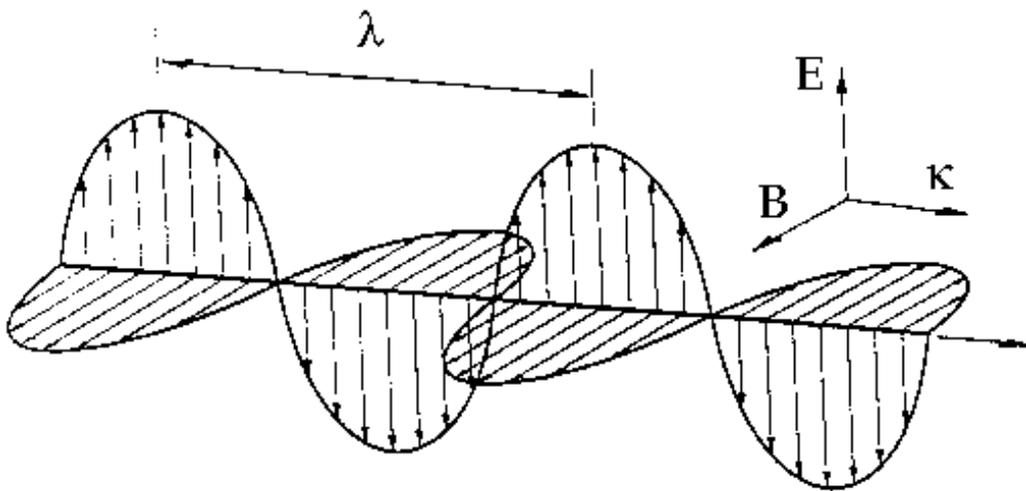

Colecção de Problemas de Electromagnetismo e Óptica

Mestrado em Engenharia Electrotécnica e Computadores (MEEC)
1º semestre de 2007-08



F. Barão, L. F. Mendes
Departamento de Física do Instituto Superior Técnico
Versão: Agosto/2007

Conteúdo

1 Electrostática	9
1.1 Introdução	9
1.2 Exercícios Propostos	17
1.3 Exercícios Resolvidos	27
1.4 Soluções	38
2 Corrente estacionária	41
2.1 Exercícios Propostos	42
2.2 Problemas Resolvidos	45
2.3 Soluções	47
3 Magnetostática	49
3.1 Exercícios Propostos	50
3.2 Exercícios Resolvidos	54
3.3 Soluções	57
4 Movimento de partículas em campos	59
4.1 Exercícios Propostos	60
4.2 Exercícios Resolvidos	63
4.3 Soluções	65
5 Campo Magnético Variável	67
5.1 Exercícios Propostos	68
5.2 Exercícios Resolvidos	73
5.3 Soluções	76
6 Circuitos Eléctricos	77
6.1 Exercícios Propostos	78
6.2 Exercícios Resolvidos	81
6.3 Soluções	83
7 Equações de Maxwell e Ondas Electromagnéticas	85
7.1 Exercícios Propostos	86
7.2 Exercícios Resolvidos	89
7.3 Soluções	91

8	Óptica	93
8.1	Exercícios Propostos	94
8.2	Exercícios Resolvidos	97
8.3	Soluções	98

Constantes Físicas

massa do electrão	m_e	$9,10 \times 10^{-31}$ kg
massa do protão	m_p	$1,67 \times 10^{-27}$ kg
carga elementar	e	$1,6 \times 10^{-19}$ C
permitividade eléctrica do vácuo	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	9×10^9 N.m ² .C ⁻²
permitividade magnética do vácuo	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	10^{-7} N.A ⁻²
constante de Planck	h	$6,6 \times 10^{-34}$ J.s
número de Avogadro	N_A	$6,022 \times 10^{23}$
velocidade da luz no vácuo	c	3×10^8 m.s ⁻¹

Formulário matemático

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b}$$

$$\int \frac{1}{r(r+a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{r}{r+a}\right)$$

Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{l} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dV = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dS = r dr d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{l} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dV = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\phi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$\begin{aligned}
 d\vec{l} &= dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi \vec{u}_\phi \\
 dV &= r^2 dr \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi \\
 \vec{\nabla} F &= \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right) \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\operatorname{sen}\theta A_\theta) + \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi) \\
 \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left[\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial (\operatorname{sen}\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\operatorname{sen}\theta A_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \\
 &\quad \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \\
 &\quad \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi
 \end{aligned}$$

Teorema da Divergência

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_V \vec{\nabla} \times \vec{A} dS = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Identidades vectoriais

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \\
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= 0 \\
 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}
 \end{aligned}$$

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_V \rho dV$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$
- $\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = - \int_V \rho_{pol} dV$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\rho_{pol}$
 $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
- $\Phi_P = \int_{R_P}^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{l}$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$
- $Q = CV$
 $U_E = \sum_i q_i \Phi_i$
- $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
 $U_E = \int_V u_E dV$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma \vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{d\rho}{dt}$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ H/m}$
- $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu \vec{H}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_M \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_M$

Movimento de partículas em campos

- $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$; $U_M = \frac{1}{2} \Phi I$
- $U_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$; $U_M = \int_V u_M dV$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Leis de Maxwell e Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\kappa}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$

Óptica ondulatória

- $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
- $\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$

interferência entre fendas

- $d \sin \theta_{max} = m\lambda$
- $d \sin \theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'}$
com $m' \leq N$ e par

difracção

- $a \sin \theta_{min} = m\lambda$

Capítulo 1

Electrostática

1.1 Introdução

A força entre duas cargas eléctricas Q_1 e Q_2 separadas por uma distância r é proporcional a $Q_1 Q_2/r^2$ e a sua direcção encontra-se ao longo da linha que une as duas cargas:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r} \quad (1.1)$$

O vector \vec{r} aponta da carga Q_1 para a carga Q_2 no caso de se querer a força aplicada pela carga 1 sobre a 2, ou vice-versa no caso contrário. O factor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ aparece devido ao sistema **SI** de unidades escolhido (MKSA), onde a carga se expressa em **Coulomb (C)** e a distância em **metros (m)**.

Lei de Coulomb

Quando existem mais que duas cargas, a força total sentida por uma das cargas Q resulta da soma vectorial das forças aplicadas por cada uma das cargas existentes à sua volta Q_i :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} + \dots \\ &= Q \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Princípio da Sobreposição

A constante ϵ_0 é conhecida como **constante dieléctrica ou permitividade** do vácuo. O seu valor poderia ser determinado a partir da medição da força entre duas cargas pontuais colocadas a uma distância conhecida, mas isso não é prático. Podemos mais facilmente fazer a sua determinação a partir da medida da capacidade de um condensador, como se verá mais adiante.

Permitividade eléctrica

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8,8542 \times 10^{-12} [F.m^{-1}] \\ 4\pi\epsilon_0 &= \frac{1}{9 \times 10^9} [F.m^{-1}] \end{aligned}$$

A força electromagnética é uma das quatro forças fundamentais da Natureza, ou numa linguagem mais moderna, é uma das interacções fundamentais. As quatro forças são por ordem crescente, a **força gravítica** que rege o movimentos dos planetas por exemplo, a **força fraca** responsável pelas desintegrações radioactivas, **força electromagnética** que é dominante ao nível atómico (ligações químicas) e a **força forte**, responsável pela coesão dos núcleos, onde existem protões a repelir-se electromagneticamente.

Forças no Universo

É útil passar da ideia de força eléctrica entre cargas para a noção de campo eléctrico produzido por cargas. Admitamos que uma carga teste estacionária ¹ Q_0 colocada numa dada região do espaço, sente uma força \vec{F} . Pode-se então concluir que existe um campo eléctrico nessa região do espaço dado por:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} \quad [V.m^{-1}] \equiv [N.C^{-1}] \quad (1.3)$$

Cargas eléctricas são responsáveis pela existência do campo eléctrico. O campo eléctrico produzido por uma carga Q_1 situada à distância r da carga teste, é então dado por:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \vec{u}_r \quad (1.4)$$

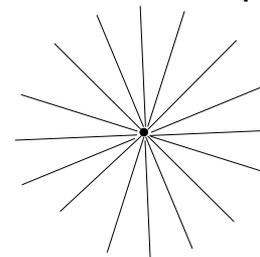
Um conjunto de cargas pontuais Q_1, Q_2, \dots, Q_i colocadas à distância r_1, r_2, \dots, r_i de um ponto P produzirão o seguinte campo eléctrico, obtido a partir do princípio da sobreposição;

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} + \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} + \dots \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \quad (1.5)$$

A visualização do campo eléctrico faz-se recorrendo a uma representação gráfica com linhas de campo. Estas são desenhadas de forma a que em cada ponto o campo eléctrico seja tangente à linha de campo. São também chamadas linhas de força uma vez que uma carga teste colocada numa linha de campo, seguirá uma trajectória coincidente com a linha de campo. A representação gráfica do campo eléctrico permite-nos ter quer uma visão da magnitude do campo, através da densidade de linhas de campo, quer uma visão da sua direcção, através da orientação das linhas.

Campo Eléctrico

Linhas de Campo



¹aqui o facto da carga estar em repouso é importante, porque evita a existência da força magnética como se verá mais adiante.

Quando a carga eléctrica se distribui de forma contínua, seja ao longo de um fio (λ C.m⁻¹), de um plano (σ C.m⁻²) ou de um volume (ρ C.m⁻³), deve ser dividida em pequenos elementos dq . Cada um destes elementos de carga produz um campo eléctrico infinitesimal num ponto P à distância r :

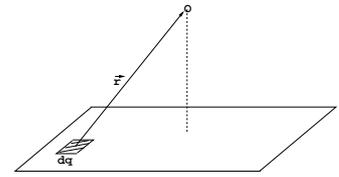
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r \quad (1.6)$$

Estes campos infinitesimais devem então adicionados vectorialmente para todos os elementos de carga dq , isto é integrados: $\vec{E} = \sum_i d\vec{E}_i \rightarrow \int d\vec{E}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{com : } dq = \lambda dx, \sigma dS, \rho dV \quad (1.7)$$

A simplificação na resolução de problemas com distribuição contínua de cargas passa por uma escolha criteriosa do sistema de coordenadas a usar nas definições das distâncias e carga.

Distribuição contínua de carga



A energia associada a um sistema de cargas eléctricas corresponde ao trabalho gasto para realizar o sistema. Por exemplo, uma carga pontual estacionária colocada numa região livre de campo eléctrico pode ser deslocada, sem que haja necessidade de aplicar uma força; a sua energia é portanto nula. Imagine agora que uma segunda carga é trazida até uma distância r da primeira, e que ambas possuem cargas positivas; deverá concordar que foi necessário vencer a força de repulsão e portanto aplicar uma força contrária $\vec{F}_a = -Q_2\vec{E}$. A energia do sistema de duas cargas corresponde então à energia gasta para trazer a segunda carga (Q_2) desde infinito (porquê daí? porque a essa distância uma e outra não se “vêem”, isto é não interagem!! e portanto a energia é nula.):

$$W = \int_{\infty}^P \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^P \frac{dr}{r^2} = +Q_2 \underbrace{\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r}}_{\phi_1} \quad (1.8)$$

A energia associada a um sistema de três cargas seria identicamente (este é um bom exercício!!):

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}} + \frac{Q_2 Q_3}{r_{23}} + \frac{Q_1 Q_3}{r_{13}} \right) \quad (1.9)$$

Recorrendo de novo ao sistema de duas cargas eléctricas Q_1 e Q_2 a uma distância r cuja energia é como sabemos dada pela expressão 1.8, podemos imaginar um pequeno deslocamento dx de uma carga em relação à outra. Se este deslocamento for no sentido de encurtar a distância entre as cargas, a energia do sistema ficará maior ou menor? Pegando na definição de energia, sabemos que teria que haver trabalho realizado para aproximar as cargas (não esquecer a força de repulsão entre cargas de sinal idêntico) e portanto a energia U aumentaria. A força electrostática (\vec{F}) presente no sistema (de repulsão) pode então ser relacionada com a variação da energia:

$$\begin{aligned} dU &= \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \\ \implies \vec{F} &= -\frac{dU}{d\vec{r}} \equiv -\vec{\nabla}U \end{aligned}$$

Energia Potencial

Força e Energia Potencial

A expressão da energia potencial associada a um sistema de duas cargas dada pela expressão 1.8 pode ser escrita em termos do potencial eléctrico Φ e da carga Q existente numa dada região do espaço:

$$U = Q\Phi$$

Assim, o potencial eléctrico num dado ponto P do espaço corresponde ao trabalho (por unidade de carga) que teria que ser realizado para trazer uma carga até aí desde um ponto de referência (normalmente o infinito):

$$\Phi_P = \int_{Ref}^P -\vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (1.10)$$

Por exemplo, o potencial eléctrico num ponto P a uma distância r de uma carga pontual Q é dado por:

$$\begin{aligned} \Phi_P &= \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left[-\frac{1}{r} \right]_r^\infty \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Da mesma forma que para o campo eléctrico, se tivermos uma distribuição de cargas discreta ou contínua, aplicaremos o princípio da sobreposição para se obter o potencial eléctrico:

$$\Phi_P = \sum_i \Phi_i \rightarrow \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad (1.12)$$

Tendo em conta a relação entre a força e a energia potencial dada pela expressão e entre esta última e o potencial eléctrico dada pela expressão , obtem-se:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{dU}{d\vec{r}} \iff Q\vec{E} = -\frac{Qd\Phi}{d\vec{r}} \\ \implies \vec{E} &= -\frac{d\Phi}{d\vec{r}} \equiv \vec{\nabla}\Phi \end{aligned} \quad (1.13)$$

Potencial eléctrico

As moléculas (e as nuvens!) são bons exemplos de objectos electricamente neutros, mas no entanto produzem um campo eléctrico e interagem com campos eléctricos externos. O sistema mais simples deste tipo é o **dipolo eléctrico** que consiste em duas cargas iguais de sinal oposto $\pm Q$ colocadas a uma distância ℓ . No dipolo eléctrico ideal a distância entre as cargas ℓ é desprezável face à distância onde se pretende calcular o campo eléctrico. A quantidade observável é o momento dipolar, definido como:

$$\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{r}_i = Q (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = Q\vec{\ell} \quad (1.14)$$

O cálculo do campo eléctrico produzido por um dipolo num ponto **P** qualquer a uma distância r , pode ser feito a partir da expressão do potencial eléctrico em **P** produzido por ambas as cargas e tendo em conta que $\ell \ll r$, vem:

$$\Phi_P = \Phi_+ + \Phi_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{Q\ell \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (1.15)$$

O campo eléctrico pode ser obtido tendo em conta a relação entre o potencial eléctrico e o campo eléctrico, dada por 1.14:

$$\begin{cases} E_r &= \frac{\partial \Phi(r,\theta)}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= \frac{\partial \Phi(r,\theta)}{r \partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \end{cases} \quad (1.16)$$

Admita agora a existência de um campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ onde é colocado um dipolo eléctrico. A força total sobre o dipolo é nula, existindo no entanto um momento da força $\vec{N} = \sum_{i=\pm} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ que o tenderá a alinhar com o campo eléctrico. A energia potencial do dipolo, calculada como sendo o trabalho realizado por uma força externa (contra o campo, portanto!) para levar o dipolo da posição angular $\theta = 90^\circ$ até à posição angular θ , resulta então:

$$U = \int_{90^\circ}^{\theta} Q\ell E_0 \sin \theta d\theta = -p E_0 \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (1.17)$$

O sinal negativo significa que o trabalho é realizado sobre o momento da força externa!!!

