de passagem da partícula carregada na própria matriz de detecção, pois ao atravessar os guias de luz a partícula emite um número significativo de fotões por efeito de Čerenkov. Estes fotões são imediatamente detectados, produzindo um sinal concentrado facilmente identificável pela sua intensidade muito superior à dos impactos dos fotões isolados provenientes do aerogel.

Capítulo 2

Reconstrução de trajectórias

2.1 Motivações para uma reconstrução autónoma

As condições previstas de operação do detector AMS 02 tornam essencial a existência de garantias de bom funcionamento dos seus componentes. Todo o sistema deve ter a fiabilidade necessária para permanecer vários anos no espaço sem necessidade de reparações, uma vez que não está previsto qualquer tipo de manutenção para o detector.

No seu conjunto, a experiência AMS 02 apresenta alguma redundância, o que reduz os riscos associados a uma possível avaria num dos sub-detectores. Uma reconstrução óptima será obtida a partir do conjunto dos dados recolhidos pelos diversos componentes do detector. Será todavia conveniente dispor de ferramentas de análise que permitam reconstruir trajectórias e outros parâmetros, ainda que com menor exacidão, com base num volume mínimo de informação.

É neste contexto que se enquadra o presente trabalho, em que se pretendeu obter um método de reconstrução da velocidade e direcção de raios cósmicos com base nos dados recolhidos pelo detector RICH de AMS.

A programação das simulações e algoritmos de reconstrução foi realizada em linguagem C com o apoio do software de análise ROOT. No quadro mais geral da reconstrução de eventos em AMS recorreu-se também a software escrito em FORTRAN desenvolvido no LIP no âmbito da colaboração nesta experiência.

2.2 Emissão de fótons Čerenkov

Considere-se uma partícula carregada que atravessa o radiador com uma trajetória que se assume ser retilínea (figura 2.1). A partícula emitirá radiação de Čerenkov ao longo de todo o seu percurso dentro do radiador, que terá um comprimento mínimo igual a d (caso da incidência perpendicular).

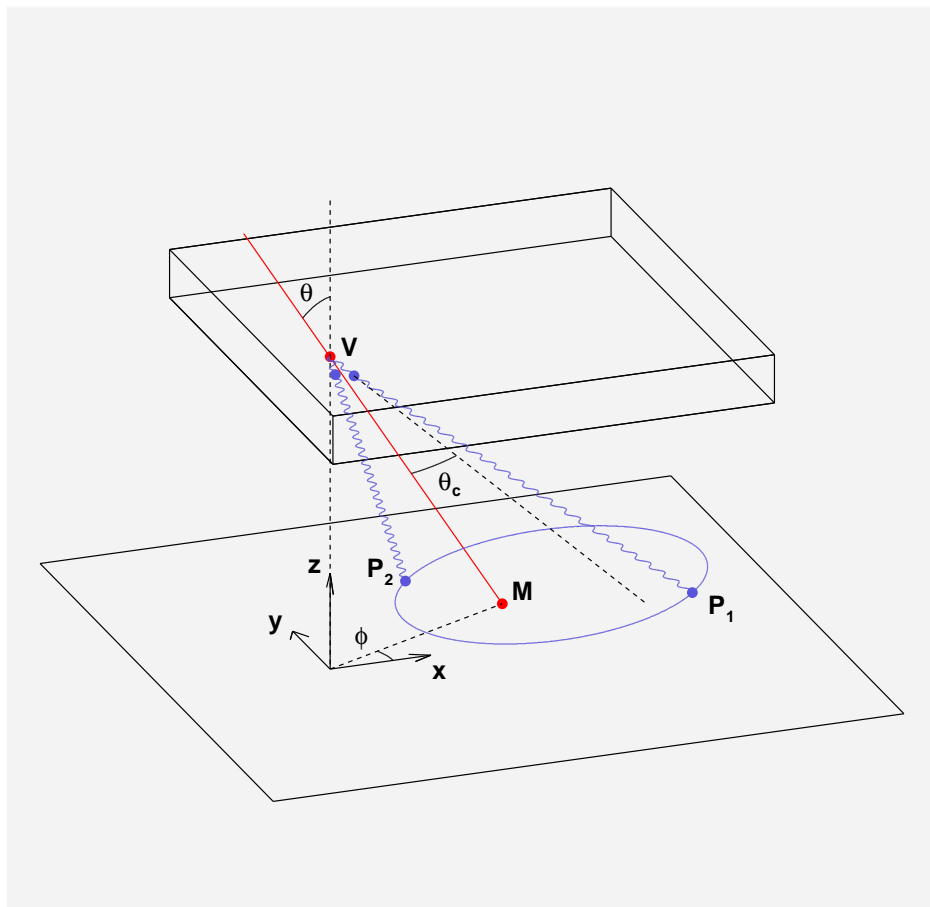


Figura 2.1: Emissão Čerenkov no detector RICH

Neste trabalho considerou-se por aproximação que toda a radiação Čerenkov gerada por uma dada partícula é emitida de um só ponto da sua trajetória no interior do radiador, localizado a uma distância fixa $h = 1.05 \text{ cm}$ da superfície inferior do mesmo. Este ponto será denominado ponto de radiação, e designado por V .

Decorre da definição anterior que todos os pontos de radiação se encontram sobre um mesmo plano paralelo às superfícies inferior e superior do radiador. Este plano

será denominado plano de radiação. Será aqui adoptado um sistema de coordenadas cartesianas tal que o eixo dos zz seja perpendicular ao plano de radiação, e fazendo corresponder este ao plano $z = 0$.

A trajectória da partícula pode ser completamente caracterizada por quatro parâmetros independentes. Por conveniência, serão utilizados os seguintes: x_V e y_V , coordenadas do ponto de radiação; θ e ϕ , os ângulos que definem a orientação da trajectória (também indicados na figura 2.1).

Na aproximação utilizada, com o sistema de coordenadas atrás definido, os fotões são emitidos a partir do ponto $V(x_V, y_V, 0)$. Caracterize-se a trajectória de um dado fotão pelos ângulos (θ_c, φ_r) medidos relativamente à trajectória da partícula carregada. Os ângulos de emissão dos fotões de Čerenkov têm as seguintes propriedades:

θ_c é constante, e dado pela expressão

$$\cos \theta_c = \frac{1}{n\beta} \quad (2.1)$$

φ_r é variável, com probabilidade uniforme no intervalo $[-\pi, \pi[$.

Estas propriedades implicam que os fotões são emitidos segundo um cone (cone de Čerenkov) com vértice em V , orientação dada por θ e ϕ e abertura igual a θ_c .

Considere-se uma partícula com uma trajectória cuja orientação é dada por (θ, ϕ) , e um fotão de Čerenkov emitido por essa partícula segundo uma orientação relativa (θ_c, φ_r) . No referencial do laboratório, o versor $u \equiv (u_x, u_y, u_z)$ da trajectória do fotão é dado por:

$$u_x = -\sin \theta_c \cos \varphi_r \cos \theta \cos \phi + \cos \theta_c \sin \theta \cos \phi - \sin \theta_c \sin \varphi_r \sin \phi \quad (2.2)$$

$$u_y = \sin \theta_c \sin \varphi_r \cos \phi - \sin \theta_c \cos \varphi_r \cos \theta \sin \phi + \cos \theta_c \sin \theta \sin \phi \quad (2.3)$$

$$u_z = -\cos \theta_c \cos \theta - \sin \theta_c \cos \varphi_r \sin \theta \quad (2.4)$$

Desta forma, as coordenadas do ponto $F \equiv (x_F, y_F, z_F)$ em que o fotão atinge a superfície inferior do radiador são dadas por:

$$x_F = x_V - h \frac{u_x}{u_z} \quad (2.5)$$

$$y_F = y_V - h \frac{u_y}{u_z} \quad (2.6)$$

$$z_F = -h \quad (2.7)$$

Como os fotões são emitidos segundo um cone, o conjunto dos pontos em que estes atingem a superfície inferior do radiador é descrito por uma das três secções cónicas: elipse (curva fechada), parábola ou hipérbole (curvas abertas).

2.3 Refracção dos fotões

Ao atingir a superfície inferior do radiador, cada fotão pode ser reflectido ou refractado. Caso o ângulo de incidência do fotão medido relativamente à vertical, θ_i , seja superior ao ângulo crítico θ_{crit} (dado pela expressão $\sin \theta_{crit} = 1/n$) existe reflexão total.

Apenas os fotões refractados podem atingir a matriz de fotomultiplicadores, pelo que será a trajectória destes a merecer atenção.

Conhecido o ângulo de incidência θ_i com que um dado fotão atinge a superfície do radiador, o ângulo de refracção, θ_r , é dado por:

$$\sin \theta_r = n \sin \theta_i \quad (\text{Lei de Snell}) \quad (2.8)$$

Depois de refractado, o fotão segue uma trajectória rectilínea (diferente da que seguira antes da refracção) até atingir a matriz de detecção ou o espelho cónico.

No presente trabalho não foram considerados os efeitos devidos à existência do espelho cónico, uma vez que este não se encontrava presente no protótipo do detector RICH testado nos ensaios aqui analisados. Assim, dependendo da sua trajectória à saída do radiador, foram consideradas apenas as possibilidades de o fotão atingir directamente a matriz de detecção ou de tal não acontecer, considerando-se nesse caso o fotão como não detectado.

O facto de um fotão atingir a matriz não implica necessariamente a sua detecção, pois esta é condicionada para eficiência quântica dos fotomultiplicadores (figura 2.2) e restantes características da matriz.

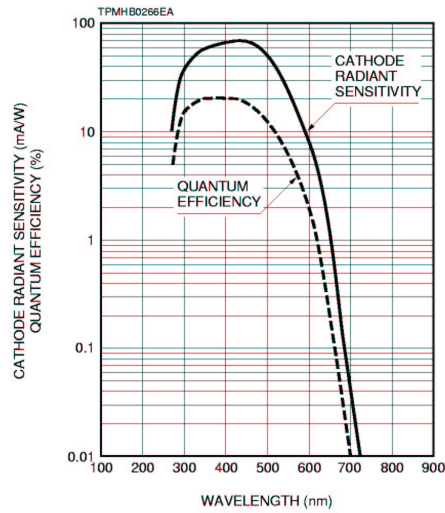


Figura 2.2: Eficiência quântica dos fotomultiplicadores em função do comprimento de onda [10]

Um outro ângulo, α (figura 2.3), pode ser definido se se considerar a linha que une o ponto de radiação, V , ao ponto de impacto do fóton na matriz, P . Sendo α o ângulo desta linha com o eixo z , o seu valor é obtido a partir de θ_i e θ_r pela expressão:

$$\tan \alpha = \frac{h \tan \theta_i + H \tan \theta_r}{h + H} \tag{2.9}$$

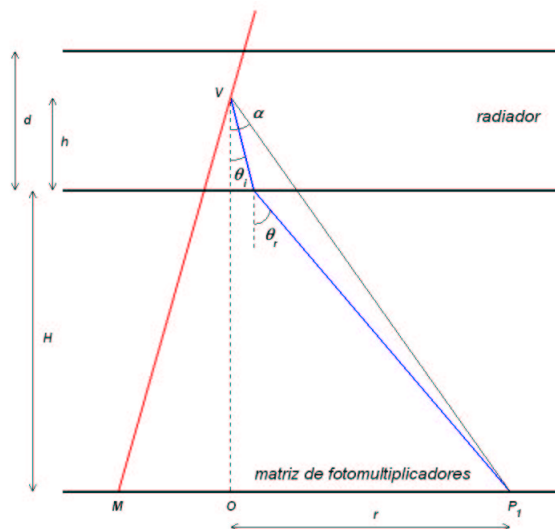


Figura 2.3: Definição de α em função de θ_i e θ_r .

O facto de α poder ser determinado directamente a partir de V e P torna esta variável conveniente para a análise do problema. Porém, a existência de refração dos fotões impede a obtenção de uma fórmula explícita para θ_i como função de α .

Este facto conduziu à utilização de um algoritmo de cálculo numérico de θ_i a partir da função inversa, $\alpha(\theta_i)$, dada por:

$$\alpha(\theta_i) = \arctan \frac{h \tan \theta_i + H \frac{n \sin \theta_i}{\sqrt{1-n^2 \sin^2 \theta_i}}}{h + H} \quad (2.10)$$

Considerando a questão da refração de todo o cone de Čerenkov, verifica-se que este sofre uma deformação ao ser refractado. A curva sobre a qual se situam os pontos de impacto dos fotões na matriz de fotomultiplicadores já não é uma cónica.

2.4 Algoritmo de reconstrução

O objectivo do algoritmo de reconstrução é determinar para cada evento as propriedades da partícula que lhe deu origem. Uma análise cuidadosa das variáveis envolvidas revela que existe um total de cinco graus de liberdade nas condições em que abordamos o problema. Nesta discussão, esses graus de liberdade foram traduzidos nas seguintes cinco incógnitas relativas ao cone de Čerenkov: duas coordenadas do vértice (x_V, y_V) , os ângulos que definem a orientação do cone (θ, ϕ) , e a abertura do cone (θ_c) . A terceira coordenada do vértice, z_V , é fixa ($z_V = 0$) na aproximação utilizada, tal como já foi referido anteriormente.

A reconstrução do cone de Čerenkov baseia-se no conhecimento do ponto de impacto da partícula carregada, M , e dos pontos de impacto de vários fotões, P_i .

Com o conhecimento do ponto M , as coordenadas do vértice do cone (x_V, y_V) deixam de ser independentes, pois ficam completamente determinadas a partir de x_M, y_M, θ e ϕ pelas relações:

$$x_M = x_V + (h + H) \tan \theta \cos \phi \quad (2.11)$$

$$y_M = y_V + (h + H) \tan \theta \sin \phi \quad (2.12)$$

O número de incógnitas da reconstrução reduz-se assim a três, correspondetes aos ângulos θ, ϕ e θ_c . Resta determinar o número de fotões necessários à reconstrução.

O conhecimento do ponto de impacto de um dado fóton adiciona dois constrangimentos ao problema, correspondentes às coordenadas do ponto em x e em y . Por outro lado, porém, considerar um fóton adicional na reconstrução implica adicionar uma incógnita: o ângulo φ_r com que o fóton foi emitido (pois, ao contrário de θ_c , que é o mesmo para todos os fótons radiados pela mesma partícula, φ_r é aleatório e varia de fóton para fóton).

Assim, partindo de um problema com três incógnitas, cada ponto adicional fornece dois constrangimentos e uma nova incógnita. Para existir possibilidade de reconstrução será necessário que o número de incógnitas iguale o de constrangimentos.

No caso em estudo, sendo N o número de fótons dados, o número de incógnitas é $N+3$, enquanto o número de constrangimentos é $2N$. Igualando das duas expressões, obtém-se $N = 3$.

