Resolução do 1º Exame e 2º Teste de Mecânica e Ondas

LEE/LEGI, 26 de Junho de 2006

(4.0) Problema 1

(1.0)**a)** A densidade linear de massa é $\mu = 0.2/1.0 = 0.2$ Kg/m. A tensão a que a corda está sujeita, quando tem suspensa uma massa de 80 Kg, é $T = 80g = 784$ N. Assim a velocidade máxima de propagação das ondas na corda nesta circunstância é $V = \sqrt{\frac{T}{\mu}} =$ 62.6 m/s.

(1.0)**b)** Porque o comprimento de onda do som grave que o jovem reclama ter ouvido é superior ao valor máximo para uma onda sonora que tivesse origem numa onda estacionária que se propagasse naquela corda. O comprimento de onda máximo de uma onda estacionária na corda é o da onda fundamental, $\lambda_{\mathrm{m}ax} = 2L = 2.0$ m. Esta onda tem uma frequência mínima $f_0 = V/\lambda_{\mathrm{m}ax} = 31.3$ Hz. A onda sonora (no ar) tem que ter a mesma frequência (portanto também é mínima), e o comprimento de onda da onda sonora (portanto também é máximo) tem o valor $\lambda^{ar}_{\mathrm{m}ax} = V_{som}/f_0 = 340/31.3 =$ 10.86 m, inferior ao valor reclamado pelo jovem.

(2.0)**c)** O facto do jovem vir a fugir do local permite inocentá-lo, em primeira aproximação. Tendo-se produzido uma onda sonora com o comprimento de onda máximo, o jovem detecta um comprimento de onda superior devido ao efeito Döppler, porque se afasta com velocidade v:

$$\lambda_{\mathrm{d}(etectado)} = \lambda_{\mathrm{e}(mitido)} \frac{V_{\mathrm{som}}}{V_{\mathrm{som}} - v} \Leftrightarrow v = V_{\mathrm{som}} \left(1 - \frac{\lambda_{\mathrm{e}}}{\lambda_{\mathrm{d}}}\right) = 55.95 \text{ m/s}.$$

(0.0)**d)** É um caso policial clássico de suicídio com a ajuda de um grande bloco de gelo, que se derrete deixando a poça de água.

(4.0) Problema 2

(1.0)**a)** Pela conservação do momento linear, como antes de lançar a bola está parado, $\vec{P} = 0$, após lançar a bola temos

$$\vec{P}_A + \vec{P}_B = 0 \Leftrightarrow v_A = m_B v_B / m_A \Leftrightarrow v_A = 5 \times 10/100 = 0,5 \text{ m/s}.$$

(1.0)**b)** Aplica-se a mesma regra:

$$\vec{P}_B = \vec{P}_C \Leftrightarrow$$

$$m_B v_B = (m_B + m_{A2}) v_C = m_C v_C \Leftrightarrow v_C = 50/(5+50) = 0,9091 \text{ m/s}.$$

(1.0)**c)** A velocidade do centro de massa do conjunto dos alunos mais bola é sempre nula, pois estava inicialmente parado e não há forças exteriores a actuar sobre este conjunto. De facto, antes do 1ºaluno lançar a bola a velocidade é nula ($= (100 \times 0 + 5 \times 0 + 50 \times 0)/155 = 0$); depois de lançar e antes de ser capturada, temos

$$V_{CM} = \frac{100 \times (-0,5) + 5 \times 10 + 50 \times 0}{100 + 5 + 50} = 0;$$

finalmente após ser capturada, a velocidade do centro de massa é ainda nula:

$$V_{CM} = \frac{100 \times (-0,5) + 5 \times 0,9091 + 50 \times 0,9091}{100 + 5 + 50} = 0 \, .$$

(1.0)**d)** Para estar em órbita a $h = 400$ Km de altura sobre a superfície da Terra, é porque a força atractiva para o centro da Terra, dada por $F_c = mv^2/r = mv^2/(h + R_T)$, tem de ser idêntica à força gravítica:

$$\frac{mv^2}{r} = G_N \frac{M_T m}{r^2} \, .$$

A velocidade da E.E.I. na órbita da Terra (e à volta dela, isto é, em cada instante em relação ao centro da Terra) é:

$$v = \sqrt{G_N \frac{M_T}{r}} = 7672 \text{ m/s}.$$

O I.S.T. também tem velocidade em relação ao centro da Terra, mas é baixa ($= R_T \cos(\text{latitude}) \times \omega_T = 4,974 \times 10^6 m \times \frac{2\pi}{86400 s} \approx$ 362 m/s.)... Desprezando esta velocidade, obtemos para a resposta o valor de 7672 m/s ($\approx$ 27620 Km/h!). Contudo se não desprezarmos esta velocidade, então o cálculo correcto a fazer, para obter o módulo da velocidade da E.E.I. em relação ao I.S.T., é

$$v_{EEI/IST} = \|\vec{v}_{EEI} - \vec{v}_{IST}\| = \sqrt{v_{EEI}^2 + v_{IST}^2 - 2\vec{v}_{EEI} \cdot \vec{v}_{IST}};$$