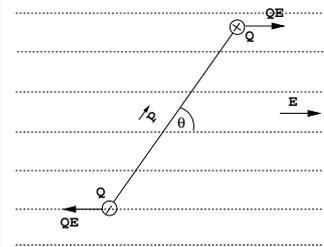
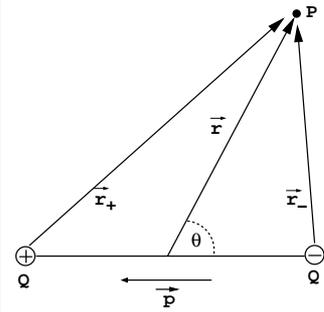
A lei de Gauss, relaciona o fluxo do campo eléctrico (Φ_E) que atravessa uma superfície fechada com a carga eléctrica **total** existente no seu interior (Q_{int}):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \equiv \oiint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1.18)$$

A lei de Gauss permite:

- determinar a carga eléctrica contida numa superfície fechada, se conhecermos o fluxo do campo eléctrico que a atravessa.
- determinar o campo eléctrico para distribuições de carga com simetria espacial, usando para tal uma superfície fechada conveniente.

Dipolo eléctrico



Lei de Gauss

Carga eléctrica introduzida num meio condutor em equilíbrio electrostático, desloca-se para a sua superfície exterior. Os tempos de relaxação da carga dependem da condutividade eléctrica do meio, sendo da ordem de 10^{-18} segundos num material bom condutor. O campo eléctrico à superfície do condutor é **normal** à superfície, dependendo da densidade de carga superficial (σ) e pode ser derivado a partir da lei de Gauss como:

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.19)$$

Equilíbrio electrostático nos condutores

Nenhum material é um isolante perfeito; no entanto, os materiais que se caracterizam por muito baixas condutividades eléctricas, são chamados **materiais dieléctricos**. Um campo eléctrico aplicado a um dieléctrico causa um deslocamento espacial da carga eléctrica positiva e negativa associada aos átomos ou moléculas (em sentidos opostos!), fazendo aparecer dipolos eléctricos. O vector polarização \vec{P} descreve a polarização do material num dado ponto do espaço e corresponde ao momento dipolar por unidade de volume ($d\vec{p}/dV$). Um material dieléctrico é caracterizado pela susceptibilidade eléctrica χ_E variável adimensional) e é do tipo **linear** se a susceptibilidade não depender do campo aplicado, do tipo **homogéneo** se a susceptibilidade não depender da posição no dieléctrico e do tipo **isotrópico** caso a susceptibilidade não dependa da direcção. A polarização no dieléctrico é proporcional ao campo eléctrico exterior aplicado \vec{E} ,

$$\vec{P} = \frac{\sum_i^{Vol} \vec{p}_i}{dVol} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E} \quad [C.m^{-2}] \quad (1.20)$$

Sendo então o momento dipolar de um volume infinitesimal de material dieléctrico $d\vec{p} = \vec{P} dV = \vec{P} dS d\ell$, deduz-se que a carga dipolar nas extremidades do volume é $dQ_P = \vec{P} \cdot d\vec{S}$. Em geral, existe carga de polarização à superfície de um dieléctrico e pode existir em volume, no caso de um dieléctrico não uniforme. A **densidade de carga de polarização superficial** existente num dado ponto cuja normal à superfície é dada pelo vector unitário \vec{n} (aponta para o exterior do dieléctrico) é:

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad (1.21)$$

A **densidade de carga de polarização em volume** existente numa dada região do dieléctrico vem:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (1.22)$$

Portanto, um campo eléctrico \vec{E}_0 aplicado a um dieléctrico origina uma polarização do dieléctrico, isto é, induz uma dada carga de polarização seja em superfície, seja em volume. O campo eléctrico resultante \vec{E} , dependerá da carga de polarização induzida no material. Recorrendo à lei Gauss, podemos calcular o campo eléctrico separando as cargas eléctricas em termos de cargas livres (Q_{liv}) e cargas de polarização (Q_P):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{liv} + Q_P}{\epsilon_0} \quad (1.23)$$

Sendo a carga de polarização contida numa superfície fechada dada por,

$$Q_P = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (1.24)$$

obtém-se a **lei de Gauss Generalizada**:

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot d\vec{S} \equiv \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{liv} \quad (1.25)$$

O **vector Deslocamento do Campo Eléctrico** \vec{D} define-se então como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_E) \vec{E} \quad (1.26)$$

Campo Eléctrico na matéria

Leis do campo electrostático: formal integral e local

Capacidade

Associação de condensadores

1.2 Exercícios Propostos

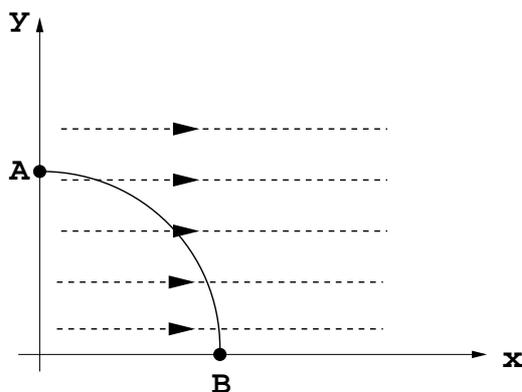
Exercício 1 : Dois pêndulos de comprimento ℓ , massa m e carga Q , encontram-se suspensos num mesmo ponto. Considere que os pêndulos se encontram na sua posição de equilíbrio e que o ângulo que os fios fazem com a vertical do lugar, θ , é muito pequeno. Determine:

- as forças que actuam as duas massas.
- a distância entre as duas massas.

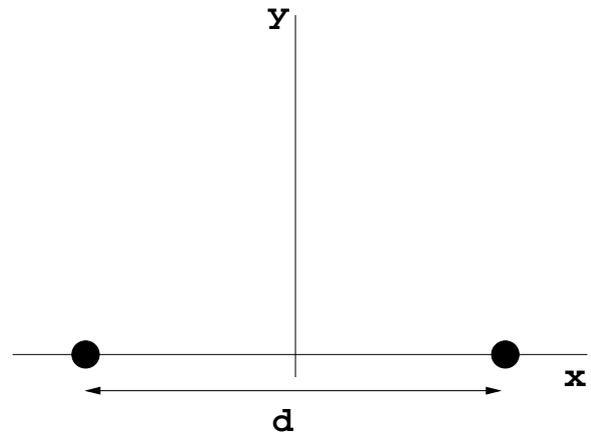
Exercício 2 : Uma carga Q_1 de $-3 \mu\text{C}$ é colocada num ponto de posição $\vec{r}_1 = (1, 3, 0)$ cm num dado referencial e uma segunda carga Q_2 de $5 \mu\text{C}$ é colocada na origem desse referencial.

- Qual a força exercida pela carga Q_1 sobre a carga Q_2 ?
- Qual o ponto do espaço em que o campo eléctrico causado pela duas cargas é nulo? Existe mais algum ponto nessas condições?
Sugestão: comece por mudar de sistema de eixos.
- Que valor de massa colocada à superfície da Terra sofreria uma força gravítica de módulo igual à da força sofrida pela carga Q_2 ?

Exercício 3 : Determine o trabalho necessário para transportar uma carga eléctrica q desde um ponto **A** $(0, y_A)$ a um ponto **B** $(x_B, 0)$, na presença de um campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ (ver figura).

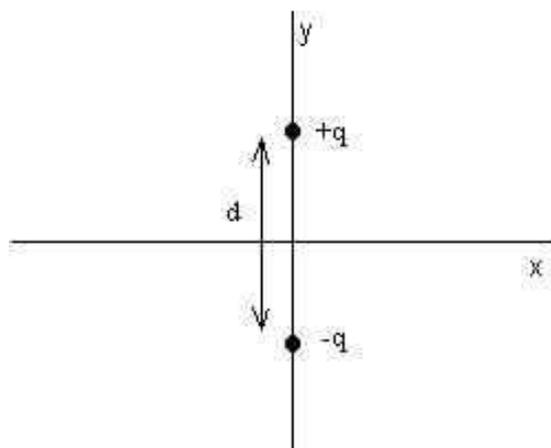


Exercício 4 : Dois prótons estão separados de uma distância $d = 4$ fm, tal como é mostrado na figura.



- Qual é a direcção do campo eléctrico em qualquer ponto do eixo yy ?
- Determine o potencial eléctrico sobre o eixo que passa pelos prótons (xx) .
- Esboce as linhas do campo eléctrico.
- Determine o ponto de equilíbrio de um outro próton que se traz para a vizinhança dos dois prótons, considerando que as três cargas estão confinadas ao eixo xx . Trata-se de um ponto de equilíbrio estável ou instável?

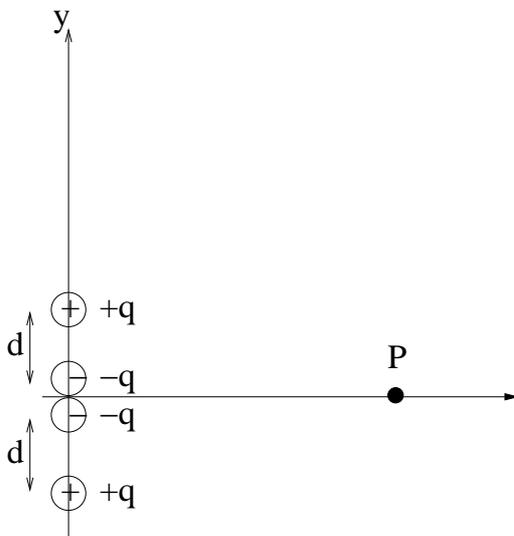
Exercício 5 : Um dipolo eléctrico é definido por um conjunto de duas cargas eléctricas simétricas $(+q$ e $-q)$ separadas de uma distância d .



- Determine a expressão do campo eléctrico criado pelas duas cargas em qualquer ponto do espaço.
- Particularize a expressão obtida na alínea a) para os pontos situados ao longo do eixo xx e do eixo yy e obtenha as expressões válidas para $x, y \gg d$.

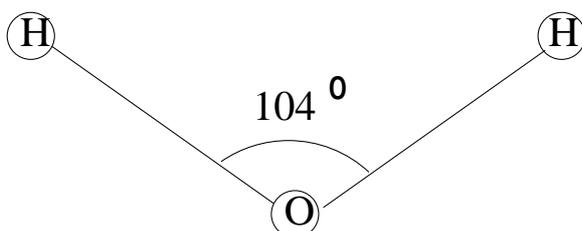
- c) Sabendo que o momento dipolar eléctrico de uma distribuição de N cargas q_i é definido por $\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i q_i$, sendo \vec{r}_i o vector posição da carga q_i , calcule o momento dipolar eléctrico e escreva as equações obtidas na alínea b) em função de \vec{p} .
- d) Esboce as linhas do campo eléctrico e as equipotenciais.

Exercício 6 : Um quadripolo eléctrico é constituído por dois dipolos eléctricos de igual momento dipolar e sentidos opostos.



- a) Calcule o momento dipolar do quadripolo.
- b) Determine o campo eléctrico no ponto P situado a uma distância x do centro do quadripolo (origem dos eixos).
- c) Determine o campo eléctrico para pontos no eixo dos xx muito afastados da origem ($x \gg d$).

Exercício 7 : Uma molécula de água é composta por dois grupos OH. Num grupo OH um átomo de Hidrogénio (H) liga-se a um átomo de Oxigénio (O) comportando-se o conjunto como um dipolo eléctrico, com uma carga $+q$ no hidrogénio e uma carga $-q$ no oxigénio, em que $q = 0,316 e$.



- a) Calcule o momento dipolar do conjunto OH formado pelos átomos, sabendo que a distância entre os dois núcleos é $d=0,97\text{Å}$.
- b) Uma molécula de água é constituída por dois grupos OH fazendo um ângulo de 104° . Calcule o momento dipolar da molécula da água.
- c) Determine o campo eléctrico criado pela molécula para distâncias (r) muito maiores que as distâncias internucleares e na direcção do momento dipolar. Calcule o seu valor a 10 Å de distância.

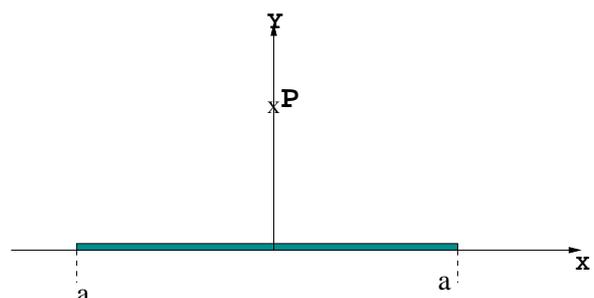
Exercício 8 : Um aro circular de raio R encontra-se linearmente carregado com uma densidade de carga $\lambda(C.m^{-1})$.

- a) Determine, a partir da lei de Coulomb, a expressão do campo eléctrico num qualquer ponto da recta perpendicular ao plano definido pelo aro e que passa no seu centro.
- b) Determine a expressão do potencial eléctrico ϕ num qualquer ponto da mesma recta.
- c) Determine a expressão do campo eléctrico a partir do potencial calculado na alínea anterior.

Exercício 9 : Um disco de raio R encontra-se uniformemente electrizado em superfície, com uma densidade de carga $\sigma(C.m^{-2})$.

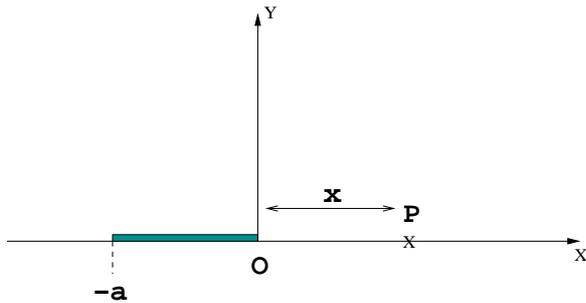
- a) Determine a expressão do potencial num ponto qualquer do eixo perpendicular ao disco que passa pelo seu centro.
- b) Determine a expressão do campo eléctrico num ponto qualquer do eixo perpendicular ao disco que passa pelo seu centro.
- c) Utilizando o resultado da alínea anterior, determine a expressão do campo eléctrico criado por um plano infinito uniformemente electrizado em superfície, com uma densidade de carga σ . Comente se poderia utilizar a mesma estratégia para o cálculo do potencial criado pelo plano infinito.