Esta descrição do problema demonstra que, conhecendo o ponto de impacto da partícula carregada na matriz, são necessários pelo menos três fótons para ser possível reconstruir a curva por eles formada e conseqüentemente os parâmetros em análise: θ , ϕ , θ_c .

2.5 Relação fundamental entre ângulos

Para ser possível a determinação de uma reconstrução correcta torna-se indispensável dispor de um teste que permita determinar se um determinado conjunto de parâmetros (θ, ϕ, θ_c) se ajusta aos pontos conhecidos.

Esse teste pode ser obtido recorrendo à noção de produto interno. Para qualquer cone de Čerenkov o ângulo formado entre a direcção de emissão de um fóton e a trajetória da partícula que lhe deu origem deve ser sempre igual a θ_c , o que significa que, sendo \mathbf{e}_{part} e \mathbf{e}_γ versores das trajetórias da partícula e do fóton, respectivamente, estes verificam a relação

$$\mathbf{e}_{\text{part}} \cdot \mathbf{e}_\gamma = \cos \theta_c \tag{2.13}$$

Desenvolvendo a expressão do produto interno, obtém-se a seguinte expressão relacionando para cada fóton o ângulo de incidência com os parâmetros de emissão:

$$\cos \theta_c = \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos (\phi - \varphi_r) \quad (2.14)$$

A reconstrução aqui desenvolvida baseia-se na aplicação à expressão 2.14 do algoritmo conhecido por método de Newton-Raphson [11], que se descreve na secção seguinte.

2.6 Método de Newton-Raphson

Seja dado um sistema homogéneo de N equações a N incógnitas:

$$f_k(w_1, w_2, \dots, w_N) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.15)$$

Designando por \mathbf{W} o vector de componentes w_1, w_2, \dots, w_n , as funções f_i podem ser desenvolvidas em série de Taylor em torno de \mathbf{W} da seguinte forma:

$$f_k(\mathbf{W} + \delta\mathbf{W}) = f_k(\mathbf{W}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial f_k}{\partial w_j} \delta w_j + O(\delta\mathbf{W}^2) \quad (2.16)$$

Tomando a aproximação em que os termos de ordem $\delta\mathbf{W}^2$ e superior não são considerados, obtém-se um sistema linear homogéneo em que as incógnitas δw_i correspondem aos valores a ser somados às componentes w_i para obter um zero em todas as funções f_k .

A existência de termos de ordem superior faz com que a solução obtida não seja exacta, mas é possível iterar este procedimento de forma a obter sucessivamente aproximações mais precisas do resultado final:

$$w_j^{(n+1)} = w_j^{(n)} + \delta w_j \quad (2.17)$$

O procedimento é interrompido quando se atinge uma precisão pré-definida, isto é, quando os valores calculados para as correcções são muito pequenos ($|\delta w_j| < \epsilon$) ou as funções f_k estão suficientemente próximas de zero, significando que se atingiu uma solução do sistema original.

2.7 Aplicação do método à reconstrução

Sendo dado o ponto M de impacto de uma partícula carregada no detector, o ponto P de impacto de um fóton Čerenkov emitido pela mesma partícula, e valores tentativa de θ e ϕ , é possível calcular nestas circunstâncias, a partir da expressão 2.14, qual o ângulo θ_c com que o fóton teria sido emitido caso os valores de θ e ϕ estivessem correctos. Esse ângulo, que aqui será designado θ'_c , é dado por:

$$\begin{aligned} & \cos \theta'_c(x_M, y_M, x_P, y_P, \theta, \phi, \varphi_r) = \\ & = \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos \left[\phi - \arctan \frac{(y_P - y_M) + (h + H) \tan \theta \sin \phi}{(x_P - x_M) + (h + H) \tan \theta \cos \phi} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Na expressão anterior, $\theta_i = \theta_i(\alpha)$, calculado numericamente, e

$$\alpha = \arctan \left[\frac{\sqrt{(x_P - x_V)^2 + (y_P - y_V)^2}}{h + H} \right] \quad (2.19)$$

Substituindo as coordenadas do ponto V (vértice do cone de Čerenkov) pela sua descrição em função das coordenadas do ponto M e dos ângulos θ e ϕ , obtém-se:

$$\alpha = \arctan \left\{ \frac{\sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + 2(h+H) \tan \theta [(x_P - x_M) \cos \phi + (y_P - y_M) \sin \phi] + (h+H)^2 \tan^2 \theta}}{h + H} \right\} \quad (2.20)$$

É então possível então definir uma função diferença, Δ , da forma seguinte:

$$\Delta = \cos \theta'_c - \cos \theta_c \quad (2.21)$$

Considerando a forma como esta função como foi definida, verifica-se que ela tem necessariamente um zero no ponto em que (θ, ϕ, θ_c) correspondem aos parâmetros do cone de Čerenkov gerado pela partícula detectada em M e que contém o fóton detectado em P .

Computacionalmente, é mais prático utilizar como incógnitas as coordenadas do ponto de emissão x_V e y_V em substituição dos ângulos θ e ϕ . O método de Newton-Raphson será assim aplicado ao sistema:

$$\Delta_k(x_V, y_V, \theta_c) = 0 \quad (2.22)$$

O facto de se utilizar o método de Newton-Raphson para funções calculadas numericamente obriga a determinar também numericamente os valores das suas derivadas. Estes foram calculados utilizando a aproximação:

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \epsilon) - f(x - \epsilon)}{2\epsilon} \quad (2.23)$$

Após a aplicação do algoritmo, os resultados em x_V e y_V são convertidos nos correspondentes ângulos do cone de Čerenkov.

2.8 Soluções equivalentes e sua redução ao 1º quadrante em θ e θ_c

A simetria das funções utilizadas no método de Newton-Raphson implica que a cada solução com significado físico corresponda um total de oito soluções equivalentes no domínio completo de ângulos possíveis.

Seja (θ, ϕ, θ_c) uma solução do problema com significado físico, isto é, com θ e θ_c no primeiro quadrante $[0, \frac{\pi}{2}[$. No domínio completo $[-\pi, \pi[$ existem oito soluções equivalentes, que são as seguintes:

1. (θ, ϕ, θ_c)
2. $(\theta, \phi, -\theta_c)$
3. $(-\theta, \phi \pm \pi, \theta_c)$
4. $(-\theta, \phi \pm \pi, -\theta_c)$
5. $(\pi - \theta, \phi \pm \pi, \pi - \theta_c)$
6. $(\pi - \theta, \phi \pm \pi, \theta_c - \pi)$
7. $(\theta - \pi, \phi, \pi - \theta_c)$
8. $(\theta - \pi, \phi, \theta_c - \pi)$

A expressão $\phi \pm \pi$ deve ser interpretada como $\phi + \pi$ se $\phi < 0$, e como $\phi - \pi$ se $\phi \geq 0$.

O método de Newton-Raphson trata estas oito soluções de forma equivalente pelo que pode convergir para qualquer uma delas. É pois necessário, após cada reconstrução, reduzir o resultado obtido à solução física correspondente, o que pode ser feito utilizando o seguinte procedimento em três passos:

a) se $\theta_c < 0$, trocar o sinal de θ_c ;

b) se $\theta < 0$, trocar o sinal de θ e somar/subtrair π a ϕ (somar π se $\phi < 0$ e subtrair π se $\phi \geq 0$);

c) se $\theta > \pi/2$, substituir θ por $\pi - \theta$, substituir θ_c por $\pi - \theta_c$ e somar/subtrair π a ϕ .

O passo a) reduz todas as soluções de tipo par ao tipo ímpar imediatamente inferior, restando assim apenas soluções de tipo ímpar. O passo b) reduz as soluções de tipo 3 ao tipo 1 e as soluções de tipo 7 ao tipo 5, restando apenas soluções dos tipos 1 e 5. Finalmente, o passo c) reduz as soluções do tipo 5 ao tipo 1, sendo este o único tipo restante, correspondente aos valores de θ e θ_c com significado físico.

2.9 Ambiguidade da reconstrução com três fótons

Uma característica fundamental do método de Newton-Raphson é o facto de quando aplicado a funções com vários zeros não existir uma relação simples entre os valores introduzidos como ponto de partida e o zero para que o método converge.

A aplicação repetida do método de Newton-Raphson ao mesmo conjunto de pontos de impacto (partícula carregada + três fótons por ela emitidos), tomando diferentes pontos de partida para a iteração, permite constatar a existência, em geral, de várias soluções para o problema de reconstrução. O número destas soluções é variável, situando-se geralmente entre 2 e 4, mas podendo em certos casos atingir 7 ou 8, como se vê nos exemplos apresentados nas figuras 2.4 e 2.5.

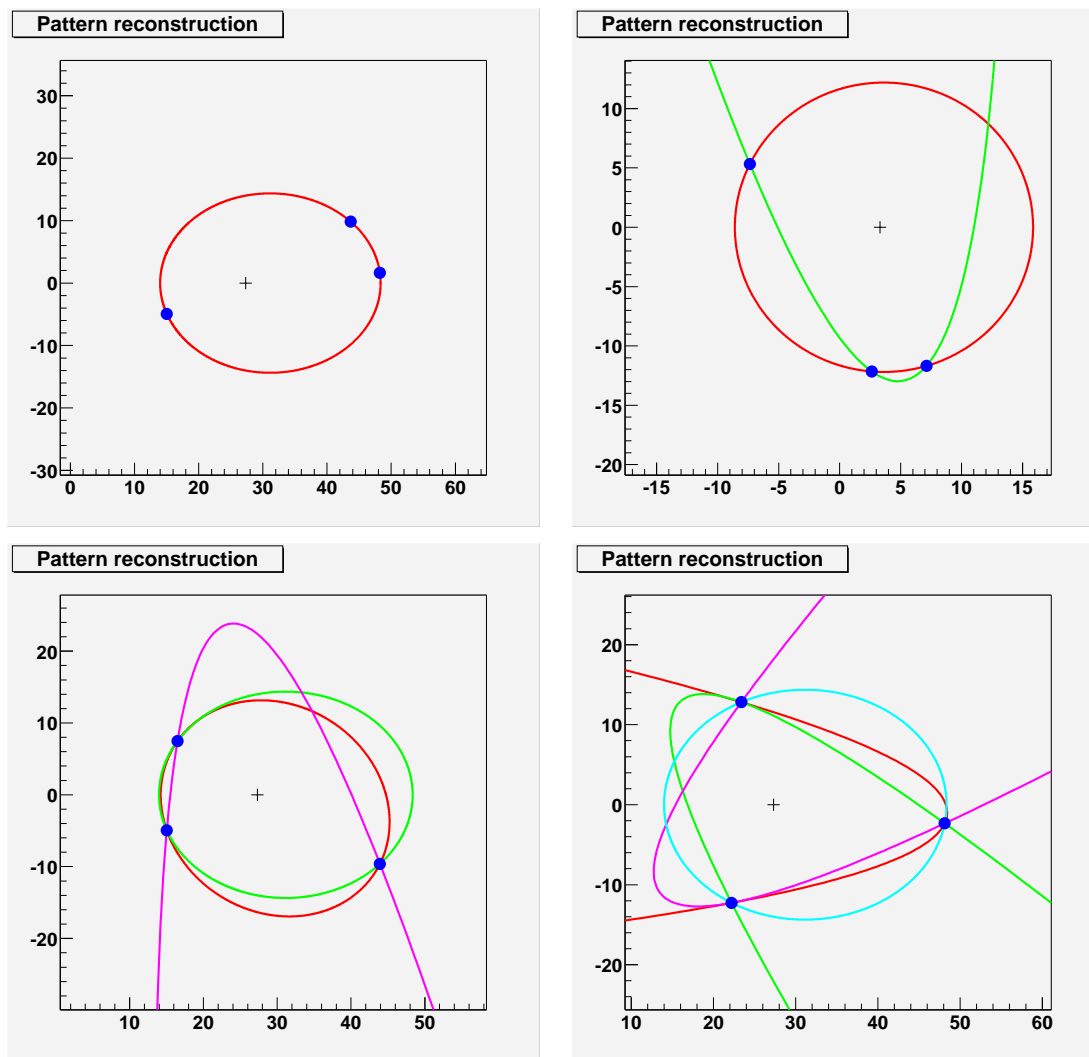


Figura 2.4: Padrões com 1, 2, 3 e 4 reconstruções (pontos de impacto: (+) partícula, (•) fotões)

A existência de várias soluções provém da não linearidade do problema, e verifica-se mesmo na versão simplificada do mesmo em que se ignora o desvio nas trajetórias dos fotões provocado pela sua refração.

Esta ambiguidade torna impossível garantir uma reconstrução correcta com apenas três fotões, mesmo no caso ideal em que os pontos de impacto são conhecidos com precisão absoluta.

A existência de uma família de zeros associados a cada solução física, tal como descrita na secção anterior, implica que existe não só um conjunto de oito zeros respeitantes à solução correcta como também um número variável de famílias adicionais, cada qual com a sua solução física associada.

