Resolução do 1º Teste de Mecânica e Ondas
LEE/LEGI, 2 de Maio de 2006

(7.0) Problema 1

(2.0)**a)** Vida média = valor dado = τ =8267 anos. Assim, tempo de semi-desintegração = tempo de semi-vida = tempo de semi-transformação = $T_{1/2} = \tau \ln 2 = 5730$ anos.

Constante de decaimento é o inverso da vida média: $\lambda = \frac{1}{\tau} = 1.21 \times 10^{-4}$ ano^{-1}

(2.0)**b)** Esta alínea é relativa apenas à amostra de restos carbonizados. O tempo decorrido desde o fabrico da ânfora é, admitindo que não existe o ano 0, $\Delta t = 2006 - 1 + 6 = 2011$ anos. A actividade actual é $A(t_A) = 10.6s^{-1} = A_0 e^{-\lambda \Delta t}$. Daqui podemos concluir que $A_0 = A(t_A)e^{+\lambda \Delta t} = 10.6e^{+1.21\times10^{-4}\times2011}$ ou $A_0 = 13.52\text{s}^{-1}$.

(2.0)**c)** Aqui admitimos que a actividade do ^{14}C na natureza não varia com o tempo. Isto é, A_0 no momento em que os restos foram carbonizados e no momento em que o linho foi fabricado é igual.

Assim, para estimar a data $t_0 = 2006 - t_L$ em que o linho foi fabricado, basta saber também a actividade hoje (2006): $A(t_L) = A_0 e^{-\lambda t_L}$ (note que $t_L = 2006 - t_0$). Como esse valor é dado e vale $A(t_L) = 12.0\text{s}^{-1}$, podemos obter t_L de: $t_L = \left(\ln\left(\frac{A_0}{A(t_L)}\right)\right)/\lambda = \tau \ln\left(\frac{A_0}{A(t_L)}\right) = 8267 \ln\left(\frac{13.52}{12.0}\right) = 986$ anos. Assim o pano terá sido fabricado em 1020 d.C.

(1.0)**d)** O número de núcleos hoje, na peça de linha, é simplesmente dado pela equação do declíneo radioactivo: $dN/dt = -\lambda N \Leftrightarrow A(t) = -dN/dt = +\lambda N$ ou que $N(t) = A(t)/\lambda = A(t) \cdot \tau$. Agora é de notar que como $A(t)$ está em s^{-1}, teremos que exprimir τ em s. $\tau = 8267 \times 365.25 \times 24 \times 3600$ s. Assim, temos que $N(t) = 12.0 \times 8267 \times 365.25 \times 24 \times 3600 = 3.13 \times 10^{12}$ núcleos radioactivos.

(6.0) **Problema 2**

(1.5)**a)** A luz viaja dentro de água, partindo da lâmpada que está no fundo do lago para cima, até atingir a superfície.

Como atinge a superfície fazendo um ângulo de incidência de 10°(ângulo com a normal à superfície, ou ângulo com a vertical, com o valor de 10°), a luz será refractada segundo um ângulo com a normal (vertical) $\theta_r = \text{arcsen}(\frac{n_i \text{sen}(\theta_i)}{n_r}) = \text{arcsen}(1.33 \cdot \text{sen}(10°)) = 13.35°$.

(1.5)**b)** O comprimento da onda na água é simplesmente $\lambda_n = \lambda/n = 589\ \text{nm}/1.33 = 443\ \text{nm}$.

(1.5)**c)** Imaginemos a lâmpada no fundo do lago. A luz chega sempre à superfície com um ângulo de incidência entre 0°e 90°. Mas só será refractada a luz que chegar com um ângulo igual ou inferior ao ângulo de reflexão total, $\theta_{RT} = \text{arcsen}(1/n) = \text{arcsen}(1/n) = 48.75°$.

A luz proveniente da lâmpada que atinja a superfície com ângulos superiores θ_{RT} será reflectida na totalidade de volta para debaixo de água. Como a luz que chega para ângulos inferiores será também refractada para o ar, podendo chegar ao observador, cria-se um círculo iluminado no lago, centrado na ponto da superfície exactamente sobre a lâmpada.

A luz que chega ao círculo proveniente da lâmpada constitui um cone de semi-abertura angular igual ao ângulo de reflexão total. A profundidade do lago pode ser dada assim por $d =$raio do círculo/tg$(\theta_{RT}) = 0.4/1.14 = 0.1754$ m.