Exercício 10 : Um fio de comprimento $2a$, encontra-se carregado com uma densidade de carga $\lambda(C.m^{-1})$. Determine:



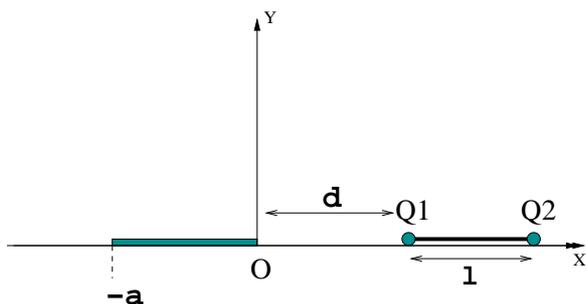
- a) a expressão do campo eléctrico num ponto **P** a uma distância **y** do fio e situado no eixo que o divide ao meio.
- b) a expressão do campo eléctrico no caso de o fio ser infinito.

Exercício 11 : Uma barra de comprimento **a** cm e densidade linear de carga λ C/m é colocada alinhada com o eixo **xx**. Determine:



- a) a expressão do potencial eléctrico no ponto **P**.
- b) a expressão do campo eléctrico no ponto **P**.
- c) a expressão aproximada do campo eléctrico para pontos do semi-eixo positivo **xx** muito afastados da barra ($x \gg a$). Comente a expressão obtida.

Exercício 12 : Uma barra carregada de comprimento $a=3$ cm e densidade linear de carga $\lambda = 2$ C/m é colocada alinhada com o eixo **xx**. A uma distância $d=4$ cm e ao longo do mesmo eixo, é colocada uma barra isolante de comprimento $\ell=2$ cm com duas cargas pontuais Q_1 e Q_2 nas extremidades.



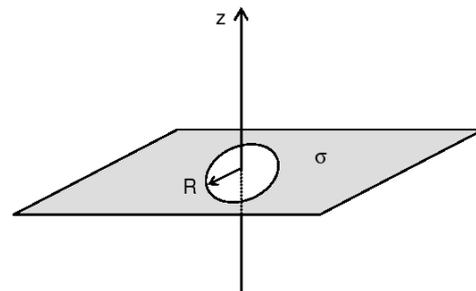
- a) Sabendo que $Q_2 = 1 \mu\text{C}$, determine o valor de Q_1 que permite à barra isolante permanecer imóvel.
- b) O movimento da barra isolante poderia ser estudado considerando todas as forças aplicadas no seu centro de massa e toda a massa do sistema aí concentrada. Atendendo ao resultado da alínea anterior, indique justificando se faz sentido definir um *centro de cargas*.

Exercício 13 : O campo eléctrico numa vasta região da atmosfera terrestre é vertical e dirigido para baixo, sendo o seu valor 60 V.m^{-1} a **300** m de altitude e 100 V.m^{-1} a **200** m. Determine a carga total existente num cubo de **100** m de lado, localizado entre **200** m e **300** m de altitude. Despreze a curvatura da Terra.

Exercício 14 : Considere um fio infinito carregado uniformemente com uma densidade de carga λ . Determine, usando a lei de Gauss, o campo eléctrico a uma distância **r** do fio.

Exercício 15 : Considere um plano infinito carregado uniformemente com uma densidade de carga σ .

- a) Determine, usando a lei de Gauss, o campo eléctrico a uma distância **r** do plano.
- b) Considere agora o plano infinito inicial com um buraco circular de raio **R** (ver figura). Calcule o campo eléctrico num ponto qualquer do eixo desse buraco (eixo **zz**).
NOTA: recorra também ao resultado do exercício 9.



Exercício 16 : Utilizando a lei de Gauss e a lei das malhas ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$) verifique que junto à superfície de um condutor se tem:

- a) a componente tangencial do campo eléctrico (E_{\parallel}) é nula.
- b) a componente perpendicular do campo eléctrico é dada por: $E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Exercício 17 : Considere uma esfera condutora de raio **R**, carregada uniformemente em superfície com uma densidade de carga σ .

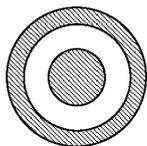
- a) Obtenha a expressão do campo eléctrico nas diferentes regiões do espaço ($r < R$ e $r > R$).
- b) Calcule a energia necessária para trazer uma carga $+q$ desde o infinito até ao centro da esfera.

Exercício 18 : Considere duas esferas condutoras de raios R_A e R_B e relativamente afastadas uma da outra pelo que a influência recíproca dos campos pode ser desprezada. Cada uma das esferas tem uma carga Q .

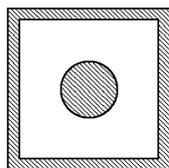
- Diga como está distribuída a carga nas esferas condutoras e calcule a sua densidade em função de Q e dos seus raios.
- Calcule o campo eléctrico junto à superfície das duas esferas em função de Q e dos seus raios.
- Suponha que se ligavam as esferas através de um fio condutor. Calcule a carga que existiria em cada esfera após se atingir a situação de equilíbrio, Q_A e Q_B , em função de Q e dos seus raios.

Exercício 19 : Um condutor cilíndrico de raio R , comprimento L ($L \gg R$) e imerso no ar está uniformemente carregado e tem uma carga total Q .

- Diga justificando como está distribuída a carga no condutor e calcule a sua densidade.
- Determine, explicando detalhadamente todos os cálculos efectuados, o campo eléctrico, \vec{E} , dentro e fora do condutor.
- Sem realizar cálculos, explique o que acontece ao campo eléctrico quando se envolve o condutor cilíndrico com um segundo condutor nos seguintes casos:



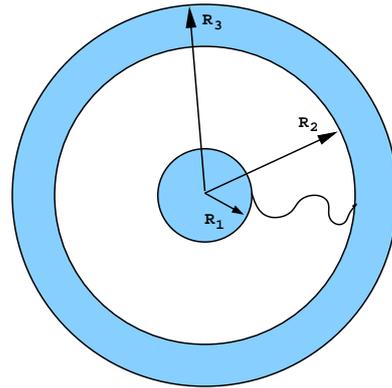
c1)



c2)

- o condutor exterior tem a forma de uma coroa cilíndrica;
- o condutor exterior tem uma forma quadrada.

Exercício 20 : Um condutor esférico oco de raios interior e exterior respectivamente R_2 e R_3 , tem no seu interior um outro condutor esférico maciço de raio R_1 . As duas esferas estão inicialmente ligadas por um fio condutor. Coloca-se uma carga positiva Q na esfera exterior e, passado algum tempo, retira-se o fio condutor que unia as duas esferas.



- Qual a diferença de potencial entre as duas esferas?
- Qual a distribuição de carga nas duas esferas após se ter retirado o fio? Justifique.
- O resultado da alínea anterior modificava-se se inicialmente se tivesse carregado a esfera interior em vez da exterior? Justifique.

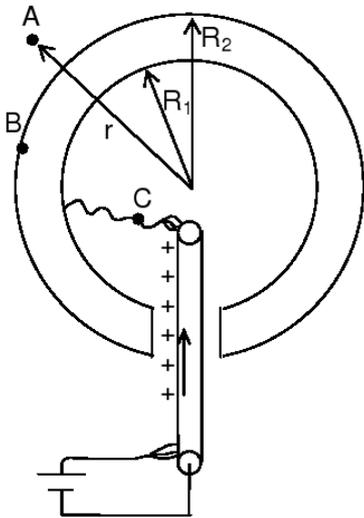
Exercício 21 : O campo eléctrico máximo que o ar suporta sem se ionizar e sem que haja disrupção é 3×10^6 $V.m^{-1}$. Determine o raio mínimo de uma esfera metálica que possa estar ao potencial de 1 milhão de Volts sem que haja disrupção do ar.

Exercício 22 : Considere um cabo coaxial constituído por um condutor cilíndrico infinito de raio R_1 e uma coroa cilíndrica condutora, também infinita, de raios interno e externo respectivamente R_2 e R_3 ($R_3 > R_2 > R_1$). Foi ligada ao cabo uma bateria que carregou o cabo interior com uma densidade de carga λ ($C.m^{-1}$).

- Determine o campo eléctrico nas várias regiões do espaço. Esboce o gráfico de $E(r)$.
- Calcule a diferença de potencial entre os cabos e desenhe as linhas equipotenciais.
- Calcule a diferença de potencial entre o condutor exterior do cabo e um ponto a uma distância radial R_4 do centro do cabo ($R_4 > R_3$)

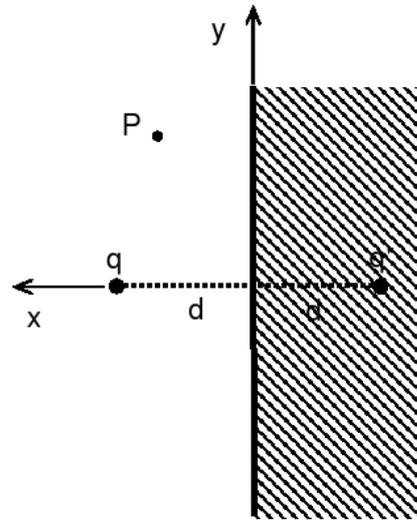
Exercício 23 : O gerador de Van der Graaf foi inventado para produzir um potencial eléctrico elevado e desta forma funcionar como acelerador de partículas (electrostático). O gerador é formado por uma coroa esférica metálica que é carregada a partir do seu interior. A coroa esférica possui raios interno e externo $R_1 = 0,25$ m e $R_2 = 0,30$ m. Uma correia de borracha é accionada por um motor e transporta cargas até ao interior da coroa esférica onde são recolhidas por um fio condutor que liga a correia à coroa. Considere que, apesar da abertura na parte inferior do gerador para passar a

correia, é uma boa aproximação considerar que no problema há simetria esférica, desde que não se esteja junto à abertura.



- Determine o campo eléctrico num ponto A , a uma distância $r > R_2$ do centro da coroa esférica condutora, em função da carga depositada na coroa, Q .
- Sabendo que o campo eléctrico máximo que o ar suporta sem que haja disrupção é $E_{ar} = 3 \times 10^6 \text{ V.m}^{-1}$, calcule o potencial máximo a que pode ficar a coroa metálica.
- Calcule a diferença de potencial entre os pontos B e C e explique resumidamente porque razão as cargas se dirigem da correia para o exterior da coroa esférica.

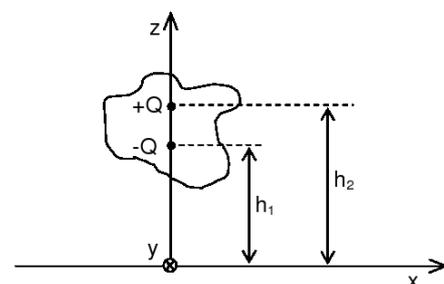
Exercício 24 : (*) Uma carga pontual q encontra-se a uma distância d de um condutor semi-infinito, que se encontra ligado à Terra ($\phi = 0$) e portanto todos os pontos do plano ($x = 0, y, z$) estão a um potencial nulo. A resolução deste problema pode ser feita com o denominado método das imagens que consiste em substituir o condutor por uma carga imagem, q' , colocada simetricamente em relação à superfície do condutor. Os dois problemas serão equivalentes do ponto de vista do potencial criado no exterior do condutor desde que o potencial na superfície do condutor seja também nulo.



- Determine a carga imagem, q' .
- Determine o potencial criado pela carga q e pelo condutor num ponto P fora do condutor, na sua proximidade $\phi_P(x < d, y, 0)$.
- Determine o campo eléctrico no mesmo ponto, \vec{E}_P . Particularize para $x = 0$, ou seja, para a superfície do condutor.
- Determine a densidade de carga na superfície do condutor, $\sigma(y)$, e esboce as linhas de campo eléctrico.
- Calcule a força exercida pelo condutor sobre a carga q .

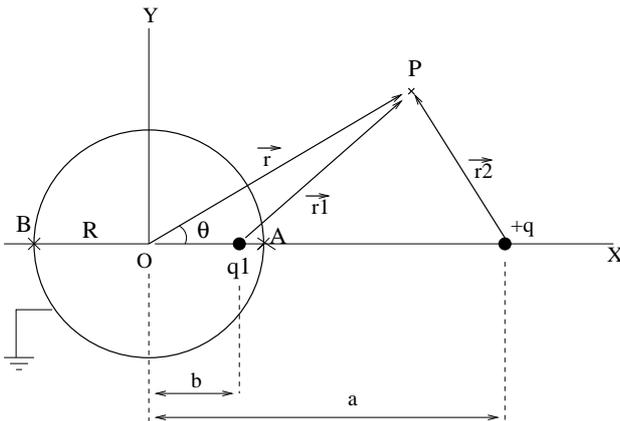
NOTA: Os problemas de método das imagens aqui propostos, 24, 25 e 26, são aplicações da matéria dada, não fazendo no entanto o método parte do programa da disciplina em 2006-07

Exercício 25 : (*) Uma nuvem num dia de tempestade pode ser representada por um dipolo eléctrico com uma carga de $\pm 10 \text{ C}$. A parte inferior da nuvem está a uma altura de $h_1 = 5 \text{ km}$ acima do solo e a parte superior a $h_2 = 8 \text{ km}$ acima do solo. O solo está molhado e pode-se considerar um bom condutor. Determine:



- a) a expressão do potencial eléctrico $\phi(x, y, z)$, na região $0 < z < h_1$;
- b) o campo eléctrico na vizinhança da Terra;
- c) a densidade de carga induzida na Terra.

Exercício 26 : (*) Uma carga $+q$ é colocada a uma distância a do centro de uma esfera condutora neutra de raio R , que está ligada à Terra ($\phi = 0$).



- a) O método das imagens permite determinar o campo eléctrico no exterior do condutor, sendo necessário para tal recorrer a uma carga auxiliar q_1 no interior do condutor. Determine a carga q_1 e a que distância b do centro do condutor O deve ser colocada de forma a que tenhamos a superfície esférica do condutor a um potencial nulo ($\phi = 0$).
(Sugestão. calcule o potencial criado pelas cargas $+q$ e q_1 nos pontos A e B e iguale-o a zero.)
- b) Determine a expressão do potencial existente num ponto P qualquer exterior à esfera condutora, em função da distância do ponto ao centro da esfera (r) e do ângulo θ .
(Sugestão. As distâncias do ponto P às cargas $+q$ e q_1 em termos de r e θ podem ser obtidas pela lei dos cosenos ou ainda, a partir das seguintes igualdades vectoriais:

$$\vec{r} - \vec{r}_2 = \vec{a} \quad (\vec{a} \equiv \overline{Oq_1})$$

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \vec{b} \quad (\vec{b} \equiv \overline{Oq})$$
- c) Enuncie sem fazer os cálculos detalhados como calcularia:
 - c.1) o campo eléctrico na superfície externa do condutor
 - c.2) a carga existente no condutor e onde é que esta se localizaria.
- d) Determine a expressão da força existente entre o condutor esférico e a carga.