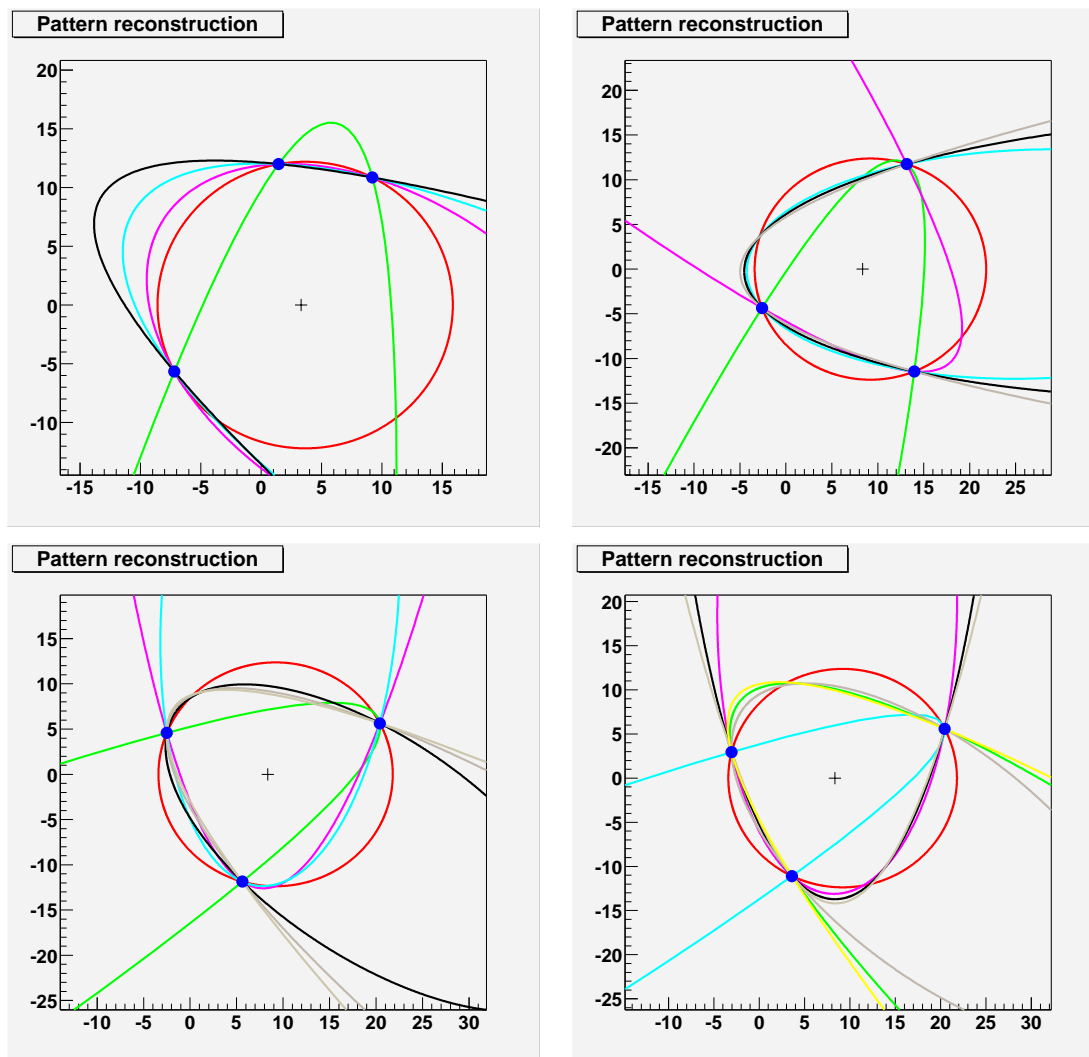


Figura 2.5: Padrões com 5, 6, 7 e 8 reconstruções (pontos de impacto: (+) partícula, (•) fótons)

2.10 Definição de uma reconstrução correcta

Considere-se um evento ideal em que são conhecidos, sem erro, o ponto de impacto da partícula carregada, M , e os pontos de impacto de $k > 3$ fótons, P_i ($i = 1, \dots, k$), na matriz de fotomultiplicadores.

A partir dos k pontos correspondentes aos fótons pode ser formado um total de $\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$ conjuntos distintos de três pontos. Aplique-se separadamente o método de Newton-Raphson a cada conjunto de pontos, e reduza-se o resultado de cada aplicação à correspondente solução física da forma atrás descrita.

Todos os pontos P_i se encontram necessariamente sobre a curva correspondente à

intersecção do cone de Čerenkov deformado com o plano de detecção. Desta forma, para qualquer subconjunto de três pontos P_i , uma das soluções possíveis de obter pela aplicação do método de Newton-Raphson será necessariamente a correspondente aos parâmetros (θ, ϕ, θ_c) do cone que lhe deu origem. As restantes soluções variarão em função dos pontos considerados em cada reconstrução.

Assim, dado um número de pontos superior a três, a reconstrução correcta pode ser caracterizada da seguinte forma:

A reconstrução correcta é a que é comum a todos os trios de fotões.

2.11 Incerteza nos pontos de impacto

Até este momento os pontos de impacto da partícula carregada e dos fotões foram sempre considerados como sendo conhecidos exactamente. Numa situação real, porém, a determinação destes pontos não é exacta.

O erro na determinação dos pontos de impacto tem como causa principal a resolução finita da grelha de fotomultiplicadores. Outro factor importante de erro decorre da incerteza no ponto de emissão da radiação Čerenkov, que atrás foi postulado como sendo fixo.

2.12 Selecção de reconstruções

A existência de um erro associado às coordenadas utilizadas para a reconstrução do cone de Čerenkov implica que a definição de reconstrução correcta enunciada na secção anterior deixa de se verificar, pois as soluções “quase-correctas” obtidas pela aplicação do método de Newton-Raphson aos vários trios de fotões já não são coincidentes. No entanto, tenderão a concentrar-se numa pequena região do espaço (θ, ϕ, θ_c) em torno do ponto exacto.

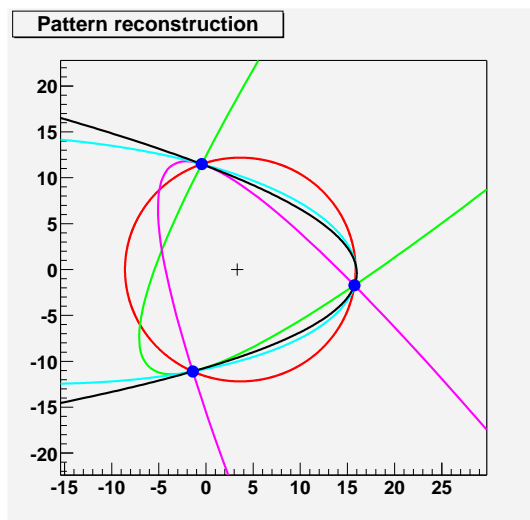


Figura 2.6: Padrão com uma só reconstrução aceitável (pontos de impacto: (+) partícula, (●) fótons)

É necessário recordar que para além destas soluções quase-correctas que existem para cada trio de fótons depois de reduzidos os resultados ao primeiro quadrante em θ e θ_c da forma anteriormente explicada, existem mais zeros da função no espaço (θ, ϕ, θ_c) , correspondentes a falsas soluções. Muitas delas apresentam valores de θ e/ou θ_c muito elevados (superiores a $\pi/4$) e podem ser rejeitadas por não serem compatíveis com as características da experiência. É o caso da figura 2.6, em que dos cinco padrões formados quatro podem ser facilmente excluídos, restando apenas uma reconstrução aceitável. No entanto, para um número significativo de padrões encontram-se falsas soluções com parâmetros indistinguíveis dos que caracterizam um acontecimento real. Na figura 2.7 apresentam-se dois exemplos desta situação. Em cada um deles há dois padrões típicos de uma reconstrução correcta.

Partindo de uma amostra mínima de quatro fótons, é possível ultrapassar este problema considerando a localização relativa no espaço (θ, ϕ, θ_c) das soluções correspondentes aos diferentes trios de fótons.

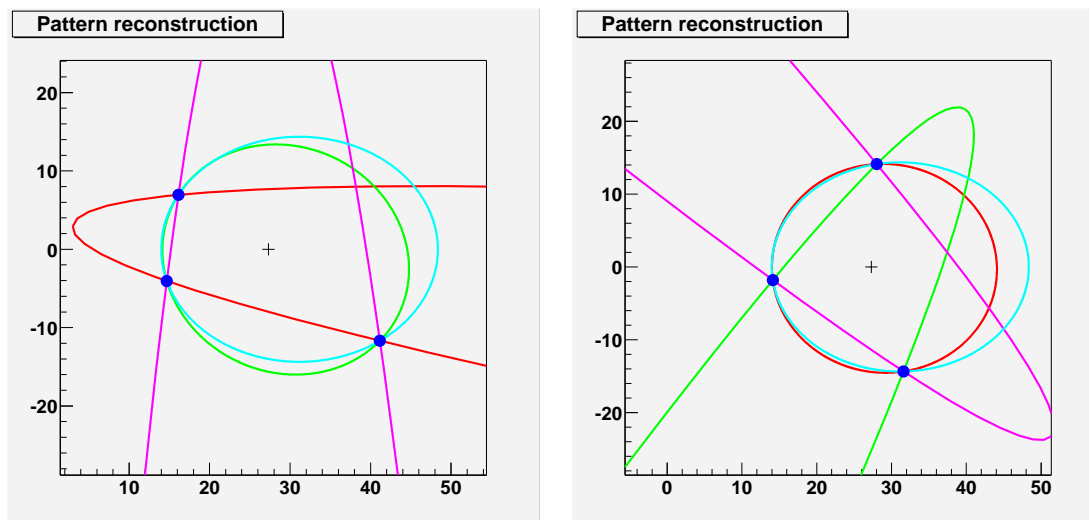


Figura 2.7: Padrões com duas reconstruções aceitáveis (pontos de impacto: (+) partícula, (●) fotões)

Para se obter uma reconstrução fiável do cone de Čerenkov é necessário determinar, de entre os pontos obtidos pela aplicação do método de Newton-Raphson, quais correspondem às reconstruções quase-correctas. Entre as reconstruções é possível identificar as duas populações já referidas: um conjunto de pontos com (θ, ϕ, θ_c) semelhantes, correspondentes às reconstruções quase-correctas, não sendo exactamente coincidentes devido aos erros associados aos dados de partida; e os restantes pontos, correspondentes a falsas soluções, que se encontram geralmente dispersos.

Esta proximidade das soluções quase-correctas conduziu a uma selecção das reconstruções com base na construção de “clusters” de pontos.

Outro aspecto importante é o que se relaciona com a distância entre os pontos de impacto dos fotões. As reconstruções obtidas a partir de eventos em que há pontos de impacto muito próximos entre si são particularmente sensíveis a erros nas posições, pois um pequeno erro em distância pode produzir uma alteração importante na orientação relativa dos pontos, obtendo-se nesse caso uma curva totalmente errada (figura 2.8). Por esta razão, é conveniente estabelecer uma distância mínima entre pontos de impacto para que o resultado da reconstrução seja tido em conta nos cálculos finais.

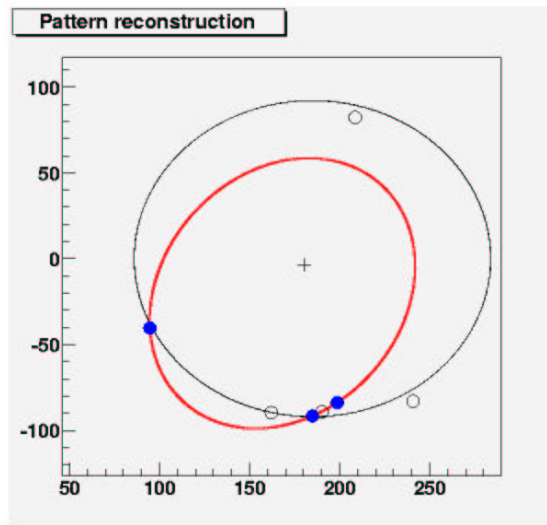


Figura 2.8: Reconstrução errada baseada em pontos próximos (pontos de impacto: (+) partícula, (●) fótons utilizados), (○) fótons não utilizados

2.13 Escalas características de erro e clusterização

O estabelecimento de um domínio de reconstruções aceitáveis implica a utilização de parâmetros correspondentes às escalas características do erro na determinação do vértice do cone de Čerenkov, V , e do seu ângulo de abertura, θ_c .

Sejam σ_x , σ_y e σ_{θ_c} os erros típicos associados à determinação respectivamente das coordenadas do ponto V (função de θ e ϕ) e do ângulo θ_c . Então, duas reconstruções serão consideradas semelhantes se e só se cumprirem a seguinte condição:

$$\sqrt{\frac{\Delta x_V^2}{\sigma_x} + \frac{\Delta y_V^2}{\sigma_y} + \frac{\Delta \theta_c^2}{\sigma_{\theta_c}}} < K \quad (2.24)$$

em que Δx_V , Δy_V e $\Delta \theta_c$ são as diferenças entre os parâmetros das duas reconstruções e K é um número real positivo da ordem da unidade.

Através desta condição de proximidade entre reconstruções é possível definir o seguinte critério de clusterização:

CRITÉRIO DE CLUSTERIZAÇÃO (versão 1)

Se duas reconstruções cumprirem a condição de proximidade então essas reconstruções pertencem ao mesmo “cluster”.

O critério anterior é equivalente ao que se segue:

CRITÉRIO DE CLUSTERIZAÇÃO (versão 2)

Duas reconstruções pertencem ao mesmo “cluster” se e só se existir um caminho entre essas duas reconstruções tal que cada ponto desse caminho seja uma reconstrução e entre cada dois pontos sucessivos se cumpra a condição de proximidade.

De todos os “clusters” formados pela aplicação do critério anterior, toma-se aquele que contiver um maior número de pontos (desde que esse número atinja um mínimo pré-estabelecido), e calculam-se os valores médios de x_V , y_V e θ_c no conjunto de pontos do “cluster” (quando existem vários “clusters” de tamanho máximo, as médias são calculadas sobre todos os pontos a eles pertencentes). São estes valores médios que são tomados como resultado final da reconstrução.

Caso não tenha sido formado nenhum “cluster” com o número mínimo de pontos, o método de Newton-Raphson pode ser de novo aplicado aos trios de fotões, utilizando pontos de partida diferentes dos utilizados no primeiro cálculo. Em certos casos, o algoritmo convergirá para a solução já anteriormente obtida para o mesmo trio, mas em outros o resultado será diferente pois existe em geral mais de uma solução por trio como se referiu anteriormente. Acrescentar os novos pontos assim obtidos aumenta a qualidade da amostra, pois o adicionar de algumas reconstruções correctas aumenta a possibilidade de formação de um “cluster” de dimensão suficiente. Haverá também o correspondente aumento de falsas reconstruções, mas este aumento não é geralmente prejudicial à clusterização uma vez que as reconstruções falsas se encontram dispersas, tornando extremamente improvável a formação de um “cluster” significativo a partir de alguns dos pontos correspondentes.

Capítulo 3

Resultados obtidos

O método de reconstrução descrito no capítulo anterior foi aplicado tanto a eventos simulados como a eventos reais registados durante os ensaios de um protótipo do detector RICH de AMS 02 (figura 3.1). Estes ensaios [12] tiveram lugar no Institut de Sciences Nucléaires (ISN) em Grenoble (França) durante o Verão de 2002, tendo o protótipo sido exposto a muões cósmicos com incidência próxima da vertical ($\theta < 10^\circ$).



Figura 3.1: *Protótipo do detector RICH*

Os eventos aqui tratados referem-se à tomada de dados número 20, realizada em 5 de Agosto de 2002. Na tabela 3.1 apresentam-se as características do protótipo no referido ensaio.

Tipo de radiador	Aerogel Matsushita
Espessura do radiador	3 <i>cm</i>
Índice de refração	$n = 1.03$
Distância radiador-matriz	41.65 <i>cm</i>
Espelho cónico	ausente
Dimensões da matriz	34.1 × 27.9 <i>cm</i>
Pixel da matriz	0.775 <i>cm</i>
Fotomultiplicadores	Hamamatsu

Tabela 3.1: Características do protótipo RICH de AMS 02 (tomada de dados número 20) [12]

As simulações foram realizadas utilizando os mesmos parâmetros e introduzindo nos algoritmos de cálculo dos pontos de impacto um ruído artificial, permitindo assim estudar o efeito da variação de diversos parâmetros na qualidade das reconstruções.

3.1 Reconstrução de eventos reais

O protótipo utilizado dispunha de um detector de traços, o que permitiu determinar com grande precisão as trajectórias das partículas incidentes no RICH. Desta forma foi possível avaliar directamente o erro cometido na reconstrução autónoma aqui aplicada utilizando como referência a reconstrução com o detector de traços.