(1.5)**d)** A alteração de luminosidade dá-se por causa da interferência de duas ou mais ondas luminosas.

A onda 1 será a onda que viaja o percurso mais curto, incidindo na superfície (vinda da lâmpada) com um ângulo de 10° com a normal (vertical), e a onda 2 será a onda que incidiu na superfície com o mesmo ângulo, mas num ponto diferente. Seja D a distância entre os pontos de embate no óleo da onda 1 e da onda 2.

A onda 1 irá refractar para o óleo e depois para o ar. A onda 2 irá refractar para o óleo, propagar-se no óleo até chegar à superfície de separação óleo-ar, e reflectir de volta para o óleo. Então propagar-se-á no óleo até chegar à água, reflectirá na água de volta para o óleo, e então propagar-se-á ao mesmo tempo e a partir do mesmo ponto da onda 1.

Note-se que nas reflexões da onda 2, sempre em superfícies de separação para meios menos densos (isto é, de índice de refracção inferior), não haverá lugar a diferenças de fase. Assim, as diferenças de fase entre as ondas devem-se apenas a diferenças de percurso.

Para podermos comparar os percursos percorridos pelas ondas 1 e 2, é útil utilizar o mesmo comprimento de onda em ambos os casos, e corrigir o percurso atravessado pelo índice de refracção. Propagando-se na água, a onda 2 atinge o óleo mais cedo que a onda 1, porque se estão a propagar segundo uma direcção fazendo um ângulo de 10° com a vertical. Seja a o percurso extra atravessado na água pela onda 1, até atingir o óleo. Pode ser calculado a partir de D usando a expressão $a = D\text{sen}(10°)$. Seja $2b$ o percurso efectuado no óleo pela onda 2, desde que aí chegou até se encontrar com a onda 1 (e prosseguirem juntas, causando interferência). A relação entre b e a espessura da camada de óleo, x, é dada pelo ângulo de refracção para a onda 2: $x = b\cos\theta_r$.

Com as devidas correcções devido aos diferentes índices de refracção, podemos agora afirmar que há interferência destrutiva correspondente ao primeiro mínimo de intensidade, se

$$d.d.p. = \lambda/2 \Leftrightarrow 2n_o b - n_a a = \lambda/2$$

em que n_o, n_a são respectivamente o índice de refracção do óleo $n_o = 1.474$ e da água $n_a = 1.33$. Finalmente pode-se notar que $D = 2b\text{sen}(\theta_r)$, daí que se pode obter uma segunda relação entre a e b: $a = 2b\text{sen}\theta_r\text{sen}\theta_i$. Como $\text{sen}\theta_r = \frac{n_a}{n_o}\text{sen}\theta_i$, vem

$$2n_o b - \frac{2b}{n_o}n_a^2\text{sen}^2\theta_i = \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow b = 0.102\mu\text{m, e } x = b\cos\theta_r = 0.101\mu\text{m.}$$

(7.0) **Problema 3**

Neste problema, é útil calcular já os momentos de inércia para os blocos, embora de facto só sejam necessários na alínea b).

O bloco A é um cilindro ôco, em tudo semelhante a um anel esticadito. O seu momento de iércia, em relação ao eixo longitudinal, é dado por $I_A = mr^2 = 2.5 \times 10^{-4}$ Kgm^2.

O bloco B é composto por um cilindro ôco, igual ao bloco A, e um cilindro maciço, em tudo semelhante a disco esticadito. O momento de inércia da parte maciça é assim dada por $mr^2/2$, e o momento de inércia total do bloco B, em relação ao eixo longitudinal é $I_B = I_A + mr^2/2 = 2.5 \times 10^{-4} + 2.25 \times 10^{-4}$ Kgm^2, ou seja $I_B = 4,75 \times 10^{-4}$ Kgm^2.

(2.0)**a)** Não há atrito nesta parte do problema. Então ambos os blocos vão deslizar!

(1.0)i) Como os blocos só deslizam, são irrelevantes os respectivos momentos de inércia, e as acelerações, que não dependem das massas, são ambas iguais a $a_A = a_B = \mathrm{gsen}\theta = 9.8\mathrm{sen}30° = 4.9$ m/s^2.