Exercício 27 : Utilizando a lei de Gauss generalizada e a lei das malhas ($\oint_T \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$) verifique que junto à superfície de separação entre dois materiais de constantes dieléctricas ϵ_1 e ϵ_2 :

- a) a componente do campo paralela à superfície é contínua: $E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$
- b) componente do campo perpendicular à superfície não é contínua e, se existir uma densidade de carga σ , verifica-se a relação: $\epsilon_1 E_{1\perp} - \epsilon_2 E_{2\perp} = \sigma$.

Exercício 28 : Uma esfera condutora de raio R_1 é revestida com material isolante de constante dieléctrica relativa $\epsilon_r = 5$, de forma a obter-se uma esfera de raio R_2 . Durante o processo de fabrico a superfície interior do isolante adquiriu uma carga electrostática Q .

- a) Determine o campo \vec{D} em função da distância ao centro da esfera, r .
- b) Determine o campo \vec{E} em função da distância ao centro da esfera, r .
- c) Represente graficamente \vec{D} e \vec{E} .
- d) Determine as cargas de polarização nas superfícies do isolante.

Exercício 29 : Uma esfera de material isolante de constante dieléctrica ϵ e raio R , está uniformemente carregada em volume, com uma densidade de carga ρ e imersa no vácuo.

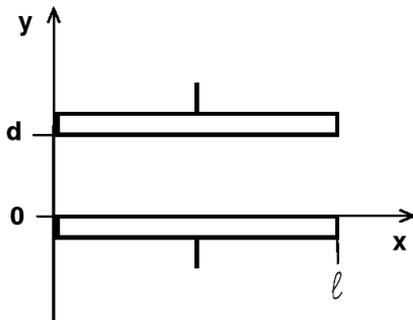
- a) Determine, explicando detalhadamente todos os cálculos efectuados, o campo eléctrico \vec{E} , dentro e fora da esfera.
- b) Determine a expressão do potencial eléctrico dentro e fora da esfera.
- c) Calcule as cargas de polarização (em volume e superfície) existentes na esfera.

Exercício 30 : A permitividade eléctrica de um meio infinito depende da distância radial (r) a um centro de simetria segundo a expressão $\epsilon = \epsilon_0(1 + a/r)$ com $a > 0$. Uma esfera condutora de raio R e carga Q é colocada naquele meio e centrada em $r = 0$. Determine:

- a) o campo eléctrico em função de r ;
- b) o potencial eléctrico em função de r ;
- c) o vector de polarização, \vec{P} , em função de r ;
- d) a densidade volúmica de carga de polarização existente no dieléctrico;

- e) a densidade de carga superficial de polarização no dieléctrico;
- f) a carga total de polarização existente no dieléctrico.

Exercício 31 : Um condensador plano tem armaduras quadradas de lado ℓ separadas de uma distância d , sendo $\ell \gg d$. No seu interior existe um dieléctrico linear e não homogêneo com uma constante dieléctrica relativa $\epsilon_r = 1 + ay$, sendo a uma constante positiva. Determine:



- a) o campo eléctrico dentro do condensador, \vec{E} , supondo que o condensador está ligado a uma bateria de tensão V (armadura positiva em $y = 0$);
- b) a capacidade do condensador;
- c) as densidades de carga de polarização em função da tensão da bateria, V .

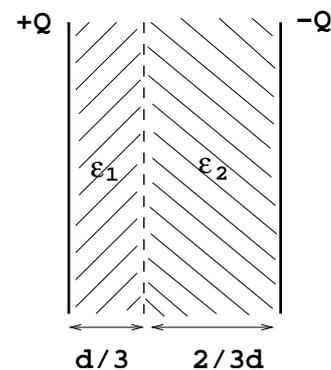
Exercício 32 : Considere um condensador esférico constituído por duas superfícies condutoras concêntricas. O condutor interior tem um raio R_1 e condutor exterior com a forma de uma coroa esférica, tem raios R_2 e R_3 . Antes de se colocar o condutor exterior, que se encontra neutro, carregou-se o condutor interior com uma carga Q .

- a) Determine a capacidade do condensador.
- b) Determine o potencial do condutor exterior em relação à terra.
- c) Admita agora que se liga o condutor exterior à terra.
- c.1) Determine a carga total existente no condutor externo e o campo eléctrico na região exterior do dispositivo.
- c.2) A capacidade do condensador altera-se? justifique.

Exercício 33 : Os iões no interior e no exterior de um neurónio estão separados por uma membrana plana de 10^{-8} m de espessura, que se comporta como um isolante com uma permissividade eléctrica $\epsilon = 8\epsilon_0$.

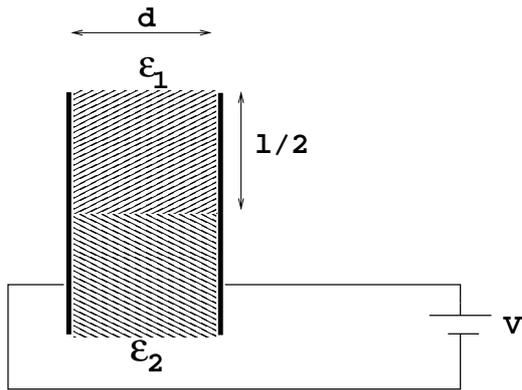
- a) Qual é a capacidade de 1 cm^2 desse neurónio?
- b) Qual a capacidade de 1 cm^2 de neurónio no caso de a membrana ter uma permissividade eléctrica igual à do ar.
- c) Sabendo que o campo eléctrico devido aos iões que se acumulam à superfície da membrana neuronal é da ordem 10^6 N/C , calcule a diferença de potencial a que está sujeito o neurónio.
- d) Determine a carga por unidade de superfície da membrana neuronal.

Exercício 34 : Um condensador de faces paralelas de área A e separadas de uma distância d ($d \ll A$) encontra-se carregado com uma carga eléctrica Q . Dois materiais dieléctricos de permissividades eléctricas ϵ_1 e ϵ_2 são colocados entre as placas condutoras, de acordo com a figura.



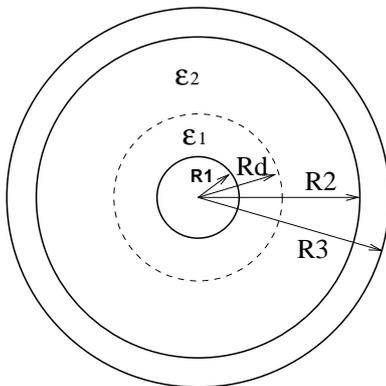
- a) Determine os vectores deslocamento eléctrico, \vec{D} , e campo eléctrico, \vec{E} , no interior dos dois dieléctricos do condensador.
- b) Determine a capacidade do condensador.
- c) Determine a densidade de carga de polarização nas superfícies dos dieléctricos.

Exercício 35 : Um condensador plano é constituído por duas armaduras paralelas de lado ℓ separadas de uma distância d . O espaço entre as placas está preenchido por dois dieléctricos lineares e homogêneos de permissividades ϵ_1 e ϵ_2 , de acordo com a figura. O condensador está ligado a uma fonte de tensão cuja diferença de potencial aplicada é V .



- Determine o campo eléctrico no espaço entre as armaduras.
- Determine a distribuição de carga na superfície das armaduras.
- Determine a densidade de carga de polarização na superfície dos dieléctricos.
- Determine a capacidade do condensador.

Exercício 36 : Um condensador esférico é constituído por um condutor de raio R_1 e uma cavidade esférica condutora de raio interno R_2 e externo R_3 . O espaço entre as armaduras metálicas está preenchido por dois dieléctricos de permitividade ϵ_1 e ϵ_2 ($\epsilon_1 > \epsilon_2$), cuja superfície esférica de separação possui raio R_d . Suponha que a armadura interna do condensador foi carregada inicialmente com uma carga $+Q$.



- Determine o campo eléctrico existente em todas as regiões do espaço e esboce num gráfico a sua magnitude em função de r .
- Determine o potencial eléctrico existente nas várias regiões e faça a sua representação gráfica.
- Determine a capacidade do condensador.
- Calcule o vector polarização nas várias regiões.
- Identifique as regiões onde existe carga de polarização e determine as densidades de carga de polarização.

Exercício 37 : Um cabo coaxial é constituído por um condutor cilíndrico interior de raio R_1 , e uma coroa cilíndrica condutora de raios R_2 e R_3 , existindo no espaço que separa os condutores um material dieléctrico de permitividade ϵ . Consideremos o comprimento do cabo, ℓ , muito maior que R_3 .

- Determine a capacidade do cabo por unidade de comprimento.
- Determine as distribuições de carga de polarização por unidade de comprimento no caso de ligar o cabo a uma fonte de tensão V .

Exercício 38 : Considere uma gota de chuva de forma esférica, com um raio $R = 2$ mm e uma carga $Q = 10^{-9}$ C uniformemente distribuída pela sua superfície.

- Calcule o potencial eléctrico a que se encontra a gota em relação ao infinito e a sua energia potencial electrostática.
- Suponha que em determinado momento a gota se divide em duas gotas iguais, igualmente esféricas e que estas se afastam muito. Averigue se esta nova situação corresponde a um ganho ou uma perda de energia electrostática.

Exercício 39 : Os ossos humanos são piezoeléctricos, ou seja, quando sujeitos a uma pressão produzem uma diferença de potencial. Esta diferença de potencial é fundamental no processo de fixação do cálcio. Por exemplo, para não descalcificarem quando estão em órbita, os astronautas fazem exercício físico. Pessoas com ossos partidos não os podem exercitar e uma terapia utilizada para promover a fixação do cálcio nestas situações é a aplicação de uma diferença de potencial exterior. Considere a aplicação de uma diferença de potencial a um braço, de acordo com a figura. Embora a aproximação só seja válida na zona central dos eléctrodos, para efeitos deste problema vamos considerar a aproximação do condensador de placas infinitas. Os eléctrodos estão isolados mas a espessura do isolante pode ser desprezada.

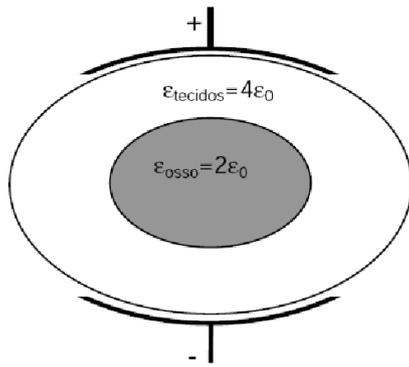


Fig 1

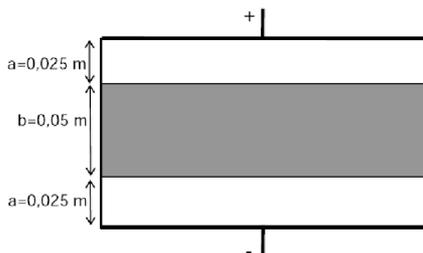


Fig 2

- a) Sabendo que a tensão aplicada aos eléctrodos é 45 V, calcule o campo eléctrico no interior do osso.
- b) Sabendo que a área dos eléctrodos é 45cm², calcule a capacidade do sistema.
- c) A densidade de energia eléctrica é maior no osso ou nos tecidos? Justifique.

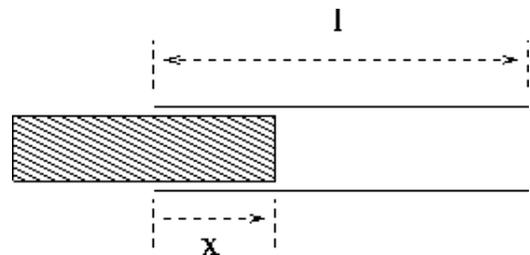
Exercício 40 : Duas cargas q_1 e q_2 são colocadas respectivamente em dois pontos A e B que estão separados por uma distância d .

- a) Determine o potencial eléctrico nos pontos **A** e **B**, assumindo o potencial nulo no infinito.
- b) Determine a energia potencial electrostática do sistema de duas cargas.
- c) Utilizando o resultado da alínea b) determine a força eléctrica que a carga q_1 exerce sobre a carga q_2 .
- d) Diga, justificando a sua resposta, no caso de termos $q_1 = -q_2$, como poderíamos adicionar uma terceira carga q_3 ao sistema sem realizar trabalho.

Exercício 41 : Uma placa condutora de lado ℓ é carregada com uma carga Q .

- a) Determine o campo eléctrico num ponto a uma distância d muito próximo da placa.
Nota: Pode considerar a aproximação do plano infinito.
- b) Uma segunda placa condutora, também de lado ℓ e carregada com uma carga $-Q$, é colocada a uma distância d da primeira, formando um condensador de faces paralelas. Determine a força exercida sobre esta segunda placa.

Exercício 42 : Um condensador plano com armaduras quadradas de lado ℓ e distanciadas de d ($d \ll \ell$), é ligado a uma fonte de tensão V . O espaço entre as armaduras do condensador encontra-se parcialmente preenchido com uma material dieléctrico de permissividade ϵ . O material dieléctrico pode mover-se segundo a direcção do eixo dos xx .



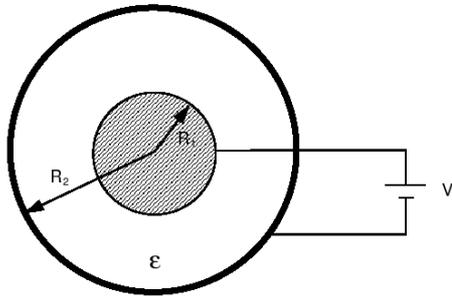
- a) Determine a capacidade do condensador em função da posição do dieléctrico.
- b) Determine a energia armazenada pelo condensador em função da posição do dieléctrico. Esboce a curva da energia em função da posição do dieléctrico.
- c) Determine a força exercida sobre o dieléctrico.

Exercício 43 : Um cabo coaxial é constituído por um condutor cilíndrico interior de raio R_1 , e uma coroa cilíndrica de raio R_2 e espessura desprezável (película metálica flexível). O espaço que separa os condutores encontra-se preenchido por um material isolante de permissividade ϵ . O cabo encontra-se ligado a uma fonte de tensão V e possui um comprimento ℓ , muito maior que R_2 .

- a) Determine a energia electrostática armazenada no cabo por unidade de comprimento.
- b) Determine a pressão exercida pelo campo eléctrico sobre o condutor exterior.

Exercício 44 : Um condensador esférico é composto por um condutor de raio R_1 envolvido por uma película condutora de raio R_2 . O espaço entre

os condutores está preenchido por um material dielétrico de permitividade eléctrica ϵ . O condensador está ligado a uma fonte de tensão que carrega o condutor interior com uma carga Q .



- Calcule a energia armazenada no condensador.
- Calcule a pressão exercida sobre a película exterior devido ao campo eléctrico.