Como condição para a validação de uma reconstrução autónoma foi exigida uma base mínima de 3 reconstruções fisicamente significativas (com θ e θ_c no intervalo $[0^\circ, 40^\circ]$) obtidas a partir de trios em que os pontos de impacto estivessem separados por uma distância mínima de 5 *cm*.

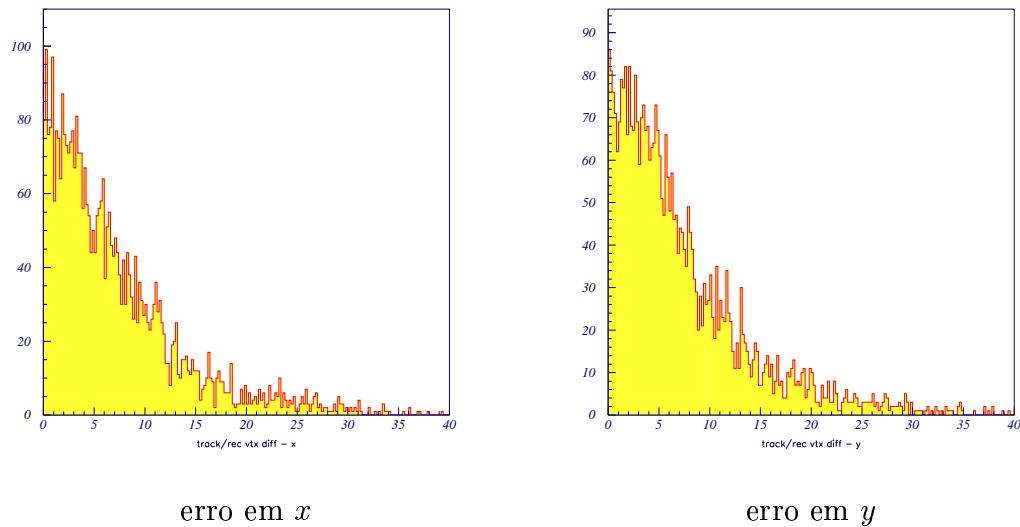


Figura 3.2: Distribuição do erro em x e y (em centímetros)

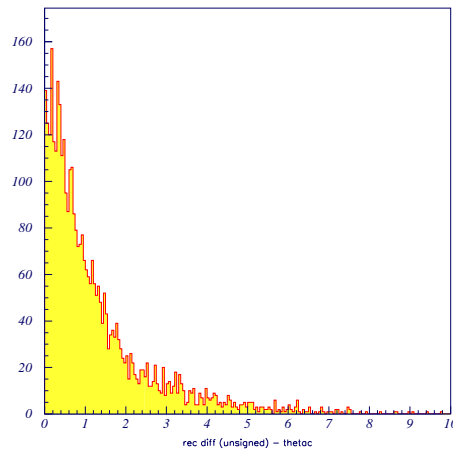


Figura 3.3: Distribuição do erro em θ_c (em graus)

Com o objectivo de tirar o melhor partido do algoritmo desenvolvido, procedeu-se à determinação das escalas características de erro na reconstrução de eventos em x_V , y_V e θ_c . Para tal, foram calculadas distribuições tomando, de um total de 10000 eventos, os que cumpriam o critério atrás enunciado, e calculando para estes o erro resultante de uma estimativa baseada na média simples dos parâmetros e todos os trios válidos. As distribuições obtidas apresentam-se nas figuras 3.2 e 3.3. Com base nestes resultados, adoptaram-se como escalas características:

$$\sigma_x = \sigma_y = 7.2 \text{ cm} \quad (3.1)$$

$$\sigma_{\theta_c} = 1.24^\circ = 21.6 \text{ mrad} \quad (3.2)$$

Após vários ensaios com diferentes valores da constante K foi seleccionado o valor $K = 1$. Para a validação dos trios de fótons adoptou-se uma distância mínima de 5 cm entre pontos de impacto.

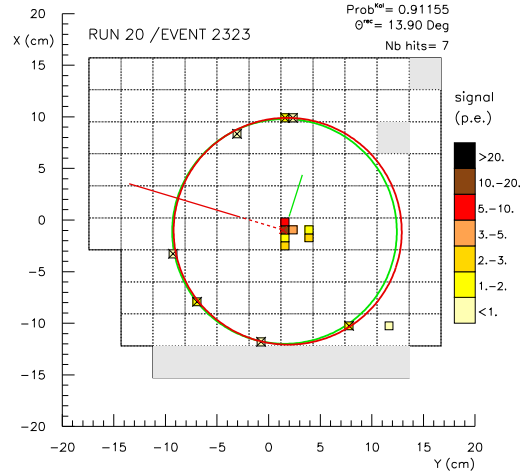


Figura 3.4: *Evento com bom acordo entre reconstruções autónoma (verde) e com traço (vermelho)*

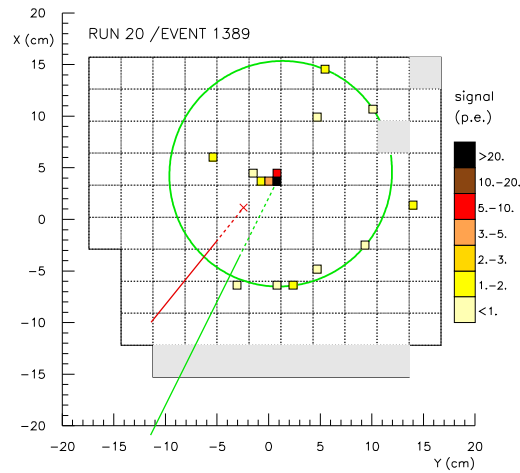


Figura 3.5: *Evento apenas com reconstrução autónoma (verde)*

Nas figuras 3.4 e 3.5 apresentam-se exemplos da visualização de eventos reconstruídos. No primeiro caso a reconstrução autónoma, a verde, é muito semelhante à reconstrução de referência, a vermelho. No segundo caso não há reconstrução de referência, mas o acordo entre os pontos de impacto dos fotões e a curva assinalada demonstra que a reconstrução autónoma é satisfatória.

3.1.1 Reconstrução em θ

Na figura 3.6 apresentam-se distribuições do ângulo θ obtidas de diferentes formas. A distribuição de referência, obtida com o detector de traços, está compreendida entre 0° e 10° e tem uma média de 4.8° . A distribuição dos valores obtidos pela reconstrução autónoma está claramente deslocada para valores mais elevados de θ , prolongando-se até 20° , sendo o seu valor médio de 8.8° .

Seleccionando de entre os resultados da reconstrução autónoma apenas aqueles em que a clusterização final envolveu um mínimo de 8 fotões, obtém-se uma distribuição menos deslocada para a direita, com um valor médio de 7.8° .

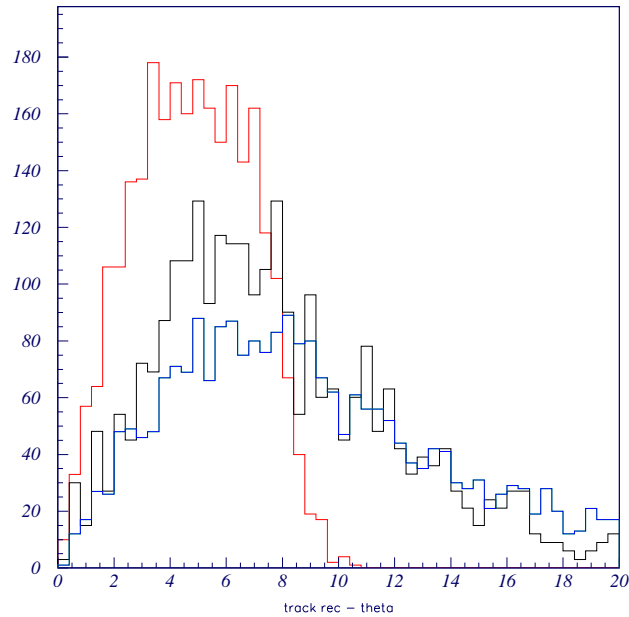


Figura 3.6: Reconstrução em θ : (vermelho) com traço, (azul) autónoma, (preto) autónoma com ≥ 8 fotões

Calculando a distribuição do erro na reconstrução autónoma de θ , obtém-se o gráfico apresentado na figura 3.7. Verifica-se que existe um claro desvio sistemático, sendo o valor de θ reconstruído superior ao correcto na grande maioria dos eventos, existindo mesmo um número significativo de reconstruções com erro superior a 10° .

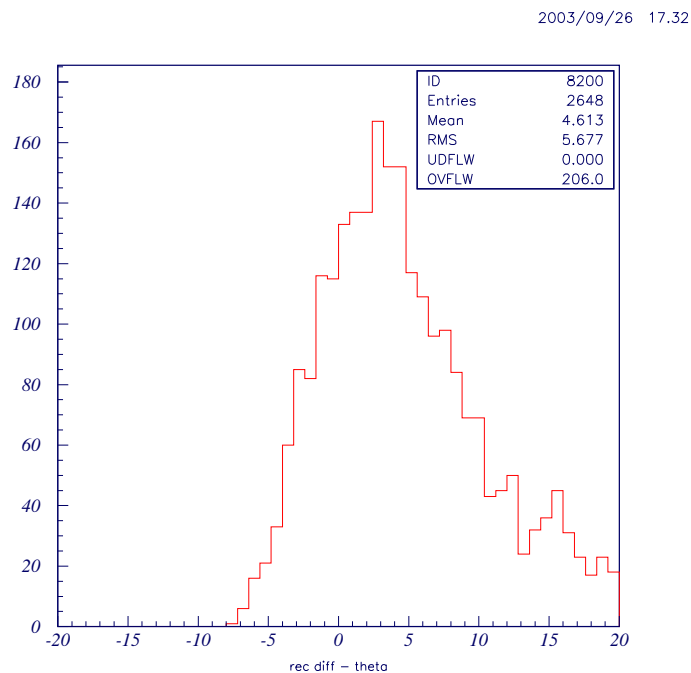


Figura 3.7: Erro na reconstrução em θ ($\theta_{(aut.)} - \theta_{(com tr.)}$)

Para melhor compreender este desvio foi feito o estudo da evolução do desvio médio em função do número de fotões presentes no “cluster”. O resultado apresenta-se na figura 3.8. É visível uma diminuição do desvio com o aumento do número de fotões. Para 3 fotões no “cluster” (o que significa que não há formação de “clusters” com vários trios) o desvio médio é de cerca de 10° , diminuindo para cerca de 5° com 6 fotões e 3° quando o número de fotões presentes no “cluster” ultrapassa a dezena.

2003/09/27 15.39

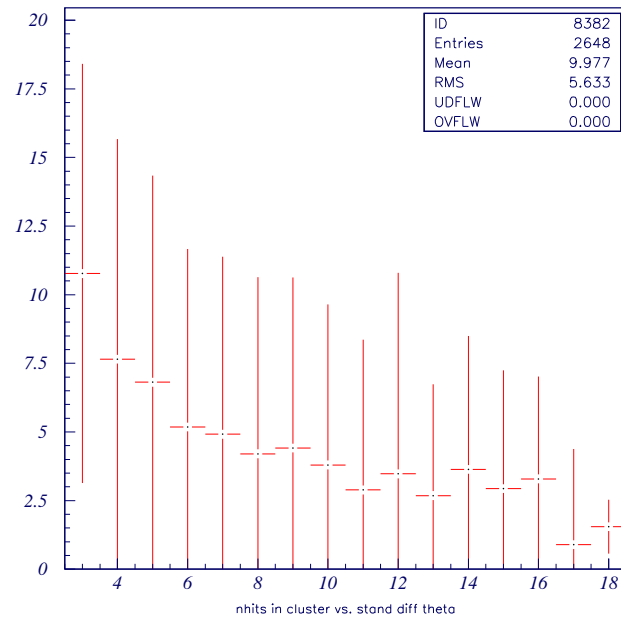


Figura 3.8: Erro na reconstrução em θ em função do número de fótons no “cluster”

2003/09/26 17.32

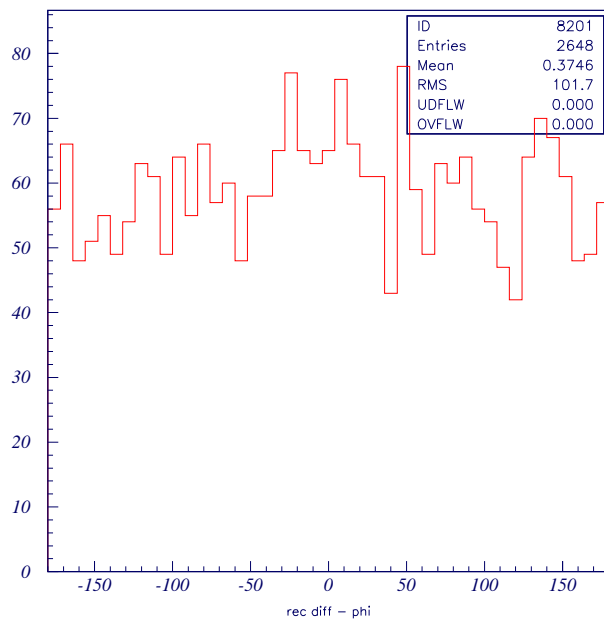


Figura 3.9: Erro na reconstrução em ϕ ($\phi_{(aut.)} - \phi_{(com\ tr.)}$)

3.1.2 Reconstrução em ϕ

Na figura 3.9 apresentam-se os resultados obtidos para a diferença entre o ângulo ϕ reconstruído de forma autónoma e o calculado utilizando o detector de traços. A distribuição é aproximadamente uniforme no intervalo $[-\pi, \pi[$, não existindo portanto correlação significativa entre as duas variáveis.

Desta forma, a reconstrução em ϕ revelou-se totalmente ineficaz quando aplicada aos dados experimentais do protótipo.

3.1.3 Reconstrução em θ_c

Na figura 3.10 apresentam-se as distribuições do ângulo θ_c obtidas de forma análoga à utilizada para θ . A distribuição de referência apresenta um valor médio de 13.62° , muito próximo do ângulo limite de 13.86° . Tal deve-se ao facto de as partículas incidentes no detector terem geralmente velocidades muito próximas de c .

Aplicando o algoritmo de reconstrução autónoma aos mesmos eventos obteve-se uma distribuição com valor médio de 12.94° . Esta distribuição apresenta uma boa concordância com a de referência, sendo a diferença mais visível a existência de uma cauda mais significativa para valores baixos de θ_c .

Seleccionando de entre os resultados da reconstrução autónoma apenas aqueles em que a clusterização final envolveu um mínimo de 8 fotões, obtém-se uma significativa melhoria na qualidade da distribuição, com o aumento do valor médio para 13.34° e uma visível diminuição da cauda na parte esquerda do gráfico.