(1.0)ii) Como os blocos têm a mesma aceleração, e partem ambos do repouso, nunca irão colidir. O resto da pergunta não se aplica nesta situação.

(5.0)**b)** Nesta parte do problema há atrito, sempre suficiente para impôr rolamento sem deslize dos blocos.

(2.0)i) Para descobrir a aceleração dos blocos, vamos calcular a aceleração para um bloco que rola sem deslizar, que tenha um dado momento de inércia I.
Como há rolamento sem deslize, o movimento do centro de massa (com velocidade v e aceleração a) estŕelacionado com o movimento de rotação do bloco em torno do seu centro de massa (com velocidade de rotação w e aceleração angular α): $v = w \cdot r, a = \alpha \cdot r$, em que r é o raio do bloco.
Temos assim três equações, uma para o movimento de translacção do centro de massa ($\vec{F} = m\vec{a}$), outra para o movimento de rotação $\vec{N} = I\alpha$, e a equação $a = \alpha \cdot r$.
Ora as forças que actuam o bloco são a componente do peso no plano inclinado e a força de atrito, f. Esta força de atrito é a única força que exerce momento de força em relação ao centro de massa do bloco, momento que tem o valor $N = r \cdot f$.
Assim, temos um sistema de 3 equações:

$$\begin{cases} m\mathrm{gsen}\theta - f & = ma \\ rf & = I\alpha \\ a & = \alpha \cdot r \end{cases}$$

que se pode resumir a uma única equação:

$$mg\text{sen}\theta - \frac{I}{r^2} = ma \Leftrightarrow a = \frac{g\text{sen}\theta}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Para os bloco A e B, temos

$$a_A = \frac{g\text{sen}\theta}{1 + \frac{I_A}{mr^2}} = \frac{4.9}{1+1} = 2.45 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \frac{g\text{sen}\theta}{1 + \frac{I_B}{mr^2}} = \frac{4.9}{1 + \frac{4.75}{0.6\times 25}} = 3.72 \text{ m/s}^2$$

(3.0)ii) Uma vez que partem do repouso e a aceleração do bloco B é superior à do bloco A, a resposta é Sim, o bloco B irá colidir com o bloco A.
Para calcular a distância percorrida pelos dois blocos, pensamos no movimento do bloco B visto pelo bloco A. Está a $d_{BA} = 2$ m de distância e tem velocidade inicial nula e aceleração $a_{BA} = 3.72 - 2.45 = 1.27$ m/s^2 na direcção e sentido do bloco A.
Irá colidir passado um tempo $t_e = \sqrt{2d_{BA}/a_{BA}}$. Nesse tempo, o bloco B terá viajado um percurso $d_B = a_B t_e^2/2 = a_B d_{BA}/a_{BA} = 5.85$ m, naturalmente mais 2 m que o bloco A (que assim viajou 3.85 m). (pode querer confirmar que $3.85 = a_A t_e^2/2 = a_A d_{BA}/a_{BA}$).
Após o embate, o bloco B segue com velocidade (do centro de massa) $v'_B = 3.572$ m/s. Para calcular v'_A, a velocidade do bloco A após o choque, precisamos ainda das velocidades dos blocos A e B imediatamente antes do choque.
Mas isso obtemos do movimento antes do choque. Como o embate se deu no instante $t_e = 1.77$ s, os blocos têm velocidade, respectivamente, $v_A = a_A t_e = 4.35$ m/s e $v_B = a_B t_e = 6.60$ m/s.
Agora, já podemos calcular v'_A:

$$v'_A = \frac{m_A v_A + m_B v_B - m_B v'_B}{m_A} = 22.52 \text{ m/s}.$$

Podemos então calcular a distância percorrida pelos blocos até ao embate seguinte, que ocorre após um intervalo de tempo $t'_e = 2\frac{v'_A - v'_B}{a_B - a_A} = 29.84$ s. Note que $t_e/2$ é o tempo que leva, no referencial solidário com o bloco A, para que o bloco B que tem velocidade $v'_{BA} = v'_B - v'_A < 0$ e aceleração positiva $a_{BA} = a_B - a_A$ fique com velocidade em relação a A igual a zero.
A distância percorrida é assim $d'_B = d'_A = v'_B t'_e + \frac{1}{2} a_B t'_e =$ 1770 m.