1.3 Exercícios Resolvidos

Resolução do exercício 6

a) O momento dipolar total:

$$\vec{p}_{tot} = \sum_i q_i \vec{r}_i = \vec{p}_+ + \vec{p}_- = 0$$

b) Da figura 6.1 pode observar-se que as componentes do campo segundo yy se anulam, sendo o campo só segundo xx :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{r^3} - \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{(x^2 + d^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right] \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{d}{x}\right)^2\right)^{3/2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

c) Fazendo agora uma expansão em série de Taylor para $d/x \ll 1$, vem:

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{d}{x}\right)^2\right]^{3/2}} \simeq 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{d}{x}\right)^2$$

e portanto:

$$E_x = -\frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd^2}{x^4}$$

Expansão em série de Taylor

Uma função $f(x)$ num ponto qualquer x_0 pode ser aproximada pelos primeiros termos de uma série:

$$f(x) \simeq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \dots$$

onde $f'(x_0)$ corresponde à derivada da função no ponto x_0 . Vemos portanto que a aproximação mais simples corresponde a uma recta de declive igual à derivada.

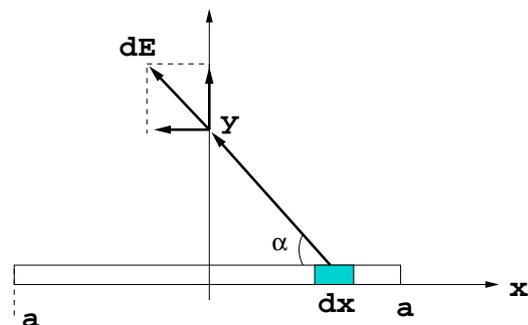


Figura 6.1

Resolução do exercício 9

a)

$$\phi(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma\rho}{r} d\rho d\theta + \kappa$$

Escolhendo o potencial nulo no infinito, tem-se $\kappa = 0$ vindo portanto:

$$\phi(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} d\rho = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{\rho^2 + z^2} \right]_0^R = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)$$

$$b) \quad E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\phi(z) \quad \Rightarrow \quad E_z = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) & z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(-1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) & z < 0 \end{cases}$$

c)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \phi(z) = \infty$$

ter-se-ia que escolher um outro ponto de referência.

Resolução do exercício 10

- a) Da figura 10.1 percebe-se que cada elemento de fio cria um campo segundo xx que se anula com o seu elemento simétrico em relação à origem. Temos então que calcular apenas a componente segundo yy que é a projecção do campo total sobre a vertical:

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= dE_x + dE_y = dE \sin\alpha \\ dE &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{r^2} \\ \Rightarrow E_y &= \int_{-a}^{+a} dE \sin\alpha = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \sin\alpha}{r^2} dx = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^{+a} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^2} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-a}^{+a} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \end{aligned}$$

b)

$$E_y = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \frac{a}{\sqrt{a^2 + y^2}} \vec{u}_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y} \vec{u}_y$$

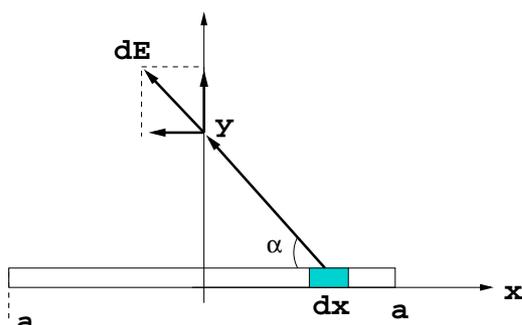


Figura 10.1

Resolução do exercício 11

- a) O potencial eléctrico existente no ponto P devido a um elemento infinitesimal de carga $dq = \lambda dl$ que está à distância $x + \ell$ do ponto A é (ver figura 11.1):

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{x + \ell}$$

Donde, o potencial eléctrico existente em P devido a toda a barra carregada obtém-se integrando em todo o comprimento da barra:

$$\phi = \int_0^a \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{x + \ell} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{x + a}{x}$$

- b) O campo eléctrico pode ser calculado a partir do potencial eléctrico uma vez que $\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \phi$.
Uma vez que o potencial só depende da coordenada x , só existirá componente segundo x do campo eléctrico ($\vec{E} \equiv E_x \vec{u}_x$).

$$\vec{E} = -\frac{d\phi}{dx} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{x(x + a)} \vec{u}_x$$

- c) Quando $x \gg a$, o campo eléctrico é dado por:

$$\vec{E} = -\frac{d\phi}{dx} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \vec{u}_x$$

Ou seja, o campo eléctrico criado pela barra carregada a grandes distâncias é essencialmente o campo de uma carga pontual que substituisse a barra e com toda a sua carga $Q = \lambda a$.

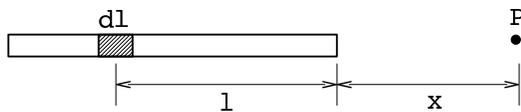


Figura 11.1

Resolução do exercício 12

- a) O campo eléctrico produzido pela barra carregada nos locais onde estão as cargas Q_1 e Q_2 é:

$$\vec{E}_1 = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d(d + a)} \vec{u}_x$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d + \ell)(d + \ell + a)} \vec{u}_x$$

Daí que as forças sobre as cargas devido à barra carregada sejam dadas por:

$$\vec{F}_1 = Q_1 \vec{E}_1$$

$$\vec{F}_2 = Q_2 \vec{E}_2$$

Não esqueçamos que existem ainda as forças de uma carga sobre a outra, mas sendo um par acção-reacção anulam-se. Assim, para que a barra permaneça imóvel a soma das forças aplicadas sobre as cargas tem de ser nula:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

O que permite então obter a carga Q_1 :

$$Q_1 = -Q_2 \left(\frac{d}{d+\ell} \right) \left(\frac{d+a}{d+a+\ell} \right) \simeq -0,5 \times 10^{-6} \text{ C}$$

b) O centro de cargas seria o ponto onde concentraríamos toda a carga e onde aplicaríamos a força total. Não existe no entanto nenhum ponto na barra (ou fora dela) onde colocássemos a carga total,

$$Q_{tot} = Q_1 + Q_2 = Q_2 \left[1 - \left(\frac{d}{d+\ell} \right) \left(\frac{d+a}{d+a+\ell} \right) \right]$$

e a força total $\vec{F}_{tot} = Q_{tot} \vec{E}$ fosse nula.

Resolução do exercício 15

a) Num plano infinito, as linhas de campo são linhas perpendiculares ao plano; pense no campo eléctrico produzido no eixo de um disco (ver exercício 9), e note que num plano infinito todos os pontos são o *centro* desse plano. Escolhamos um cilindro que atravesse o plano, como superfície de Gauss. Esta é obviamente uma boa escolha porque:

- As linhas de campo eléctrico são paralelas ao invólucro do cilindro, pelo que o fluxo do campo eléctrico que o atravessa é nulo.
- As linhas de campo são perpendiculares às tampas do cilindro e além do mais o campo é constante.

Sendo as áreas das tampas do cilindro A , vem:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ E2A &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} E\vec{u}_z & z > 0 \\ -E\vec{u}_z & z < 0 \end{cases}$$

b) Utilizando o princípio da sobreposição, $\vec{E} = \vec{E}_{plano\ infinito} - \vec{E}_{disco}$, e relembrando o resultado do problema 9, tem-se:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \vec{u}_z$$

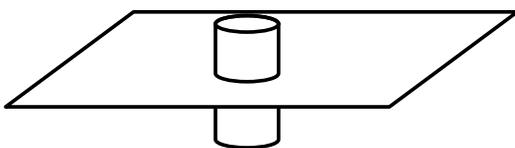


Figura 15.1

Resolução do exercício 17

- a) Para um problema com simetria esférica, as linhas de campo são linhas perpendiculares à superfície esférica, ou seja, radiais em coordenadas esféricas. Pode-se então aplicar a lei de Gauss utilizando uma superfície esférica que passe pelo ponto em que se pretende calcular o campo eléctrico. Para essa superfície a normal exterior, também radial em coordenadas esféricas, será sempre paralela ao campo. Além disso, nos pontos da superfície esférica o módulo do campo é constante, uma vez que a distância a que se encontram da carga é a mesma para todos os pontos (o raio da esfera).

$$r < R$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

$$r > R$$

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ E 4\pi r^2 &= \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} \\ \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \vec{u}_r \end{aligned}$$

- b) O trabalho realizado por um agente exterior para trazer a carga do infinito até ao centro da esfera é igual ao trabalho realizado pelo campo sobre a carga desde o centro da esfera até ao infinito.

$$\begin{aligned} W &= qV = q \int_{r=0}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q \left(\int_0^R \vec{0} \cdot d\vec{\ell} + \int_R^{\infty} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{R}{r}\right)^2 dr \right) \\ &= q \frac{\sigma}{\epsilon_0} R^2 \left(\frac{1}{R} - 0 \right) = q \frac{\sigma}{\epsilon_0} R \end{aligned}$$

Resolução do exercício 19

- a) Tratando-se de um condutor em regime electrostático, a sua carga está distribuída na sua superfície, pois só deste modo o campo eléctrico se anula no seu interior. A densidade de carga será:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi RL}$$

ou, se preferirmos utilizar uma densidade de carga linear já que o condutor tem a forma de um fio,

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

- b) Dentro do condutor o campo é nulo, como já se referiu. Fora do condutor, tratando-se de uma distribuição de carga com geometria cilíndrica, as linhas de campo são radiais em coordenadas cilíndricas. Deste modo utiliza-se uma superfície também cilíndrica para a aplicação da lei de Gauss. Nessa superfície, a normal tal como o próprio campo, é radial, excepto nos topos da superfície cilíndrica onde a normal é perpendicular ao campo e o integral se anula ($\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$). Além disso, como o problema tem simetria cilíndrica, o módulo do campo é constante para a superfície em que o integral não se anula.

$$r < R$$

$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$r > R$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E 2\pi r L = L \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \vec{u}_r$$

- c.1) Como o condutor exterior não *destruiu* a simetria cilíndrica do problema e não está carregado, o campo permanece igual apenas se anulando no seu interior.
- c.2) Neste caso o condutor exterior *destruiu* a simetria cilíndrica do problema, apesar de não estar carregado. O campo altera-se de forma a garantir que as linhas de campo são perpendiculares à superfície do condutor exterior e anula-se no seu interior. Longe (com rigor matemático, no infinito) dos condutores o campo recupera a sua forma radial uma vez que o conjunto volta a *parecer* um fio com densidade de carga λ .

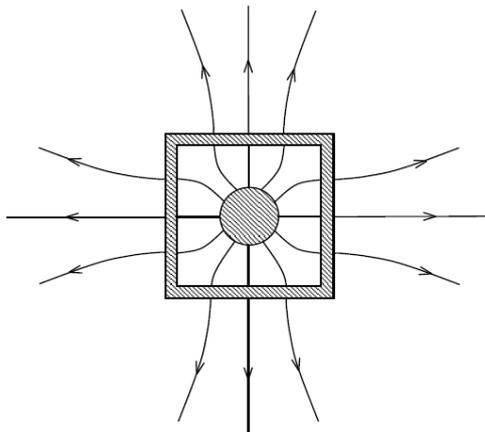


Figura 19.1

Resolução do exercício 26

- a) O potencial eléctrico criado nos pontos A e B pelas cargas $+q$ e q_1 é dado por (princípio da sobreposição):

$$\phi_A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R-b} + \frac{q}{a-R} \right)$$

$$\phi_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{R+b} + \frac{q}{a+R} \right)$$

A localização da carga q_1 deve ser tal que tenhamos o condutor a um potencial nulo; ou seja, $\phi_A = \phi_B = 0$. Daí que se obtenha:

$$q_1 = -\frac{R}{a} q$$

$$b = \frac{R^2}{a}$$

Nota: O leitor pode verificar que o arranjo das cargas q_1 e q garante a condição do potencial nulo em todos os pontos da superfície esférica e não apenas nos pontos A e B.

- b) O potencial no ponto P devido às cargas q_1 e $+q$ cuja distância ao ponto P é r_1 e r_2 , respectivamente, obtém-se usando o princípio da sobreposição: $\phi_P = \phi_1 + \phi_2$.

As distâncias r_1 e r_2 obtêm-se das igualdades vectoriais dadas:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{r} - \vec{b} \Rightarrow r_1 = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r} - \vec{a} \Rightarrow r_2 = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}\end{aligned}$$

O potencial vem então:

$$\phi_P = \phi_1 + \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta}} - \frac{R}{a\sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}} \right)$$

- c.1) O campo eléctrico obtém-se a partir do potencial:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \phi$$

Ora tendo em conta que toda a esfera condutora está ao mesmo potencial, só existe componente normal do campo \vec{E} à superfície. Donde, o campo seria dado por:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{u}_r$$

e fazendo $r = R$.

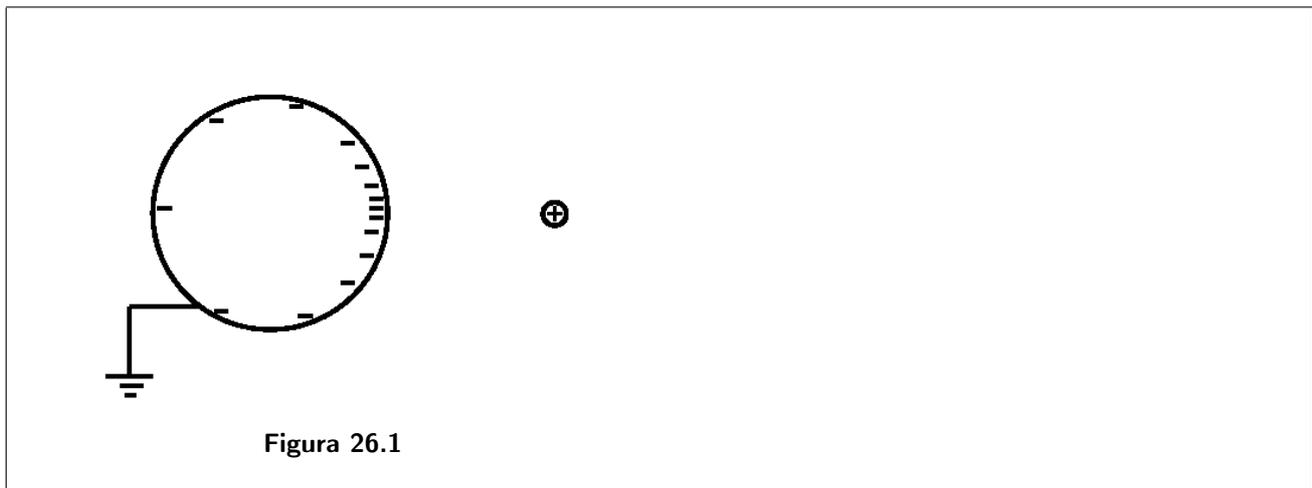
- c.2) A densidade de carga à superfície do condutor obter-se-ia a partir do campo eléctrico calculado anteriormente.

$$\sigma = \epsilon_0 \vec{E}(r=R)$$

A ligação da esfera à Terra implica um rearranjo das cargas à sua superfície de forma a assegurar a condição de equipotencial. Teríamos assim nas regiões da superfície da esfera mais próxima da carga $+q$, o aparecimento de um excesso de carga negativa e a carga positiva que existia em excesso no lado mais afastado, escoia-se para a Terra (ou melhor, carga negativa proveniente da Terra desloca-se para a esfera!).