A distribuição do erro na reconstrução autónoma de θ_c apresenta-se na figura 3.11. O seu valor médio é de -0.67° , correspondente à diferença das médias das distribuições anteriores. O pico da distribuição situa-se praticamente a zero, sendo o valor médio negativo devido à assimetria das caudas.

Analisando a evolução do valor médio em função do número de fotões no “cluster” (figura 3.12), verifica-se que existe uma grande diminuição de erro na passagem de 3 para 4 fotões no “cluster”, mas que a partir de 4 fotões o desvio médio estabiliza rapidamente em cerca de -0.3° , com uma banda característica de variação (assinalada pelas linhas verticais) de $\pm 0.5^\circ$ aproximadamente.

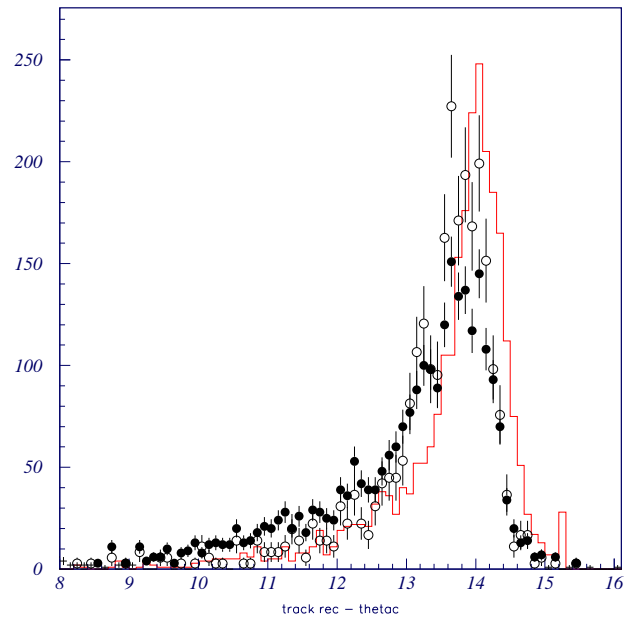


Figura 3.10: Reconstrução em θ_c : (—) com traço, (●) autônoma, (o) autônoma com ≥ 8 fótons

2003/09/26 02.17

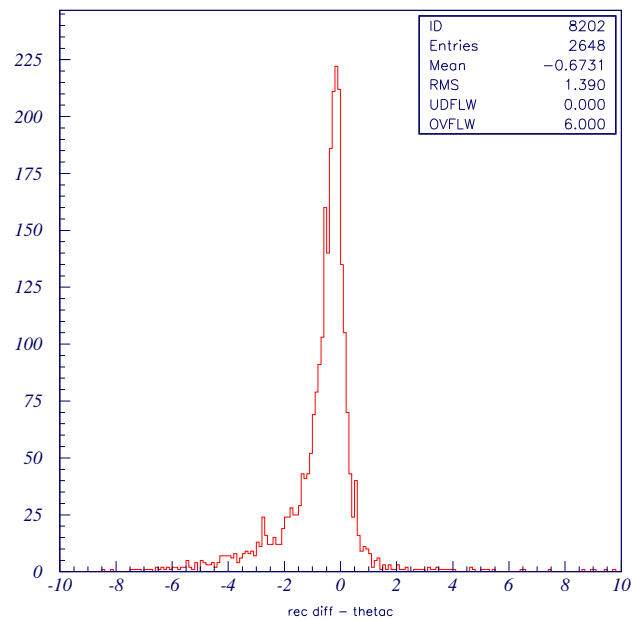


Figura 3.11: Erro na reconstrução em θ_c ($\theta_{c(\text{aut.})} - \theta_{c(\text{com tr.})}$)

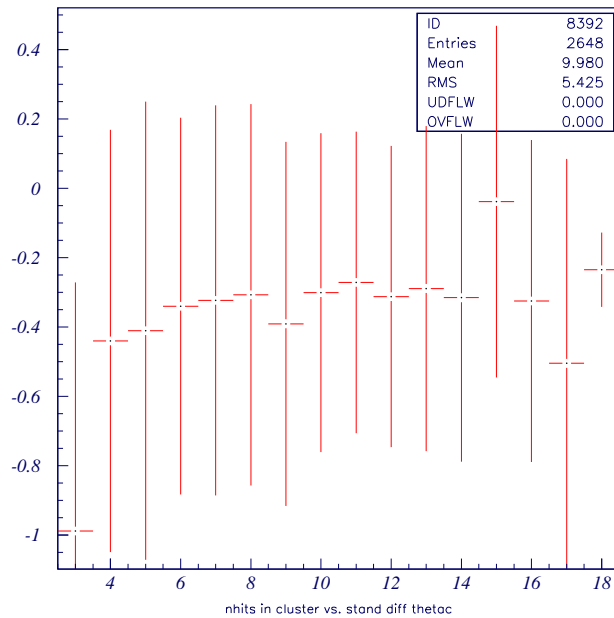


Figura 3.12: Erro na reconstrução em θ_c em função do número de fótons no “cluster”

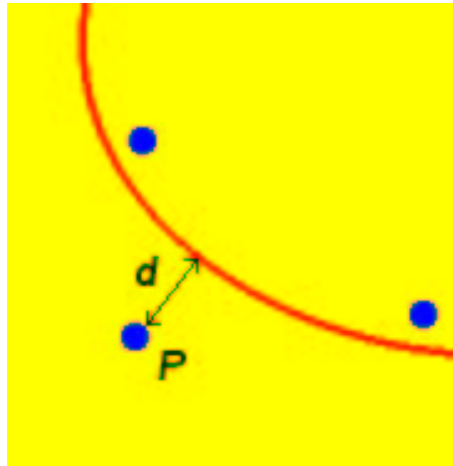


Figura 3.13: Distância de um ponto a uma curva

3.1.4 Ajuste dos pontos às curvas reconstruídas

Para avaliar a qualidade da reconstrução autónoma foi calculada uma distância típica entre as curvas reconstruídas e os pontos de impacto dos fótons que lhes deram origem. Esta grandeza foi determinada a partir da distância de cada ponto à

curva (figura 3.13), calculando a raiz quadrada da média dos quadrados dos valores de base.

Os resultados deste cálculo apresentam-se na figura 3.14. Verifica-se que o ajuste aos pontos de impacto dos fótons é melhor no caso da reconstrução autónoma (para a qual se obtém uma distância característica de 0.89 cm) que na reconstrução de referência com traço (1.04 cm).

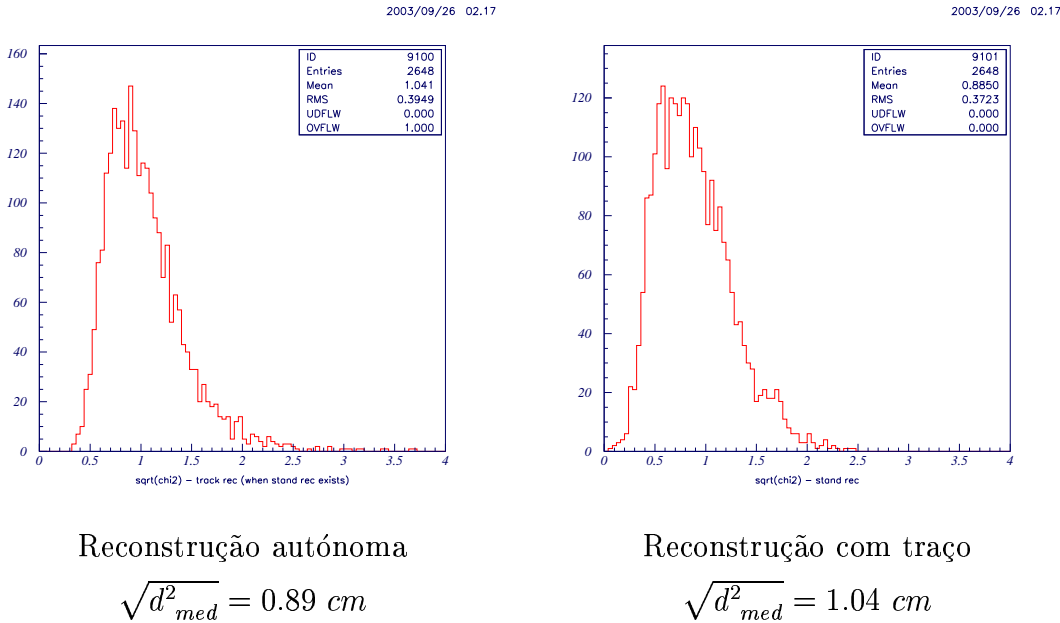


Figura 3.14: Distribuição da distância típica dos pontos de impacto dos fótons às curvas reconstruídas

3.2 Reconstrução de eventos simulados

Nesta secção apresentam-se os resultados obtidos pela aplicação do método de reconstrução desenvolvido neste projecto a eventos simulados.

Nestas simulações a emissão de fótons Čerenkov foi tratada como ocorrendo apenas no ponto de radiação V tal como este foi definido na secção 2.2. A propagação dos fótons e da partícula carregada foi calculada exactamente até aos pontos de impacto na matriz, nos quais se introduziu ruído gaussiano com $\sigma = 0.64\text{ cm}$ em cada uma das coordenadas x e y para a partícula carregada e $\sigma = 0.3\text{ cm}$ em cada coordenada para os fótons.

3.2.1 Dependência com o número de fótons

Para analisar a dependência da qualidade da reconstrução com o número de fótons foram testados eventos simulados com um número de fótons variável entre 5 e 20.

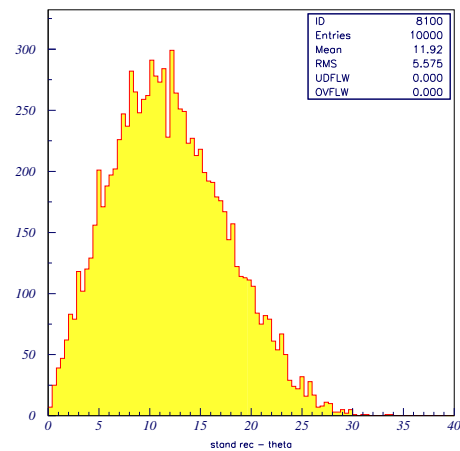
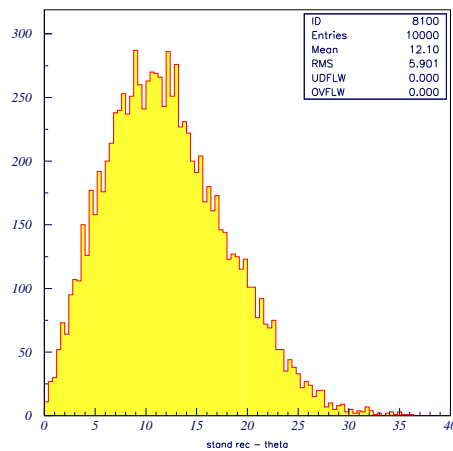
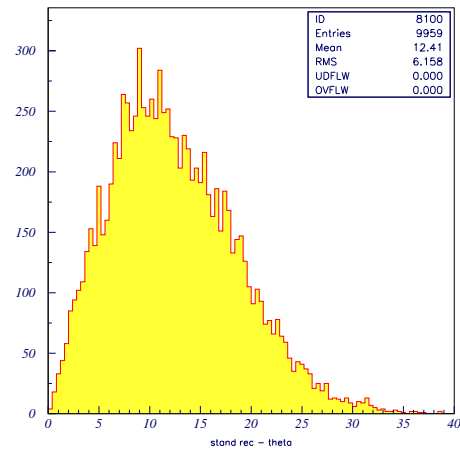
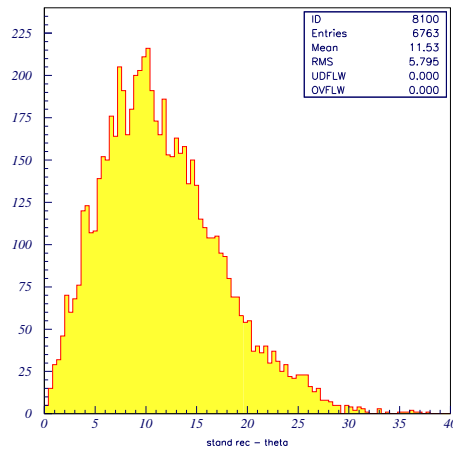


Figura 3.15: Reconstrução simulada em θ com 5 a 20 fótons para $\theta = 10^\circ$ e $\theta_c = 13.86^\circ$

Dois tipos de eventos foram considerados: tipo 1, com $\theta = 10^\circ$, valor típico de eventos próximos da vertical, e tipo 2, com $\theta = 30^\circ$, correspondente a um ângulo próximo do limite da aceitação do detector. Em ambos os casos se utilizou o

valor limite $\theta_c = 13.86^\circ$. Para o ângulo ϕ , que não tem influência na qualidade da reconstrução devido à isotropia do problema, foi arbitrado o valor $\phi = 180^\circ$.

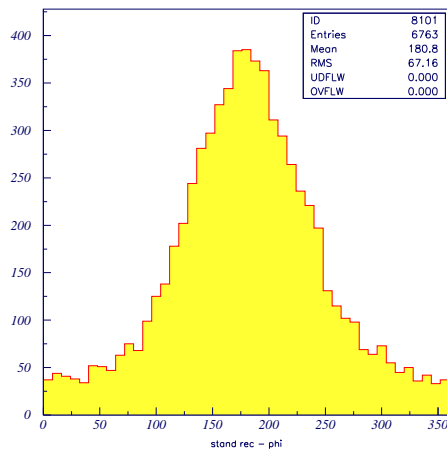
Na figura 3.15 apresentam-se alguns dos perfis de distribuição obtidos para a reconstrução em θ no caso $\theta = 10^\circ$.

Na tabela 3.2 resumem-se os resultados obtidos para a reconstrução em θ com diferentes números de fótons. É possível verificar a partir desta tabela e da figura anterior que não há alterações significativas na qualidade da reconstrução. O menor desvio sistemático é mesmo obtido para o caso de 5 fótons.