O produto interno só depende do ângulo entre os dois vectores, que é em primeira aproximação o ângulo entre o plano da órbita e o plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra passando pelo I.S.T.. Este ângulo é a latitude ($\approx 39°$).

$$v_{EEI/IST} = \sqrt{7672^2 + 362^2 - 2 \times 7672 \times 362 \times \cos(39)} \approx 7394 \text{ m/s}.$$

(4.0/6.0) **Problema 3**

Este problema tinha um valor para a constante da mola do dinamómetro $k = 0,1$ N/m que, sem intenção, era um valor exageradamente baixo. Isto em nada altera o método de resolução ou o raciocínio a desenvolver, tendo apenas como consequência resultados um pouco estranhos.

(1.0/1.5)**a)** Em equilíbrio, as forças sobre a massa suspensa dentro da água são nulas. São elas a força gravítica, a força da mola do dinamómetro e a força da impulsão da água. Como a massa está imersa na totalidade, a força da impulsão da água é simplesmente:

$$I_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g = 2,63 \text{ N}.$$

Se não estivesse imersa, o dinamómetro marcava o peso do corpo esférico (a força gravítica $F_g = mg = 19,6$ N). Imersa, é preciso descontar a impulsão, que reduz a força exercida na mola do dinamómetro: $F_D = F_g - I_A = 19,6 - 2,63 = 16,97$ N.

A balança marca a massa do balde mais a massa da água e, por causa da massa imersa, marca ainda o valor da impulsão em kgf. A impulsão é exercida pela água sobre o corpo esférico, logo o corpo esférico exerce exactamente a mesma força sobre a água (acção-reacção), que passa para a balança. Assim a balança marca $B = m_B + m_A + I/g = 1 + 2 + 0,268 = 3,268$ Kg.

Concluindo o dinamómetro marca 16,97 (N) e a balança marca 3,268 (Kg).

(1.0/1.5)**b)** Para o dinamómetro marcar 16,97 (N), é porque a mola distendeu $16,97/k = 16,97/0,1 = 169,7$ m. O comprimento total da mola é assim $169,7 + l_0 = 169,7 + 0,1 = 169,8$ m.

(1.0/1.5)**c)** Considerando a balança travada, e movimento apenas na vertical, então o sistema só tem um grau de liberdade. Seja x a distância da massa ao ponto de equilíbrio do sistema, com sentido positivo se descer e negativo se subir, e defina-se nesse ponto que a energia potencial gravítica é nula. Temos de colocar também um termo de energia potencial para a impulsão (que também se assume nula no ponto de equilíbrio). Como a impulsão é o peso do volume deslocado, o termo de energia potencial correspondente é idêntico ao termo para a energia potencial gravítica da massa, mas com o sinal contrário dado que a impulsão tem o sentido contrário do peso da massa. Para a mola, note-se que o comprimento total da mola se escreve, em função de x como sendo $l = 169,8 + x$. Temos então:

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \ ; \ E_{pG} = -mgx \ ; \ E_{pI} = +(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g)x \ ;$$

$$E_{pM} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}k(169,7 + x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \equiv E_c - E_p = & \ \tfrac{1}{2}2\dot{x}^2 - (-19,6x + 2,63x + \tfrac{1}{2}0,1(169,7 + x)^2) \\ = & \ \dot{x}^2 - 0,05(169,7 + x)^2 + 16,97x \ . \end{aligned}$$

A equação do movimento pode agora ser escrita usando as equações de Euler-Lagrange, que a uma dimensão x se escreve (F_x é a componente segundo x da soma resultante das forças exteriores [não colocadas em termos de energia potencial e relevantes ao sistema, neste caso a força de atrito]):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = -F_x,$$

ou substituindo os termos, e lembrando que a força de atrito é proporcional à velocidade $v \equiv \dot{x}$,

$$-0,1(169,7 + x) + 16,97 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = -(-0,075\dot{x})\ ;$$

simplificando os termos e dividindo por -2, obtemos finalmente a equação de movimento:

$$\ddot{x} + 2 \cdot 0,01875\dot{x} + 0,05x = 0$$

(1.0/1.5)**d)** Se a balança estiver destravada, o sistema passa a ter dois graus de liberdade: a posição da massa (x) e a posição y do balde+água. Se a água não provocasse nenhum atrito, os sistemas eram completamente independentes. Como o atrito é uma força exterior a cada um dos sistemas que não se consegue colocar no lagrangeano, podemos começar por escrever o lagrangeano para o sistema como dois subsistemas independentes.