- d) A força entre a esfera condutora e a carga $+q$ é facilmente calculada tendo em que no método das imagens a esfera condutora é substituída por uma carga q_1 .

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{d^2} \vec{e}_x = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{a(a-b)^2} \vec{e}_x$$



a) $r < R$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho dV$$

$$D4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$D = \frac{\rho r}{3}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon} \vec{u}_r$$

 $r > R$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \rho dV$$

$$D4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = \frac{\rho R^3}{3r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

b) (vamos considerar como ponto de referência o infinito já que neste caso o potencial se vai anular naquele ponto)

 $r > R$

$$\phi = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$$

 $r = R$

$$\phi = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

 $r < R$

$$\phi = \int_r^R \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_r^R \frac{\rho r}{3\epsilon} dr + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

$$= \frac{\rho r}{3\epsilon} \left(\frac{R^2 - r^2}{2} \right) + \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$$

c) em volume:

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \chi_e \vec{E}) = -\epsilon_0 \chi_e \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho r}{3\epsilon} \right) \right) = - \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \rho$$

em superfície:

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \cdot \vec{n} = \epsilon_0 \chi_e \frac{\rho r}{3\epsilon} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right) \frac{\rho r}{3}$$

Nota: $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{pol} + 4\pi R^2 \sigma_{pol} = 0$

- a) Em equilíbrio electroestático, a armadura maciça interior veria a carga +Q distribuir-se à sua superfície e a armadura exterior ficaria com uma carga -Q na superfície interna e +Q (porque originariamente era neutro) na superfície externa.

Da aplicação da lei de Gauss (generalizada),

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{int}$$

às várias regiões e tendo em conta a relação entre o vector Deslocamento eléctrico (\vec{D}) e o Campo eléctrico (\vec{E})

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

obteríamos o campo eléctrico nas várias regiões:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= 0 & (r < R_1) \\ \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_1 r^2} & (R_1 < r < R_d) \\ \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_2 r^2} & (R_d < r < R_2) \\ \vec{E} &= 0 & (R_2 < r < R_3) \\ \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r > R_3) \end{aligned}$$

- b) O potencial em cada uma das regiões é dado por:

$$\phi_r = \int_r^{REF} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

onde \vec{E} é o vector campo eléctrico em cada região calculado na alínea anterior.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} & (r > R_3) \\ \phi &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} & (R_2 < r < R_3) \\ \phi &= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \right] & (R_d < r < R_2) \\ \phi &= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_d} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_d} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \right] & (R_1 < r < R_d) \\ \phi &= \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_d} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_d} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \right] & (r < R_1) \end{aligned}$$

- c) A diferença de Potencial entre os dois condutores:

$$V = \phi_{r=R_1} - \phi_{r=R_2} = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_d} \right) + \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_d} - \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

A Capacidade do dispositivo é facilmente obtida tendo em conta que a carga armazenada se relaciona com a capacidade e diferença de potencial através de: $Q = CV$

$$C = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_d} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_d} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

- d) O Vector Polarização é obtido através de: $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$ Basta agora substituir o campo eléctrico obtida nas várias regiões.

- e) A densidade de carga de polarização obtém-se a partir de:

$$\begin{aligned} \rho_{pol} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (\text{densidade volúmica}) \\ \sigma_{pol} &= \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext} \quad (\text{densidade superficial}) \quad \text{onde:} \end{aligned}$$

$$- \vec{P} \text{ é o vector polarização dado por: } \vec{P} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E}$$

- \vec{n} representa o versor normal à superfície definida pelo dieléctrico e que aponta para o exterior desta

Ora num dieléctrico homogéneo só existirão cargas de polarização nas superfícies de separação dos diferentes meios dieléctricos. Os vectores normais (\vec{n}) às superfícies de separação são:
superfície $r = R_1$: $\vec{n} = -\vec{u}_r$

superfície $r = R_d$: $\vec{n} = \pm \vec{u}_r$
 superfície $r = R_2$: $\vec{n} = +\vec{u}_r$

Obtém-se assim:

$$\begin{aligned}\sigma_{pol}(r = R_1) &= -\vec{u}_r \cdot \vec{P}_{(r=R_1)} = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{4\pi\epsilon_1} \frac{Q}{R_1^2} \\ \sigma_{pol}(r = R_d) &= \vec{u}_r \cdot \vec{P}_{(r=R_d)} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{4\pi\epsilon_1} \frac{Q}{R_d^2} \\ \sigma_{pol}(r = R_d) &= -\vec{u}_r \cdot \vec{P}_{(r=R_d)} = -\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{4\pi\epsilon_2} \frac{Q}{R_d^2} \\ \sigma_{pol}(r = R_2) &= \vec{u}_r \cdot \vec{P}_{(r=R_2)} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{4\pi\epsilon_2} \frac{Q}{R_2^2}\end{aligned}$$

Resolução do exercício 39

- a) Começamos por aplicar a lei de Gauss generalizada ao condensador. Para isso utilizamos uma superfície cilíndrica com uma *tampa* dentro da armadura positiva e com a outra *tampa* dentro do condensador. As linhas do campo eléctrico são perpendiculares às armaduras do condensador pelo que só existe fluxo através da *tampa* do cilindro que está no interior do condensador. Designemos por S a área dessa tampa e por σ a densidade de carga na superfície da armadura.

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= Q_{int} \\ DS &= \sigma S \\ D &= \sigma\end{aligned}$$

no osso

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_{de + para -}$$

no tecido

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \vec{u}_{de + para -}$$

Como não conhecemos a carga temos agora que a relacionar com a tensão aplicada:

$$\begin{aligned}\int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= 2a \frac{\sigma}{4\epsilon_0} + b \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = (a + b) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\ \sigma &= \frac{2\epsilon_0 V}{a + b}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$E = \frac{V}{a + b} = \frac{45}{7,5 \times 10^{-2}} = 600 \text{ V/m}$$

b)

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} = \frac{\sigma A}{V} = \frac{\frac{2\varepsilon_0 V}{a+b} A}{V} = \frac{2\varepsilon_0}{a+b} A \\ &= \frac{2 \times 9 \times 10^{-12} \times 45 \times 10^{-4}}{75 \times 10^{-3}} = 10^{-12} \text{ F} = 1 \text{ pF} \end{aligned}$$

c)

$$u_E = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$$

no osso

$$u_E = \frac{1}{2} 2\varepsilon \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{4\varepsilon_0}$$

no tecido

$$u_E = \frac{1}{2} 4\varepsilon \left(\frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{8\varepsilon_0}$$

no osso a densidade de energia é o dobro da dos tecidos.

1.4 Soluções

1. a) $\vec{P} = m\vec{g}$
 $\vec{F}_e = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{\ell^2 \sin^2\theta} \vec{u}_x$
 $\vec{T} + \vec{F}_e + \vec{P} = 0$
- b) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0} \frac{1}{m g} \left(\frac{Q}{\ell}\right)^2$
 no caso de pequenos ângulos, $x = \left(\frac{Q^2 \ell}{2\pi\epsilon_0 m g}\right)^{1/3}$
2. a) $\vec{F} = +42,7(\vec{u}_x + 3\vec{u}_y)$ [N]
- b) Ponto que dista 14 cm da origem segundo a direcção $\vec{r} = \vec{u}_x + 3\vec{u}_y$
- c) 13,8 Kg
3. $W = -qE_0x_B$
4. a) $\vec{E} = E\vec{u}_y$
- b) $\phi(x) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{2} / \left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2\right)$
- d) $x = 0$, equilíbrio estável
5. a) $\vec{E}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}$
 $\vec{r}_+ = x\vec{u}_x - \frac{d}{2}\vec{u}_y$
 $\vec{r}_- = x\vec{u}_x + \frac{d}{2}\vec{u}_y$
- b) $\vec{E}(\vec{x}, 0) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{\left(x^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \vec{u}_y$
 $\vec{E}(x \gg d, 0) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{x^3} \vec{u}_y$
 $\vec{E}(0, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2}\right) \vec{u}_y$
 $\vec{E}(0, y \gg d) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{d}{y^3} \vec{u}_y$
- c) $\vec{p} = q\vec{d}$
 $\vec{E}(x \gg d, 0) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3}$
 $\vec{E}(0, y \gg d) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{y^3}$
7. a) $p = 5 \times 10^{-30}$ C.m
- b) $\vec{p} = 6 \times 10^{-30} \vec{u}_y$ C.m; vectorialmente, corresponde à soma dos momentos dipolares das duas ligações OH.
- c) $\vec{E} = \frac{10^{-19}}{r^3}$ V/m; $\vec{E}(r = 10 \text{ A}) = 10^8$ V/m
8. a) $\vec{E} = E\vec{u}_z$
 $E(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} R z (z^2 + R^2)^{-3/2}$
- b) $\phi(z) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} R (z^2 + R^2)^{-1/2}$
- c) $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$
13. $Q = 3,6 \mu\text{C}$
14. $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r$
18. a) $\sigma_A = \frac{Q}{4\pi R_A^2}$
 $\sigma_B = \frac{Q}{4\pi R_B^2}$
- b) $\vec{E}_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_A^2} \vec{u}_{r_A}$
 $\vec{E}_B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_B^2} \vec{u}_{r_B}$
- c) $Q_A = \frac{R_A Q}{R_A + R_B}$
 $Q_B = \frac{R_B Q}{R_A + R_B}$
20. a) $\Delta\phi = 0$
- b) Na superfície exterior do condutor ôco.
- c) Não.
21. $R = 33$ cm.
22. a) $r < R_1 : E = 0$
 $R_1 < r < R_2 : \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$
 $R_2 < r < R_3 : E = 0$
 $r > R_3 : E = 0$
- b) $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$
- c) $V = 0$
23. a) $\vec{E}_A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_A^2} \vec{u}_r$
- b) $\phi(R_2) = 900$ KV
- c) $\phi_B - \phi_C = 0$; para $r < R_2$ tem-se $E = 0$ (e portanto $\phi = \text{constante}$) sendo o comportamento do sistema é idêntico ao de um condutor esférico de raio R_2 .
24. a) $q' = -q$
- b) $\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(d+x)^2 + y^2}}\right)$
- c) $\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{d-x}{((d-x)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{d+x}{((d+x)^2 + y^2)^{3/2}}\right) \vec{u}_x - \left(\frac{y}{((d-x)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{((d+x)^2 + y^2)^{3/2}}\right) \vec{u}_y\right]$
 Para $x = 0$, $\vec{E}(y) = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d^2 + y^2)^{3/2}} \vec{u}_x$
- d) $\sigma(y) = \epsilon_0 E(y)$
25. a) $\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(x^2 + y^2 + (h_2 - z)^2\right)^{-1/2} - \left(x^2 + y^2 + (h_1 - z)^2\right)^{-1/2} + \left(x^2 + y^2 + (h_1 + z)^2\right)^{-1/2} - \left(x^2 + y^2 + (h_2 + z)^2\right)^{-1/2}\right]$
- b) $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[h_1 (x^2 + y^2 + h_1^2)^{-3/2} - h_2 (x^2 + y^2 + h_2^2)^{-3/2}\right] \vec{u}_z$
- c) $\sigma = \epsilon_0 E$
28. a) $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{u}_r$
- b) $r < R_1 : E = 0$
 $R_1 < r < R_2 : \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$
 $r > R_2 : \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$
- d) $Q_{pol}(R_1) = -\frac{4}{5} Q$
 $Q_{pol}(R_2) = +\frac{4}{5} Q$
30. a) $r < R : E = 0$
 $r > R : \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r(r+a)} \vec{u}_r$
- b) $r < R : V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \ln \left(\frac{R+a}{R}\right)$
 $r > R : V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \ln \left(\frac{r+a}{r}\right)$
- c) $\vec{P} = \frac{Q}{4\pi} \frac{a}{r^2(r+a)} \vec{u}_r$
- d) $r > R : \rho_{pol} = \frac{Q}{4\pi} \frac{a}{r^2(r+a)^2}$

- e) $r = R: \sigma_{pol} = -\frac{Q}{4\pi} \frac{a}{R^2(R+a)}$
 f) $Q_{pol} = 0$
31. a) $\vec{E} = \frac{Va}{(1+ay)\ln(1+ad)} \vec{u}_y$
 b) $C = \frac{\ell^2 a \epsilon_0}{\ln(1+ad)}$
 c) $\rho_{pol} = -\frac{a^2 \epsilon_0 V}{(1+ay)^2 \ln(1+ad)}$
 $\sigma_{pol}(0) = 0$
 $\sigma_{pol}(d) = \frac{a^2 \epsilon_0 V d}{(1+ad)\ln(1+ad)}$
32. a) $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$
 b) $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$
 c.1) $Q_{ext} = -Q$
 $E = 0$
 c.1) Não se altera.
33. a) $C = 710$ nF
 b) $C = 89$ nF
 c) $V = 10^{-2}$ V
 d) $\sigma = 7$ nC.cm⁻²
34. a) $\vec{D} = \frac{Q}{A} \vec{u}_x$
 $\vec{E}_1 = \frac{Q}{A\epsilon_1} \vec{u}_x$
 $\vec{E}_2 = \frac{Q}{A\epsilon_2} \vec{u}_x$
 b) $C = \frac{3A}{d} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2}$
 c) $\sigma_{pol}(0) = -\frac{Q}{A} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1}$
 $\sigma_{pol}(d) = +\frac{Q}{A} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2}$
 $\sigma_{pol}(d/3) = +\frac{Q}{A} \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} \right)$
35. a) $E_1 = E_2 = \frac{V}{d}$
 b) $\sigma_1 = \frac{\epsilon_1 V}{d}$
 $\sigma_2 = \frac{\epsilon_2 V}{d}$
 c) $(\sigma_{1pol})^- = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{V}{d}$
 $(\sigma_{2pol})^- = -(\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{V}{d}$
 d) $C = \frac{\ell^2}{d} \left(\frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2}{2} \right)$
 $C = C_1 + C_2$
37. a) $C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$
 b) $\lambda_{pol}(R_1) = -\frac{2\pi V}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} (\epsilon - \epsilon_0)$
 $\lambda_{pol}(R_2) = -\lambda_{pol}(R_1)$
38. a) $\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$
 $U_E = 2,2 \mu\text{J}$
 b) A uma perda.
40. a) $\phi_A = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}$
 $\phi_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}$
 b) $U_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}$
 c) $F_r = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \vec{u}_r$
 d) Trazendo a carga para um ponto da superfície equipotencial $\phi = 0$, constituída pelos pontos equidistantes das duas cargas.
41. a) $E = \frac{Q}{2\ell^2 \epsilon_0}$
 b) $F = \frac{Q^2}{2\ell^2 \epsilon_0}$ (atractiva)
42. a) $C = \frac{\epsilon_0 \ell}{d} (\epsilon_r x + (\ell - x)); C = C_1 + C_2$
 $C = \frac{\epsilon_0 \ell}{d} (\ell + x(\epsilon_r - 1))$
 b) $U_E(x) = \frac{1}{2} C(x) V^2$
 c) $F_x = \frac{1}{2} V^2 \frac{d}{dx} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)$
43. a) $U_E = \frac{\pi \epsilon V^2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$
 b) $P = -\frac{\epsilon V^2}{2R_2^2 \ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ (para dentro)
44. a) $U_E = 2\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V^2$
 b) $P = -\frac{\epsilon}{2} V^2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \frac{1}{(R_2 - R_1)^2}$ (para dentro)

Capítulo 2

Corrente estacionária

2.1 Exercícios Propostos

Exercício 45 : Um feixe de partículas alpha (constituídas por dois prótons e dois neutrões), com carga eléctrica $q = 2e$, massa $m = 4m_p$, energia cinética 20 MeV/partícula¹ e de secção $S = 1 \text{ mm}^2$, transporta uma corrente eléctrica de $0,25 \mu\text{A}$.