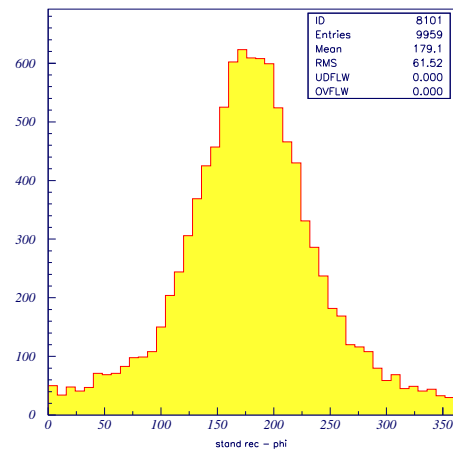
Número de fótons	$\theta_{(reconst)}$ média [desvio]	σ
5	11.53 [+1.53]	5.80
6	12.26 [+2.26]	6.08
7	12.56 [+2.56]	6.20
8	12.41 [+2.41]	6.16
9	12.33 [+2.33]	5.97
10	12.25 [+2.25]	5.91
12	12.10 [+2.10]	5.90
14	12.05 [+2.05]	5.74
16	11.96 [+1.96]	5.73
18	11.98 [+1.98]	5.62
20	11.92 [+1.92]	5.58

Tabela 3.2: Reconstrução em $\theta = 10^\circ$ em função do número de fótons (valores em graus)

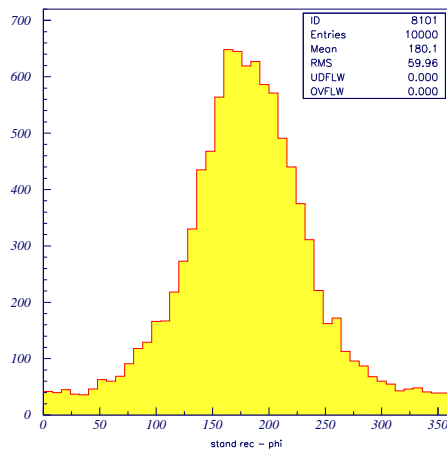
Na figura 3.16 apresentam-se os resultados obtidos para a reconstrução do ângulo $\phi = 180^\circ$ para simulações com $\theta = 10^\circ$ e diferentes números de fótons.



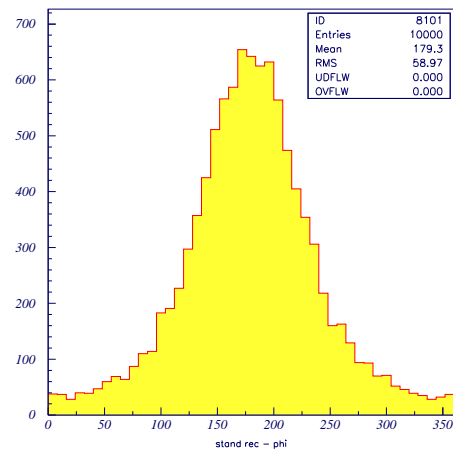
5 fotões



8 fotões



12 fotões

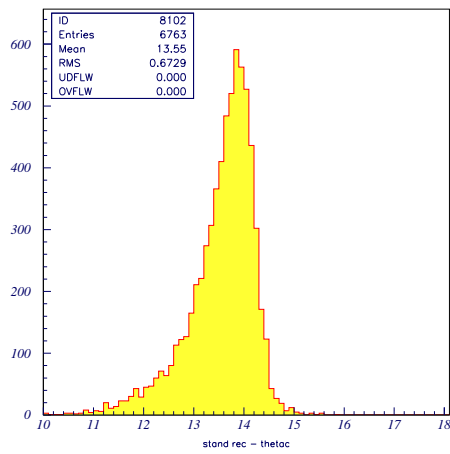


20 fotões

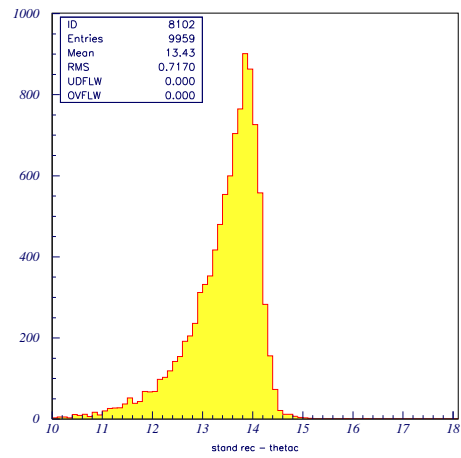
Figura 3.16: Reconstrução simulada em ϕ com 5 a 20 fotões para $\theta = 10^\circ$ e $\theta_c = 13.86^\circ$

A tabela 3.3 resume os resultados obtidos na reconstrução de ϕ . Verifica-se que a reconstrução é muito pouco eficaz, obtendo-se um erro típico de 60° na determinação de ϕ , e que pouco se altera com o aumento da estatística de fotões.

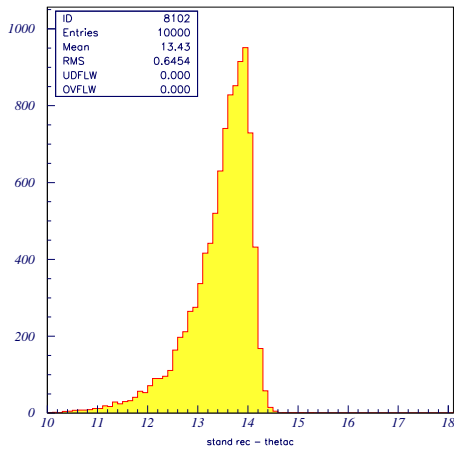
Na figura 3.17 apresentam-se os resultados obtidos para a reconstrução do ângulo $\theta_c = 13.86^\circ$ para simulações com $\theta = 10^\circ$ e diferentes números de fotões.



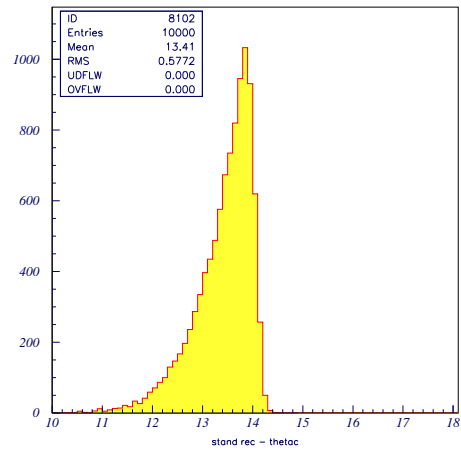
5 fotões



8 fotões



12 fotões



20 fotões

Figura 3.17: Reconstrução simulada em θ_c com 5 a 20 fotões para $\theta = 10^\circ$ e $\theta_c = 13.86^\circ$

Na tabela 3.4 resumem-se os resultados da reconstrução em θ_c . Constata-se a existência de um pequeno desvio sistemático negativo, que aumenta ligeiramente com o número de fotões utilizados. A largura da distribuição de erros atinge um máximo para 6 a 8 fotões, diminuindo para reconstruções de amostras maiores.

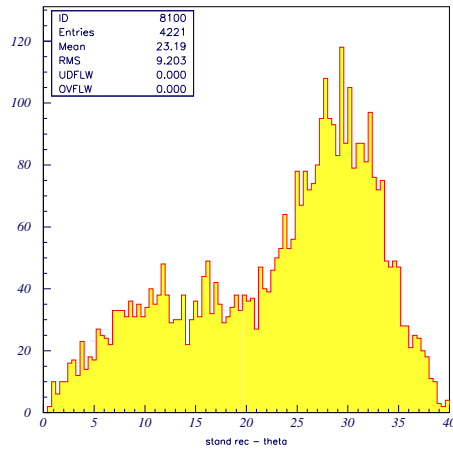
Número de fótons	$\phi_{(reconst)}$ média [desvio]	σ
5	180.8 [+0.8]	67.2
6	179.6 [-0.4]	64.6
7	180.2 [+0.2]	61.5
8	179.1 [-0.9]	61.5
9	180.5 [+0.5]	60.4
10	180.2 [+0.2]	60.3
12	180.1 [+0.1]	60.0
14	180.2 [+0.2]	58.9
16	180.5 [+0.5]	59.1
18	181.3 [+1.3]	58.6
20	179.3 [-0.7]	59.0

Tabela 3.3: Reconstrução em $\phi = 180^\circ$ com $\theta = 10^\circ$ em função do número de fótons (valores em graus)

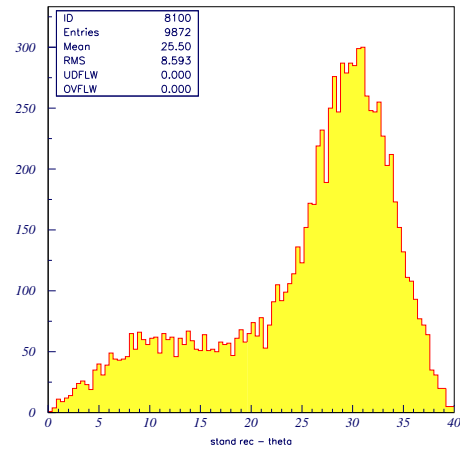
Número de fótons	$\theta_c (reconst)$ média [desvio]	σ
5	13.55 [-0.31]	0.67
6	13.47 [-0.39]	0.73
7	13.42 [-0.44]	0.74
8	13.43 [-0.45]	0.72
9	13.43 [-0.45]	0.68
10	13.44 [-0.44]	0.66
12	13.43 [-0.45]	0.65
14	13.42 [-0.46]	0.61
16	13.42 [-0.46]	0.61
18	13.41 [-0.47]	0.59
20	13.41 [-0.47]	0.58

Tabela 3.4: Reconstrução em $\theta_c = 13.86^\circ$ com $\theta = 10^\circ$ em função do número de fótons (valores em graus)

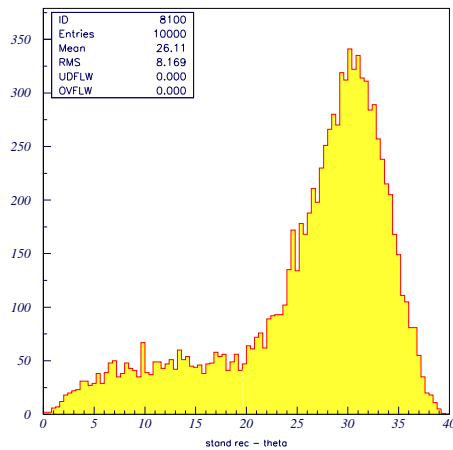
Na figura 3.18 apresentam-se alguns dos perfis de distribuição obtidos para a reconstrução em θ no caso $\theta = 30^\circ$.



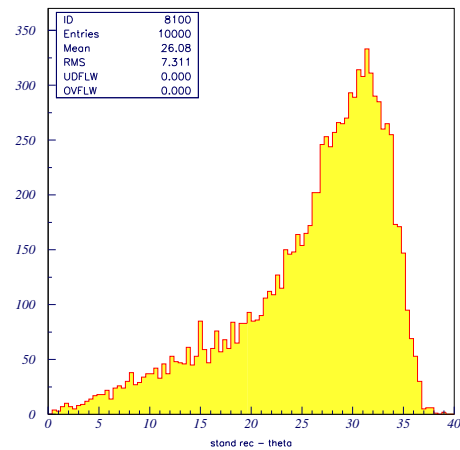
5 fotões



8 fotões



12 fotões



20 fotões

Figura 3.18: Reconstrução simulada em θ com 5 a 20 fotões para $\theta = 30^\circ$ e $\theta_c = 13.86^\circ$

A tabela 3.5 resume os resultados da reconstrução de θ . Constata-se a existência de um forte desvio sistemático para valores de θ inferiores ao correcto. A análise dos gráficos da figura 3.18 sugere que este desvio se deve essencialmente à existência dois tipos de reconstrução: um tipo maioritário correspondendo a reconstruções

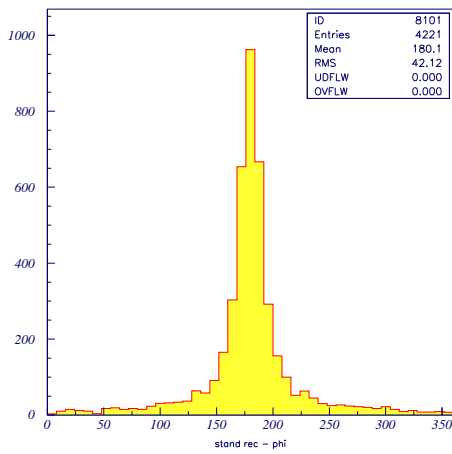
aproximadamente correctas, distribuídas entre 20° e 40° com um máximo no valor correcto, 30° ; e um conjunto de reconstruções completamente erradas distribuídas de forma razoavelmente uniforme numa larga banda de ângulos. É a este tipo de reconstruções que se devem os desvios observados nas médias.

O aumento da estatística de fotões melhora claramente a qualidade média das reconstruções, diminuindo a fracção de eventos mal reconstruídos. No entanto, mesmo no caso de amostras de mais de 10 fotões, o desvio médio ainda se situa próximo de 4° .

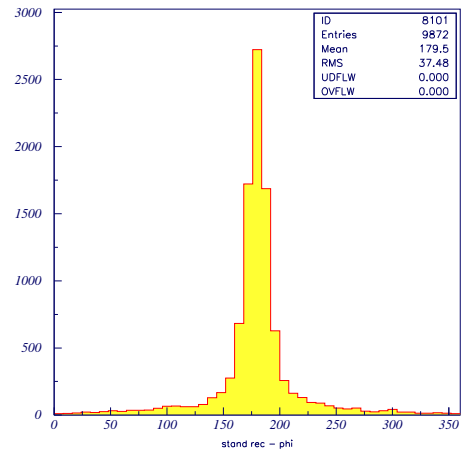
Número de fotões	$\theta_{(reconst)}$ média [desvio]	σ
5	23.19 [-6.81]	9.20
6	24.40 [-5.60]	8.69
7	25.19 [-4.81]	8.70
8	25.50 [-4.50]	8.59
9	25.66 [-4.34]	8.55
10	25.88 [-4.12]	8.31
12	26.11 [-3.89]	8.17
14	26.19 [-3.81]	7.91
16	26.25 [-3.75]	7.67
18	26.22 [-3.78]	7.46
20	26.08 [-3.92]	7.31

Tabela 3.5: Reconstrução em $\theta = 30^\circ$ em função do número de fotões (valores em graus)

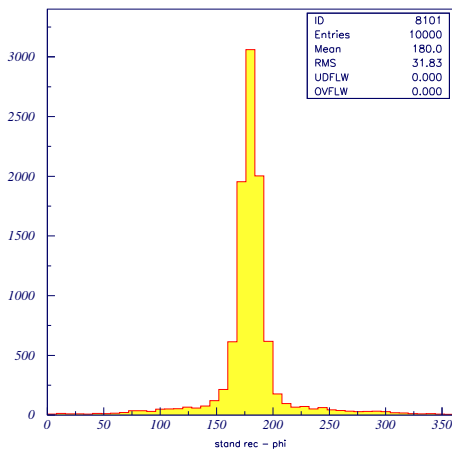
Na figura 3.19 apresentam-se os resultados obtidos para a reconstrução do ângulo $\phi = 180^\circ$ para simulações com $\theta = 30^\circ$ e diferentes números de fotões.