O primeiro sistema é idêntico ao da alínea anterior. O segundo sistema é também muito parecido. A coordenada y é a distância do centro de massa do balde+água (com massa total M=3 Kg) ao ponto de equilíbrio do segundo sistema, e define-se o sentido positivo como sendo para baixo (e negativo quando sobe). Note só que neste segundo sistema a impulsão é a somar!, e que para a Mola da Balança o comprimento total se escreve, em função de y como sendo $l = l_0 - \frac{3,268g}{K} - y = 0,167 - y$. Então as energias cinética e potencial escrevem-se:

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{y}^2\ ;\ E_{pG} = -Mgy\ ;\ E_{pI} = -(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g)y\ ;$$

$$E_{pM} = \frac{1}{2}K(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}K(-0,0327 - y)^2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \equiv E_c - E_p = & \ \tfrac{1}{2}3\dot{y}^2 - (-29,4y - 2,63y + \tfrac{1}{2}980(-0,0327 - y)^2) \\ = & \qquad 1,5\dot{y}^2 - 490(-0,0327 - y)^2 + 32,03y \ .\end{aligned}$$

Agora para escrever as 2 equações de Lagrange (uma para x e outra para y), é que temos que incluir a força de atrito, proporcional à velocidade relativa $(\dot{x} - \dot{y})$. Assim, podemos escrever o sistema (note depois que $F_y = -F_x$ (acção-reacção)):

$$\left\{\begin{array}{lll}(x) & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\right) & = -F_x \\ (y) & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\right) & = -F_y\end{array}\right. \tag{1}$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{lll}(x) & -0,1(169,7 + x) + 16,97 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) & = -(-0,075(\dot{x} - \dot{y})) \\ (y) & +980(-0,0327 - y) + 32,03 - \frac{d}{dt}(3\dot{y}) & = -(-0,075(\dot{y} - \dot{x}))\end{array}\right. . \tag{2}$$

Simplificando os termos e dividindo por -2 e -3, respectivamente, obtemos finalmente as novas equações de movimento:

$$\left\{\begin{array}{lll}(x) & \ddot{x} + 2 \cdot 0,01875(\dot{x} - \dot{y}) + 0,05x & = 0 \\ (y) & \ddot{y} + 2 \cdot 0,01250(\dot{y} - \dot{x}) + 326,7y & = 0\end{array}\right. . \tag{3}$$

(4.0/7.0) Problema 4

(1.5/2.5)**a)** Para o capitão as portas abrem ao mesmo tempo:

$$t_F = t_A = 100/c = 3,33 \times 10^{-7} \text{ s} \ .$$

(1.5/2.5)**b)** Como a nave se dirige para si, que está na Terra, a nave está-se a aproximar com velocidade $v = -0,95c$. As transformações de Lorentz são (reduzindo o problema apenas a uma dimensão espacial):

$$\beta \equiv \frac{v}{c} = -0,95 \ ; \ \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 3,2 \ ;$$

$$\begin{cases} (x) \quad x_T = \gamma(x_N - 0,95(ct_N)) \\ (ct) \quad ct_T = \gamma(ct_N - 0,95x_N) \end{cases} \tag{4}$$

Assim, a forma mais fácil de fazer os cálculos para os tempos na Terra, é transformar para o referencial da Terra as coordenadas dos acontecimentos equivalentes no referencial da Nave (calculados na alínea a)). Na nave temos dois pontos: feixe chegou à porta da frente da nave $(x_N; ct_N)_F = (-100; +100)$(m); feixe chegou à porta de trás da nave $(x_N; ct_N)_A = (+100, +100)$(m). Usando as transformações acima, temos

$$\begin{cases} (x) \quad x_T(A) = 3,2(+100 - 0,95(+100)) = +16 \text{ m} \\ (ct) \quad ct_T(A) = 3,2(+100 - 0,95(+100)) = +16 \text{ m} \end{cases} \tag{5}$$

e podemos concluir que $t_T(A) = \dfrac{16}{c} = 5,3 \times 10^{-8}$ s;

$$\begin{cases} (x) \quad x_T(F) = 3,2(-100 - 0,95(+100)) = -624 \text{ m} \\ (ct) \quad ct_T(F) = 3,2(+100 - 0,95(-100)) = +624 \text{ m} \end{cases} \tag{6}$$