- Determine a densidade de corrente eléctrica, \vec{J} .
- Determine a densidade de partículas existente no feixe, N .
- Determine o número de partículas alpha (N_α) que atravessam uma superfície plana perpendicular ao feixe, em cada segundo.
- Qual a diferença de potencial que foi necessário aplicar às partículas para as levar do estado de repouso ao estado cinético do feixe?

Exercício 46 : Num fio de cobre com 2 mm de diâmetro passa uma corrente eléctrica $I = 16 \text{ A}$. Qual a velocidade de arrastamento dos electrões?

(Nota: considere que existe 1 electrão livre por átomo, sendo a densidade do cobre $\rho = 8,95 \text{ g.cm}^{-3}$ e o número de massa $A = 63.5 \text{ g.mole}^{-1}$)

Exercício 47 : Um cabo de cobre com um comprimento $\ell = 1 \text{ km}$ e uma secção de $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ tem aplicado um campo eléctrico de módulo $E = 0,05 \text{ V.m}^{-1}$. A condutividade eléctrica do cobre é $\sigma = 5,8 \times 10^7 \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$. Determine:

- a densidade de corrente no cabo.
- a diferença de potencial entre as extremidades do cabo.
- a corrente transportada pelo cabo.
- a potência dissipada pelo cabo.

Exercício 48 : Um disco de espessura $\ell = 0,5 \text{ cm}$ e raio $R = 50 \text{ cm}$ está carregado uniformemente com uma densidade de carga $\rho = 10^{-6} \text{ C.m}^{-3}$. O disco roda com uma frequência angular $\omega = 50 \text{ r.p.m}$. Determine:

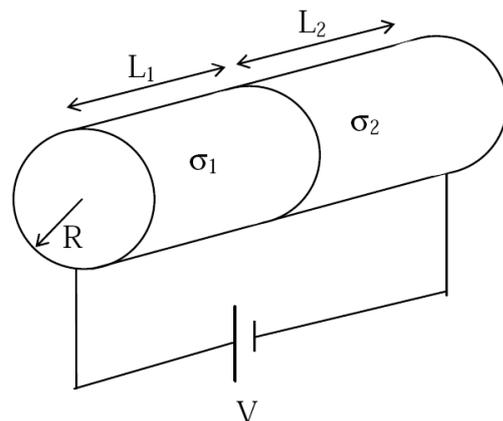
- a densidade de corrente eléctrica existente no disco.
- a corrente total que atravessa uma secção do disco.

¹1 eV = $1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$

Exercício 49 : Um pára-raios termina num condutor esférico meio enterrado no solo. Uma pessoa dirige-se na sua direcção quando este recebe uma descarga de 2000 A. Sabendo que quando se dá a descarga a pessoa está a dar um (grande!) passo, estando o seu pé da frente a 50 metros do pára-raios e o seu pé de trás a 51 metros do pára-raios, calcule a diferença de potencial entre os seus pés.

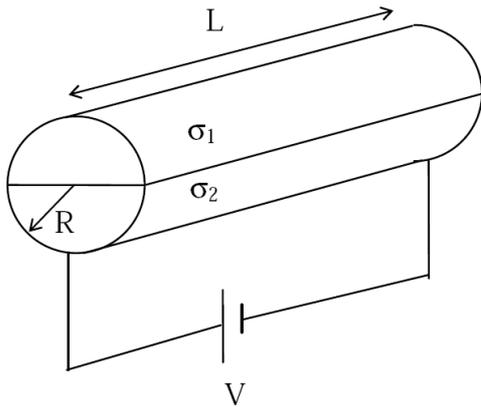
(Nota: $\sigma_{\text{solo}} = 10^{-2} \Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$)

Exercício 50 : Considere uma resistência constituída por dois materiais de condutividade σ_1 e σ_2 , comprimento ℓ_1 e ℓ_2 e com a geometria mostrada na figura. A resistência encontra-se ligada a uma bateria de tensão V .



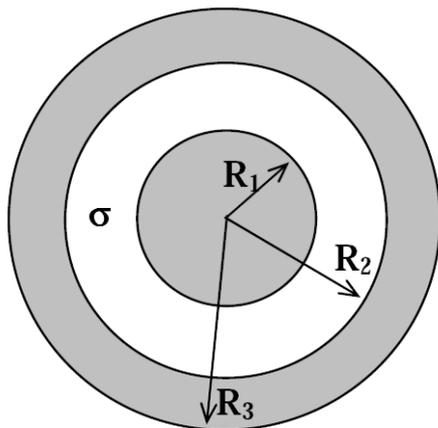
- Relacione a densidade de corrente existente nos dois materiais.
- Determine a razão entre o campo eléctrico nos dois materiais, E_1/E_2 .
- Determine a resistência do sistema e compare com a forma de calcular associações de resistências em série.

Exercício 51 : Considere uma resistência constituída por dois materiais de condutividade σ_1 e σ_2 , comprimento ℓ e com a geometria mostrada na figura. A resistência encontra-se ligada a uma bateria de tensão V .



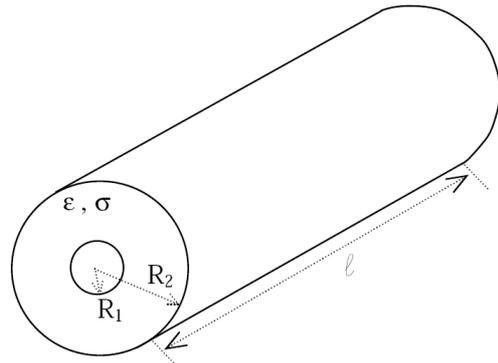
- a) Relacione a densidade de corrente existente nos dois materiais.
- b) Determine a razão entre o campo eléctrico nos dois materiais, E_1/E_2 .
- c) Determine a resistência do sistema e compare com a forma de calcular associações de resistências em paralelo.

Exercício 52 : O espaço existente entre um condutor esférico de raio R_1 e uma coroa esférica condutora de raios R_2 e R_3 , está preenchido com um material de condutividade eléctrica σ . Os condutores estão ligados a uma fonte que assegura a passagem de uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I , do condutor interior para o exterior. Determine:



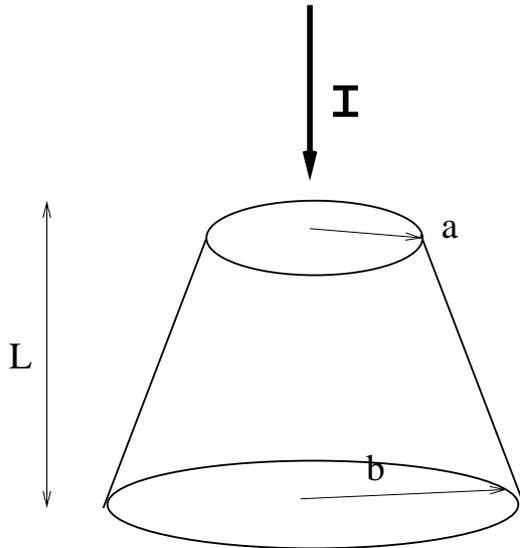
- a) a densidade de corrente eléctrica, \vec{J} , em função da distância ao centro das esferas, r (com $R_1 < r < R_2$).
- b) a resistência eléctrica do sistema.
- c) a densidade de potência dissipada por efeito de Joule em função da distância ao centro, r .

Exercício 53 : Um condensador cilíndrico de comprimento ℓ e raios R_1 e R_2 ($\ell \gg R_2$), possui entre os condutores um material de permitividade eléctrica ϵ e de condutividade eléctrica σ . O condensador foi carregado electricamente por uma fonte de tensão V , com o terminal positivo ligado ao condutor interior do condensador, encontrando-se agora desligado.



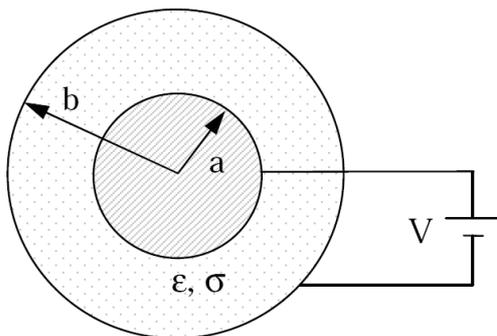
- a) Determine a capacidade do condensador.
- b) Determine a corrente de fuga (I) do condensador através do material que separa os condutores, imediatamente após se ter desligado a fonte de tensão (quando o condensador possui a carga máxima).
- c) Verifique que a constante de tempo associada à descarga do condensador através da corrente de fuga, $\tau_{fuga} = R_{fuga}C$, é independente das dimensões do condensador.
Nota: este resultado é ainda mais geral, sendo τ_{fuga} independente da geometria do condensador.

Exercício 54 : Uma resistência eléctrica, constituída por um material de condutividade eléctrica σ , possui uma forma cónica de altura L em que o topo superior possui um raio a e o topo inferior um raio b . A inclinação do cone é pequena ($b \sim a$), pelo que se pode considerar a densidade de corrente uniforme ao longo do cone. Sabendo que a resistência é percorrida por uma corrente I , determine:



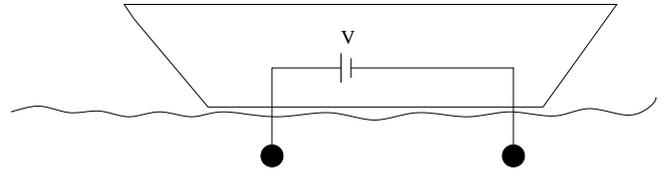
- a) o campo eléctrico ao longo do condutor.
- b) a diferença de potencial na resistência.
- c) a resistência do dispositivo; particularize o resultado para um dispositivo cilíndrico ($b = a$).

Exercício 55 : Considere o sistema da figura em que um condutor esférico de raio a está separado por um líquido de condutividade eléctrica σ e permitividade eléctrica ϵ , de um outro condutor cuja superfície interna de forma esférica, possui raio b . Os condutores estão ligados a uma bateria que mantém uma diferença de potencial V . Determine:



- a) o campo eléctrico, \vec{E} , no espaço entre os condutores (em função de V).
- b) a corrente eléctrica, I , que percorre o circuito.
- c) a resistência do sistema; esboce o gráfico da resistência do sistema em função do raio b .
- d) a resistência do sistema quando $b \gg a$; qual a relação entre a e b para a qual a resistência do sistema é 90% da máxima possível (quando $b \rightarrow \infty$)?

Exercício 56 : A medição da condutividade da água do mar pode fazer-se recorrendo a duas esferas metálicas de raio a , imersas na água e suficientemente afastadas, que se encontram ligas a uma fonte de tensão V .



- a) Determine a resistência eléctrica do circuito.
Nota: despreze a resistência dos condutores e utilize o resultado do problema anterior.
- b) Admitindo que a leitura da corrente é I_0 , determine a condutividade eléctrica do água do mar.

Exercício 57 : Verifique, utilizando a lei dos nós ($\oint \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0$), que os materiais condutores conduzem as linhas do campo eléctrico.

2.2 Problemas Resolvidos

Resolução do exercício 47

- a) $J = \sigma E = 29 \times 10^5 \text{ A.m}^{-2}$
 b) $V = \int_0^\ell \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{10^3} 0,05 \, dl = 50 \text{ V}$
 c) $I = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int_S J dS = JS = 290 \text{ A}$
 d) $P = VI = 14,5 \text{ kW}$

Resolução do exercício 52

- a) Para resolver este problema é preciso começar por entender como se estabelece a corrente eléctrica no sistema: tendo o sistema simetria esférica e sendo o material homogéneo (σ é constante), a corrente dirige-se radialmente do condutor interior para o condutor exterior.

Para calcular a densidade de corrente podemos usar uma secção do sistema que é uma superfície esférica. Deste modo J será constante e terá a direcção da normal à superfície. Para uma distância r do centro, tem-se:

$$I = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 4\pi r^2 J \implies \vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{u}_r$$

- b) Utilizando a definição de diferença de potencial e a lei de Ohm local, vem:

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{J}{\sigma} dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{\sigma 4\pi r^2} dr = \frac{I}{\sigma 4\pi} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{I}{\sigma 4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sigma 4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

- c) $p = JE = \frac{J^2}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{I}{4\pi r^2} \right)^2$

Resolução do exercício 53

- a) O Cálculo da capacidade do condensador, implica:

- determinação do campo eléctrico entre as armaduras, em função da carga que estas possuem (lei de Gauss)
- determinação da diferença de potencial entre as armaduras

As linhas de campo eléctrico são radiais e alinham-se segundo \vec{u}_r , uma vez que a armadura interior possui o potencial mais elevado.

A aplicação da lei de Gauss faz-se utilizando uma superfície fechada cilíndrica de raio r ($R_1 < r < R_2$) e comprimento L ; de notar que não existe fluxo de \vec{E} a travessar os topos do cilindro.

$$\oint \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{int}^{livre} \implies D 2\pi r L = \lambda L \implies D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

e portanto vem para o campo eléctrico,

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} \implies \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \vec{u}_r$$

Como a carga nos condutores é desconhecida, vamos ter que a relacionar com o que se conhece: a diferença de potencial imposta pela fonte,

$$V = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \implies \lambda = V \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

$$\implies Q = \lambda \ell = \ell V \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$$

A capacidade vem:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

b)

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} = \sigma \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \vec{u}_r = V \frac{\sigma}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{1}{r} \vec{u}_r$$

$$I = \oint \vec{J} \cdot \vec{n} dS = J \oint dS = V \frac{\sigma}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{2\pi r \ell}{r} = V \frac{2\pi\ell\sigma}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

c)

$$R_{fuga} = \frac{V}{I} = \frac{V}{\frac{2\pi\ell\sigma V}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\ell\sigma} \implies \tau_{fuga} = R_{fuga}C = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi\ell\sigma} \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

isto é, não depende da geometria do condensador.