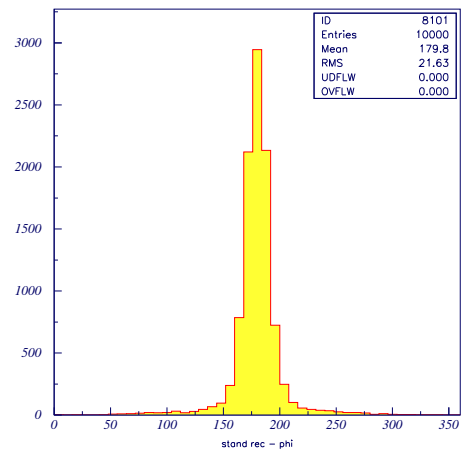
5 fotões



8 fotões



12 fotões



20 fotões

Figura 3.19: Reconstrução simulada em ϕ com 5 a 20 fotões para $\theta = 30^\circ$ e $\theta_c = 13.86^\circ$

Na tabela 3.6 resumem-se os resultados da reconstrução em ϕ para eventos com $\theta = 30^\circ$. A reconstrução é claramente melhor que a obtida para $\theta = 10^\circ$, observando-se agora uma nítida diminuição do erro quando se aumenta o número de fotões. Os erros típicos anteriormente situados a cerca de 60° são agora da ordem de 40° para 5 fotões e 20° para 20 fotões.

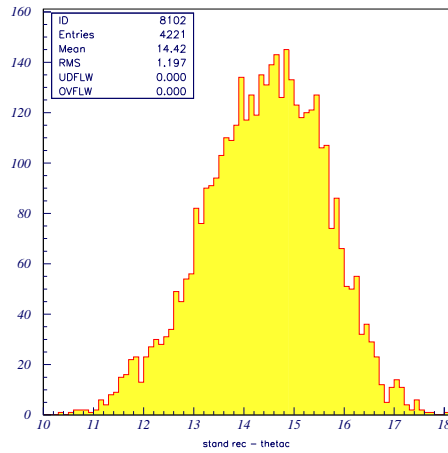
Número de fótons	$\phi_{(reconst)}$ média [desvio]	σ
5	180.1 [+0.1]	42.1
6	180.2 [+0.2]	40.1
7	179.9 [-0.1]	39.2
8	179.5 [-0.5]	37.4
9	179.9 [-0.1]	36.8
10	180.0 [0.0]	34.9
12	180.0 [0.0]	31.8
14	180.2 [+0.2]	29.1
16	179.9 [-0.1]	26.6
18	180.4 [+0.4]	24.5
20	179.8 [-0.2]	21.6

Tabela 3.6: Reconstrução em $\phi = 180^\circ$ com $\theta = 30^\circ$ em função do número de fótons (valores em graus)

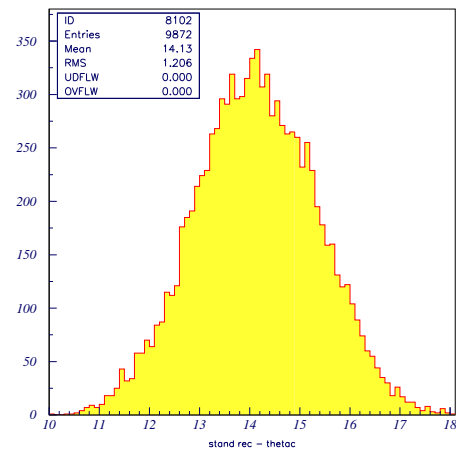
Número de fótons	$\theta_c (reconst)$ média [desvio]	σ
5	14.42 [+0.56]	1.20
6	14.26 [+0.40]	1.20
7	14.14 [+0.28]	1.20
8	14.13 [+0.27]	1.21
9	14.12 [+0.26]	1.18
10	14.12 [+0.26]	1.17
12	14.11 [+0.25]	1.15
14	14.10 [+0.24]	1.11
16	14.10 [+0.24]	1.08
18	14.09 [+0.23]	1.05
20	14.11 [+0.25]	1.03

Tabela 3.7: Reconstrução em $\theta_c = 13.86^\circ$ com $\theta = 30^\circ$ em função do número de fótons (valores em graus)

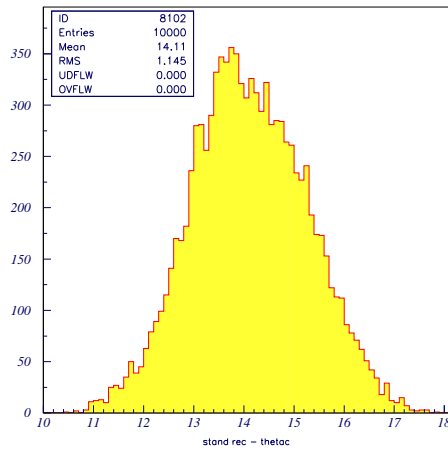
Na figura 3.20 apresentam-se os resultados obtidos para a reconstrução do ângulo $\theta_c = 13.86^\circ$ para simulações com $\theta = 30^\circ$ e diferentes números de fotões.



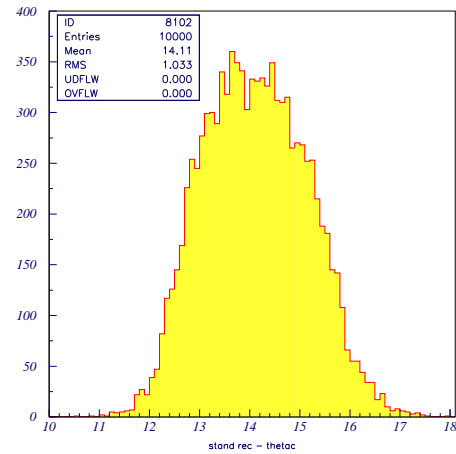
5 fotões



8 fotões



12 fotões



20 fotões

Figura 3.20: Reconstrução simulada em θ_c com 5 a 20 fotões para $\theta = 30^\circ$ e $\theta_c = 13.86^\circ$

Na tabela 3.7 apresentam-se os resultados da reconstrução de θ_c para $\theta = 30^\circ$. Contrariamente ao que sucedia no caso $\theta = 10^\circ$, o desvio sistemático é agora positivo. O seu valor reduz-se a metade (de 0.56° para 0.28°) quando o número de fotões aumenta de 5 para 7, mas pouco varia com a adição de mais fotões. A largura da

distribuição tem um comportamento contrário, mantendo-se estável para pequenas amostras e apenas diminuindo visivelmente quando se ultrapassam os 10 fótons. As distribuições são mais simétricas, e cerca de duas vezes mais largas que as obtidas com $\theta = 10^\circ$, mas o seu desvio sistemático é menor.

3.2.2 Dependência em θ

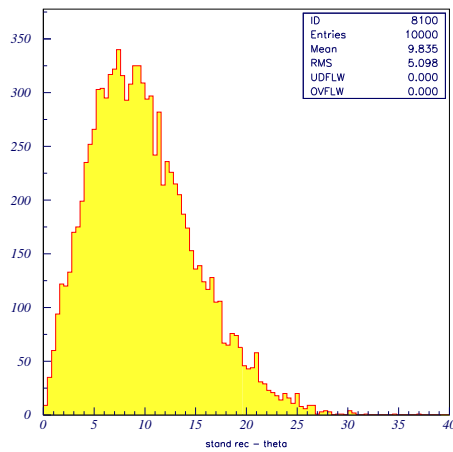
Para testar a dependência da qualidade da reconstrução com o ângulo θ foram simulados eventos com θ variável entre 0° e 30° . Em todos os casos foram reconstruídas amostras de 10 fótons emitidos segundo o ângulo limite $\theta_c = 13.86^\circ$.

Na figura 3.21 apresentam-se alguns dos perfis de distribuição obtidos para a reconstrução com 10 fótons de eventos com diferentes ângulos θ .

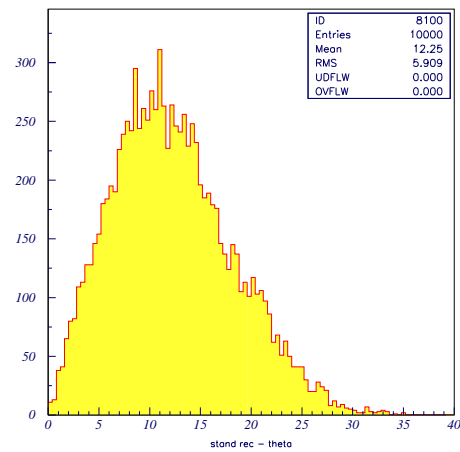
Na tabela 3.8 apresentam-se os resultados obtidos na reconstrução em θ das diferentes amostras de eventos simulados. É de destacar o valor médio de 9.84° obtido na reconstrução de eventos verticais ($\theta = 0^\circ$). O valor médio obtido no caso $\theta = 5^\circ$ é muito semelhante e mesmo no caso $\theta = 10^\circ$ ainda se obtém um resultado relativamente próximo dos anteriores.

θ	$\theta_{(reconst)}$ média [desvio]	σ
0°	9.84 [+9.84]	5.10
5°	10.44 [+5.44]	5.36
10°	12.25 [+2.25]	5.91
15°	15.08 [+0.08]	6.43
20°	18.52 [-1.48]	6.72
25°	22.24 [-2.76]	7.23
30°	25.88 [-4.12]	8.32

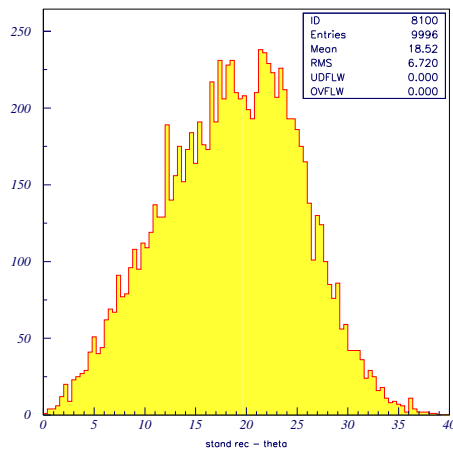
Tabela 3.8: Reconstrução em θ em função de θ (valores em graus)



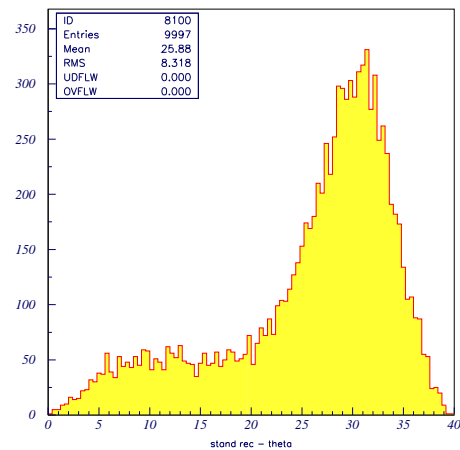
$$\theta = 0^\circ$$



$$\theta = 10^\circ$$



$$\theta = 20^\circ$$



$$\theta = 30^\circ$$

Figura 3.21: Reconstrução simulada em θ com 10 fotões para θ variável entre 0° e 30°

Estes resultados sugerem que a reconstrução não tem capacidade para diferenciar eficazmente os eventos com $\theta \lesssim 10^\circ$ de eventos verticais. Trata-se de um aspecto significativo que será de novo abordado na secção 3.3.

Por outro lado, à medida que θ aumenta há uma inversão do sinal do desvio sistemático, surgindo a cauda de reconstruções erradas a que se fez referência na análise de eventos com $\theta = 30^\circ$. A melhor reconstrução obtém-se para eventos com

$\theta \approx 15^\circ$, em que o desvio sistemático é nulo e o erro típico da reconstrução é de cerca de 6° .

Na figura 3.22 apresentam-se os resultados obtidos para a reconstrução do ângulo $\phi = 180^\circ$ para simulações com 10 fótons e diferentes ângulos θ .

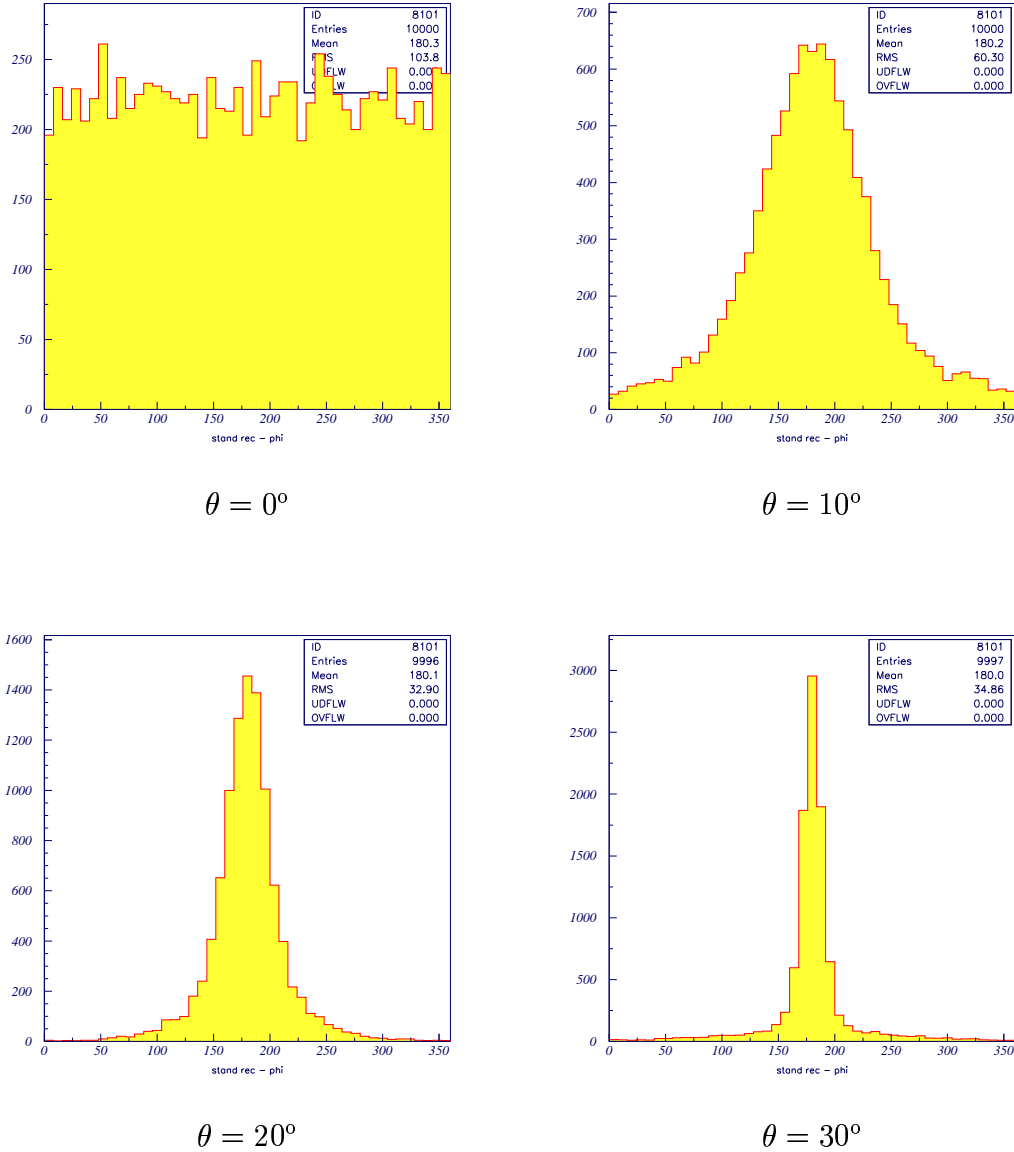


Figura 3.22: Reconstrução simulada em ϕ com 10 fótons para θ variável entre 0° e 30°

Na tabela 3.9 apresentam-se os resultados da reconstrução em ϕ . No caso $\theta = 0^\circ$ este ângulo é indefinido pelo que seria de esperar uma total ausência de correlação,

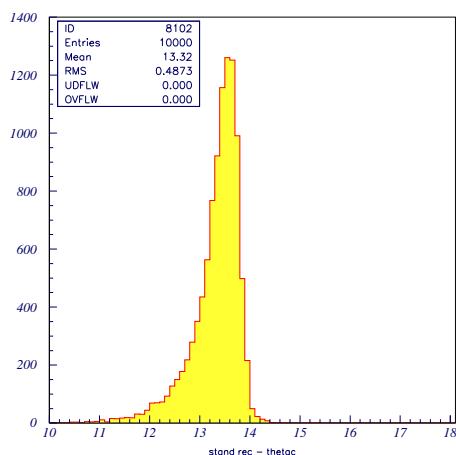
isto é, uma distribuição uniforme. É de facto esse o resultado observado, estando o desvio padrão $\sigma = 103.8^\circ$ muito próximo do esperado para uma distribuição uniforme, $\sigma_{unif} = \frac{360^\circ}{\sqrt{12}} = 103.9^\circ$.