e podemos concluir que $t_T(F) = \dfrac{624}{c} = 2,08 \times 10^{-6}$ s;
Os acontecimentos não são simultâneos no referencial da Terra, e o intervalo de tempo entre eles é de $\Delta t_T = (624-16)/c = 2,027\mu$s. Também poderíamos obter o intervalo de tempo entre eles a partir da expressão

$$\Delta t_T = \frac{1}{c}\Delta(ct_T) = \frac{1}{c} \cdot \gamma(\Delta ct_N - 0,95\Delta x_N)$$

ou

$$\Delta t_T = \frac{3,2}{c}(0-0,95(-100-100)) = \frac{3,2}{c} \times 0,95 \times 200 = 2,027\mu\text{s} .$$

(1.0/2.0)**c)** É simplesmente igual a

$$(v_C)_T = \frac{0,95c + 0,05c}{1 + \frac{(0,95c)(0,05c)}{c^2}} = \frac{c}{1 + 0,95 \cdot 0,05} = 0,9547c$$

(0.0/0.0)**d)** De acordo com a série "Espaço 1999", ocorreu a 13 de Setembro de 1999, sendo na altura comandante da base o Comandante Koenig.

(4.0/7.0) Problema 5

(2.0/4.0)**a)** Temos de começar por calcular com que velocidade é que sai a água. Se desprezarmos a velocidade de descida da água no depósito de água e a variação da pressão atmosférica com a altitude até à altura do depósito, a expressão da equação de Bernoulli:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}.$$

reduz-se a $v = \sqrt{2g\Delta h}$.
Ora, $\Delta h = 20 - L$ sen$30° = 20 - 3 \times 0,5 = 18,5$ m. Assim, a velocidade com que sai a água é simplesmente

$$v = \sqrt{37g} \approx 19,04\mathrm{m/s}.$$

A altura máxima a que sobe a água corresponde agora á trajectória simples de um projéctil com velocidade inicial de 19,04 m/s fazendo um ângulo de 30° com a horizontal (a partir do ponto de saída do tubo). Como esta altura é dada pela expressão

$$h_{\max} = v\mathrm{sen}30° t_{subida} - \frac{g}{2}t^2;$$

$$t_{subida} = \frac{v\ \mathrm{sen}30°}{g} \Leftrightarrow h_{\max} = \frac{v^2\mathrm{sen}^2 30°}{2g} = 4,625 \text{ m acima da saída do tubo.}$$

(1.0/1.5)**b)** O caudal de saída de água do tubo é dado pelo produto da área da secção do tubo pela velocidade: $Q = v{\cdot}\pi r^2 = 19,04{\times}3,14{\times}10^{-4} = 5,98{\times}10^{-3}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$. O tempo necessário para encher um alguidar com 50 L ($1L = 10^{-3}m^3$), é

$$\Delta t = \frac{\text{Volume}}{\text{Caudal}} = \frac{0,05\mathrm{m}^3}{5,98 \times 10^{-3}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}} = 8,36\mathrm{s}\ .$$

(1.0/1.5)**c)** Desprezando os salpicos e o atrito com o ar, temos de contabilizar, além das massas existentes sobre a balança ao fim de 5 s, apenas o impacto da água.

O impacto da água, que é toda absorvida (desprezando salpicos), é dado por $\frac{dP}{dt}$, mas só é relevante a componente vertical, pois a outra contribuiria, quando muito, para a deslocação horizontal do alguidar (desprezada). Note-se ainda que a componente vertical da velocidade da água é idêntica à velocidade vertical com que sai do tubo, dado que está à mesma altitude. Ora, em $dt = 1$ s, uma certa quantidade de água com velocidade vertical chega ao alguidar e perde essa velocidade. A variação da quantidade de movimento da água nesse intervalo de tempo é

$$\Delta P = 0-(mv) = -\text{Volume}\cdot\rho\cdot v = -5,98\times 10^{-3}\times 1000\times 19,04\times \text{sen}30^\circ\ .$$

Essa é a força exercida pelo alguidar sobre a água, e a força exercida pela água sobre o alguidar é então (acção-reacção)

$$F = -\frac{dP}{dt} = 56,94\ \text{N}.$$

Como a balança marca kgf, é preciso dividir este valor por g, antes de somar às contribuições das outras massas:

$$B = B_{\text{5 L água}} + B_{\text{alguidar}} + B_{\text{impacto}} = 5+1+\frac{56,94}{g} = 11,81\ \text{Kg}.$$