Com o aumento de θ observa-se uma progressiva diminuição do desvio padrão, que estabiliza um pouco acima de 30° para $\theta \gtrsim 20^\circ$.

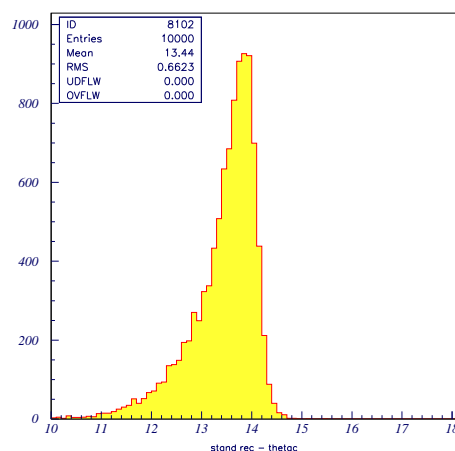
θ	$\phi_{(reconst)}$ média [desvio]	σ
0°	180.3 [+0.3]	103.8
5°	179.8 [-0.2]	82.1
10°	180.2 [+0.2]	60.3
15°	180.0 [0.0]	42.9
20°	180.1 [+0.1]	32.9
25°	179.9 [-0.1]	31.5
30°	180.0 [0.0]	34.8

Tabela 3.9: Reconstrução em $\phi = 180^\circ$ em função de θ (valores em graus)

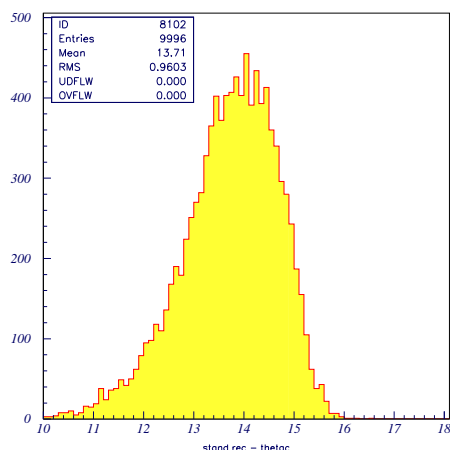
Na figura 3.23 apresentam-se os resultados obtidos para a reconstrução do ângulo $\theta_c = 13.86^\circ$ para simulações com 10 fótons e diferentes ângulos θ .



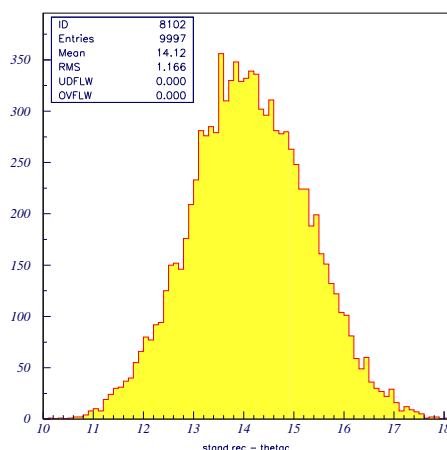
$$\theta = 0^\circ$$



$$\theta = 10^\circ$$



$$\theta = 20^\circ$$



$$\theta = 30^\circ$$

Figura 3.23: Reconstrução simulada em θ_c com 10 fótons para θ variável entre 0° e 30°

Na tabela 3.10 apresenta-se a evolução dos parâmetros da distribuição das reconstruções θ_c em função de θ . Verifica-se que à medida que θ aumenta a distribuição em θ_c se torna mais larga e mais simétrica. O centro da distribuição desloca-se progressivamente para a direita, pelo que o desvio sistemático, que é negativo para valores pequenos de θ , se torna positivo a partir de $\theta = 25^\circ$.

θ	θ_c (reconst) média [desvio]	σ
0°	13.32 [-0.54]	0.49
5°	13.35 [-0.51]	0.54
10°	13.44 [-0.42]	0.66
15°	13.55 [-0.31]	0.83
20°	13.71 [-0.15]	0.96
25°	13.90 [+0.04]	1.08
30°	14.12 [+0.26]	1.17

Tabela 3.10: Reconstrução em $\theta_c = 13.86^\circ$ em função de θ (valores em graus)

3.3 Assimetria dos padrões reconstruídos

A reconstrução em θ e ϕ só pode ter significado físico se o método utilizado tiver capacidade para identificar as assimetrias existentes no anel de Čerenkov definido pelos pontos de impacto. Por esta razão torna-se essencial avaliar a escala das referidas assimetrias.

Considere-se o cone de Čerenkov definido por uma partícula de $\beta = 1$ que atinge o radiador com ângulo θ relativamente à vertical e emite radiação a partir de um ponto V , sendo essa radiação detectada por uma matriz plana horizontal situada a uma distância ℓ (medida na vertical) do ponto de emissão.

Desprezando o efeito da refração dos fótons à saída do radiador (que não é muito significativo no caso em estudo, uma vez que para o aerogel $n = 1.03$), a curva obtida pela intersecção do cone com a matriz de detecção é uma das secções cónicas (elipse, parábola, hipérbole). Para os ângulos de incidência admitidos pelo detector a curva será sempre uma elipse pois apenas se obteria uma das restantes curvas se $\theta + \theta_c > \pi/2$.

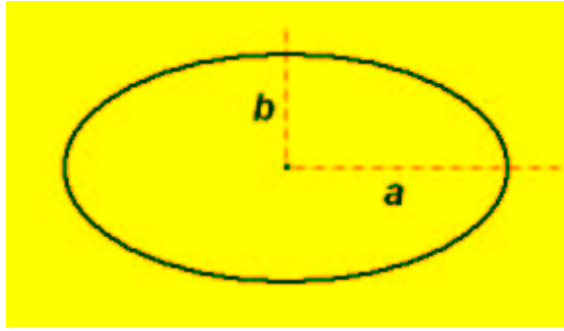


Figura 3.24: Semieixos maior (a) e menor (b) de uma elipse

Sejam a e b os semieixos maior e menor, respectivamente, da elipse obtida (figura 3.24). O semieixo maior, a , é dado por:

$$a = \frac{1}{2} \ell [\tan(\theta + \theta_c) - \tan(\theta - \theta_c)] \quad (3.3)$$

A determinação do semieixo menor, b , é um pouco mais complexa uma vez que o ponto de impacto da partícula carregada, M , não coincide com o centro geométrico da elipse, C . A distância entre estes dois pontos, d , é dada por:

$$d = \frac{1}{2} \ell [\tan(\theta + \theta_c) + \tan(\theta - \theta_c)] - \ell \tan \theta \quad (3.4)$$

Se se traçar a perpendicular ao eixo maior que passa no ponto M , esta intersectará a elipse em dois pontos, I_1 e I_2 , a igual distância de M . Definimos $b' = \overline{MI_1} = \overline{MI_2}$. O valor deste parâmetro é dado por:

$$b' = \ell \frac{\tan \theta_c}{\cos \theta} \quad (3.5)$$

A partir dos valores de d e b' , torna-se possível determinar finalmente o valor do semieixo menor, b :

$$b = \sqrt{\frac{a^2 b'^2}{a^2 - d^2}} \quad (3.6)$$

Na figura 3.25 apresenta-se a evolução da diferença $a - b$ com o ângulo θ tomando para a altura do cone de Čerenkov o valor $\ell = 42.70 \text{ cm}$ (correspondendo 1.05 cm à espessura percorrida dentro do radiador e 41.65 cm à distância entre este e a matriz de detecção).

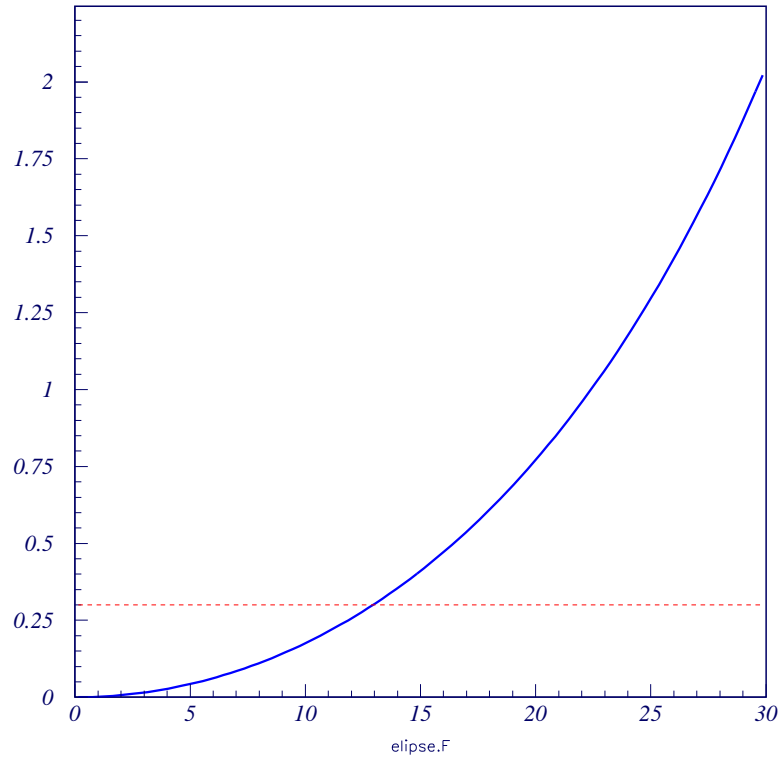


Figura 3.25: Assimetria do padrão ($a - b$, em centímetros) em função de θ (em graus)

É possível constatar que para pequenos valores de θ a diferença é praticamente nula, e só para $\theta \approx 13^\circ$ atinge 0.3 cm (linha a tracejado), valor médio do erro na determinação dos pontos de impacto dos fótons.

Este facto tem implicações profundas na possibilidade de reconstrução de θ e ϕ . Quando a assimetria da curva é da mesma ordem de grandeza dos erros na determinação dos seus pontos pode não ser possível determinar a orientação da curva e o seu grau de assimetria, isto é, distinguir a elipse de um círculo. Explica-se desta forma a não obtenção de uma reconstrução autónoma de ϕ nos eventos do protótipo RICH, assim como a grande semelhança dos resultados observados na reconstrução de eventos simulados com diferentes ângulos θ compreendidos entre 0° e 10° .

Conclusões

O método desenvolvido permitiu obter uma reconstrução de eventos baseada unicamente na informação recolhida pelo RICH.

A reconstrução obtida para θ_c está bem correlada com o valor esperado da variável. No caso da variável θ existe um erro significativo nos valores reconstruídos, mas esse erro diminui claramente com o aumento da informação disponível para a reconstrução. Não foi possível obter uma reconstrução autónoma para ϕ nas condições da experiência com o protótipo RICH, uma vez que os erros na determinação dos pontos de impacto dos fotões são suficientes para impedir a identificação do eixo de simetria da figura obtida. O bom funcionamento da reconstrução em ϕ foi provado através das simulações de eventos com θ mais elevado.

As simulações efectuadas permitiram também avaliar quais os domínios em que se obtém melhor reconstrução em cada variável. No caso de θ_c , a região óptima corresponde a partículas de incidência próxima da vertical. A reconstrução em θ funciona de forma mais precisa para eventos na região $\theta \approx 15^\circ$. No caso de ϕ a reconstrução melhora com o aumento de θ .

Constatou-se ainda uma diminuição moderada do erro das reconstruções com o número de pontos conhecidos de impacto de fotões.

Bibliografia

- [1] V. M. Balebanov et al. Alpha Magnetic Spectrometer (AMS) for Extraterrestrial Study of Antimatter, Matter and Missing Matter on The International Space Station Alpha - Proposta ao Department of Energy dos Estados Unidos da América, aprovada em Abril de 1995.
- [2] K. Hagiwara et al. Review of Particle Physics. *Physical Review D*, 66:010001, 2002.
- [3] J. A. Simpson. Elemental and Isotopic Composition of the Galactic Cosmic Rays. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 33:323–381, 1983.
- [4] Susan M. Ting. The Alpha Magnetic Spectrometer, A Particle Physics Experiment on the International Space Station, Maio 1998.
- [5] AMS collaboration. The Alpha Magnetic Spectrometer (AMS) on the International Space Station: Part I – results from the test flight on the space shuttle. *Physics Reports*, 366:331–405, 2002.
- [6] NASA Image eXchange (<http://nix.nasa.org>).
- [7] The Alpha Magnetic Spectrometer Home Page (<http://ams.cern.ch>).
- [8] F. Barão. Cherenkov detectors in the alpha magnetic spectrometer. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 454:174–179, 2000.
- [9] M. Buénerd. The RICH counter of the AMS experiment. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 502:158–162, 2003.
- [10] Hamamatsu Photonics (<http://www.hamamatsu.com>).

- [11] W. H. Press et al. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (FORTRAN Version)*. Cambridge University Press, 1989.
- [12] <http://isnwww.in2p3.fr/ams/ams-eng/lgpt2.html>.