2.3 Soluções

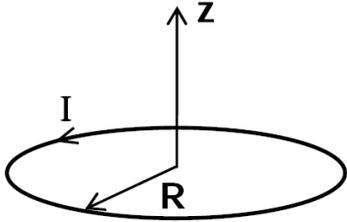
45. a) $J = 0,25 \text{ A.m}^{-2}$
 b) $N = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ partículas.m}^{-3}$
 c) $N = 7,8 \cdot 10^{11} \text{ partículas}$
 d) $V = 10 \text{ MV}$
46. $0,3 \text{ mm.s}^{-1}$
48. a) $J = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ r A.m}^{-2}$
 b) $I = 3,25 \cdot 10^{-9} \text{ A}$
49. $12,5 \text{ V}$
50. a) $J_1 = J_2$
 b) $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$
 c) $R = \frac{1}{\pi R^2} \left(\frac{L_1}{\sigma_1} + \frac{L_2}{\sigma_2} \right); R = R_1 + R_2$
51. a) $E_1 = E_2$
 b) $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$
 c) $R = \frac{2L}{\pi R^2(\sigma_1 + \sigma_2)}; \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
54. a) $E = \frac{I}{\sigma} \frac{1}{\pi \left(a + \frac{b-a}{L} y \right)^2}$
 b) $V = \frac{I}{\sigma} \frac{L}{\pi ab}$
 c) $R_{cone} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{\pi ab}; R_{cil} = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{\pi R^2};$
55. a) $\vec{E} = V \frac{ab}{b-a} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$
 b) $I = V \sigma \frac{4\pi ab}{b-a}$
 c) $R = \frac{1}{\sigma} \frac{b-a}{4\pi ab}$
 d) $R_{max} (b \gg a) = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{4\pi a};$
 $R = 0,9 R_{max} \Rightarrow b = 10a$
56. a) $R = \frac{1}{2\pi a \sigma}$
 b) $\sigma = \frac{I_0}{2\pi a V}$

Capítulo 3

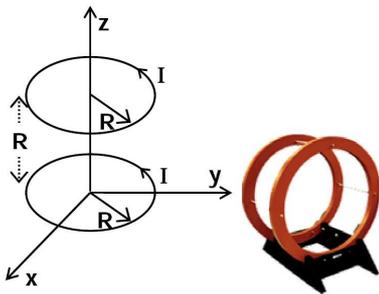
Magnetostática

3.1 Exercícios Propostos

Exercício 58 : Uma espira circular de raio R situada no plano XY e centrada na origem é percorrida por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I . Determine o campo magnético \vec{B} num ponto do eixo zz , à distância genérica z do plano da espira.



Exercício 59 : Uma forma de gerar um campo magnético relativamente uniforme numa dada zona do espaço é através de um sistema composto por duas espiras circulares de raio R , separadas por uma distância R também e percorridas por uma corrente I com igual sentido, tal como se mostra na figura (bobinas de Helmholtz).



- a) Verifique que o campo magnético criado por uma espira circular de raio R e percorrida por uma corrente I , num ponto do eixo que passa pelo seu centro a uma distância z da espira, é dado pela expressão:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} (z^2 + R^2)^{-3/2} \vec{u}_z$$

- b) Verifique que o campo magnético criado pelo sistema de duas espiras representado na figura é dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \left((z^2 + R^2)^{-3/2} + ((z - R)^2 + R^2)^{-3/2} \right) \vec{u}_z$$

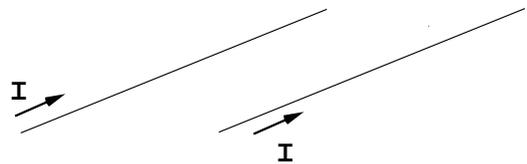
- c) Verifique que para $z = \frac{R}{2}$, se tem $\frac{d\vec{B}}{dz} = 0$.

Nota: Derivando mais uma vez obter-se-ia, $\frac{d^2\vec{B}}{dz^2} = 0$, o que é indicador de que o campo magnético é aproximadamente constante (até à segunda ordem) na região entre as espiras.

Exercício 60 : Determine, utilizando a lei de Biot-Savart, o campo magnético criado por um fio infinito percorrido por uma corrente estacionária I , a uma distância r do fio.

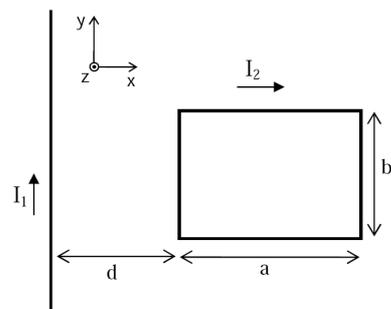
Exercício 61 : Uma espira quadrada de lado ℓ , colocada no plano xy é percorrida por uma corrente eléctrica I . Determine o campo magnético existente no seu centro geométrico.

Exercício 62 : Dois fios paralelos muito compridos transportam correntes de $I = 10$ A no mesmo sentido e encontram-se separados por uma distância de $\ell = 1$ mm.



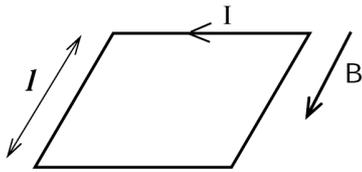
Determine a força que actua em 2 metros de cada um dos fios.

Exercício 63 : Um fio rectilíneo muito longo transporta uma corrente I_1 e na sua proximidade e à distância d é colocada uma espira rectangular, que é percorrida por uma corrente eléctrica I_2 . Determine:



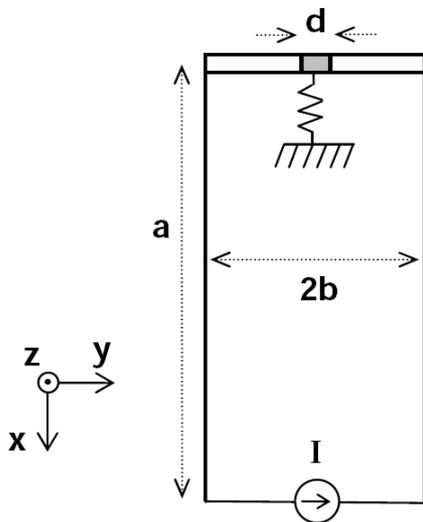
- a) a força que o fio rectilíneo exerce sobre a espira.
- a) a força que a espira exerce sobre o fio.
- c) o momento das forças que actuam nos lados da espira em relação ao seu centro geométrico.

Exercício 64 : Um motor de corrente contínua é constituído por um circuito quadrado de lado ℓ , percorrido por uma corrente I , na presença de um campo magnético uniforme, \vec{B} . A normal ao circuito forma um ângulo de 90° com a direcção do campo magnético.



- a) Determine a força exercida em cada um dos lados do circuito.
- b) Determine a resultante das forças que actuam no circuito.
- c) Determine o momento das forças (\vec{N}) que actuam o circuito relativamente ao seu centro.
- d) Define-se o momento do dipolo magnético como $\vec{m} = IA\vec{n}$, sendo A a área do circuito. Mostre que poderia escrever o momento das forças aplicadas ao circuito como $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$.

Exercício 65 : Um corta-circuitos de correntes industriais é formado por dois fios muito longos de comprimento a , ligados por uma barra metálica de comprimento $2b \ll a$, como se mostra na figura. A barra contém a meio uma parte móvel de comprimento $d \ll 2b$, que está ligada a um ponto fixo através de uma mola. Para deslocar a parte móvel e interromper o circuito é necessário exercer uma força $\vec{F} = -F\vec{u}_x$.



- a) Determine a expressão do campo magnético, \vec{B} , no ponto médio da parte móvel da barra, em função da intensidade de corrente que circula no corta-circuitos, I . Despreze a contribuição do troço inferior do circuito.
- b) Admitindo que o campo calculado em a) é aproximadamente constante na parte móvel da barra, obtenha a expressão para o valor da intensidade de corrente acima do qual o circuito é interrompido.

- c) Utilizando qualitativamente os resultados das alíneas anteriores diga, justificando, qual a forma geométrica que tomaria um circuito constituído por um fio extremamente flexível, percorrido por uma corrente, na ausência de qualquer força exterior.

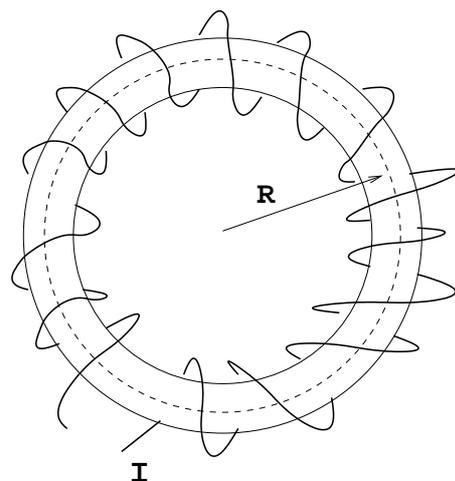
Exercício 66 : Um disco isolante de raio R , que está uniformemente carregado com uma densidade de carga superficial σ , encontra-se a rodar com uma velocidade angular ω . Determine o campo magnético no centro do disco.

Exercício 67 : Numa fábrica de plásticos, devido à fricção do plástico nos rolos cilíndricos ao longo dos quais é arrastado, gerou-se no plástico uma carga superficial $+\sigma$. Sabendo que o plástico se desloca com uma velocidade v , determine o campo magnético junto ao plástico.

Exercício 68 : Determine, utilizando a lei de Ampère, o campo magnético criado por um fio infinito percorrido por uma corrente estacionária I , a uma distância r do fio.

Exercício 69 : Um solenóide bastante longo (comprimento $L \gg R$) possui uma densidade de espiras n e é percorrido por uma corrente estacionária I . Determine o campo magnético no interior do solenóide.

Exercício 70 : O tokamak, acrónimo russo para câmara magnética toroidal, é usado no confinamento do plasma quente ionizado na fusão nuclear. O enrolamento eléctrico tem uma forma toroidal de raio médio R , possui N espiras e é percorrido por uma corrente eléctrica I .



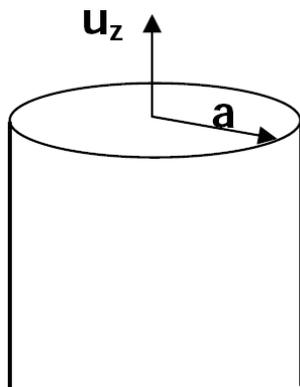
- a) Determine o campo magnético na circunferência de raio R , que passa pelo centro das espiras.
- b) Verifique que se utilizar a densidade de espiras, n , referida ao comprimento da circunferência de

raio R , a expressão do campo não depende de R . Diga qual será o campo magnético criado por uma bobina infinita.

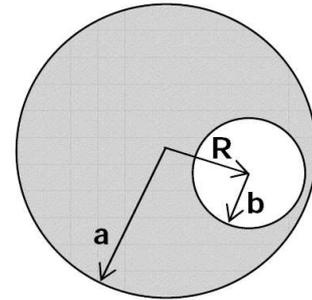
Exercício 71 : Um cabo coaxial tem um condutor central de raio a separado por um material isolante de um tubo condutor concêntrico de raios interno e externo b e c , respectivamente. Os dois condutores transportam correntes eléctricas com sentidos opostos, uniformemente distribuídas e paralelas aos respectivos eixos. A intensidade da corrente em cada um dos condutores é I . Determine o campo magnético nas seguintes regiões:

- Interior do condutor central ($r < a$).
- Espaço entre os dois condutores ($a < r < b$).
- Interior do condutor exterior ($b < r < c$).
- Exterior do cabo coaxial ($r > c$).

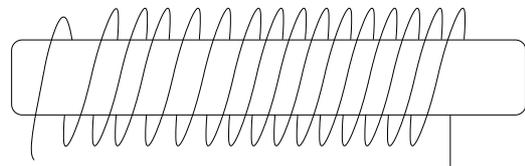
Exercício 72 : Um condutor cilíndrico muito comprido, de raio a e preenchido por um material de permeabilidade magnética μ_0 , é percorrido por uma corrente eléctrica estacionária não uniforme cuja densidade de corrente é descrita por $\vec{J} = J_0 r \vec{u}_z$.



- Determine a intensidade de corrente que atravessa a secção transversal do condutor.
- Desenhe as linhas de campo magnético e obtenha a sua expressão para todo o espaço ($r < a$ e $r > a$). Faça um gráfico de $B(r)$.
- Sabendo que a corrente é mantida por uma fonte que aplica ao condutor uma diferença de potencial por unidade de comprimento V' , determine a condutividade do cilindro, σ .
- Imagine que se abria um orifício cilíndrico de raio b no interior do condutor central, a uma distância R do centro do condutor, tal como indicado na figura. Determine, explicando detalhadamente o seu raciocínio, o campo magnético B no centro do orifício.



Exercício 73 : Um cilindro com um comprimento $\ell = 20$ cm, muito estreito e feito de um material com uma susceptibilidade magnética $\chi_m = 2$, constitui o núcleo de um enrolamento com 150 espiras que são percorridas por uma corrente $I = 2$ A. Determine:

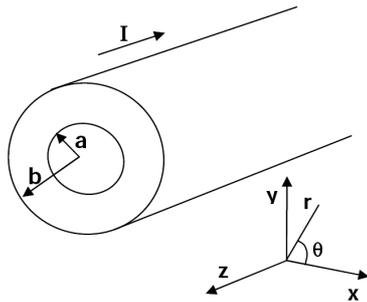


- a permeabilidade magnética μ do material.
- a intensidade do campo magnético, \vec{H} , a magnetização produzida no material \vec{M} e o campo magnético \vec{B} , no interior do cilindro.
- as correntes de magnetização no material.

Exercício 74 : Um material condutor cilíndrico muito comprido de raio R e permeabilidade magnética μ , é percorrido por uma corrente eléctrica estacionária, uniformemente distribuída, de intensidade I .

- Determine o campo magnético, \vec{B} , criado pelo condutor no seu exterior a uma distância r do seu eixo (não muito afastado do condutor).
- Determine o campo magnético, \vec{B} , criado pelo condutor no seu interior.
- Determine a densidade de corrente de magnetização no condutor, \vec{J}_M .

Exercício 75 : Um condutor de cobre, de secção circular, comprido e rectilíneo, de raio a , está coberto com uma camada de ferro de raio exterior b ($b = a + \text{espessura}$). Este condutor composto é percorrido por uma intensidade de corrente I . Sendo a permeabilidade magnética do cobre μ_0 e a do ferro μ e sendo as suas condutividades eléctricas respectivamente σ_{Cu} e σ_{Fe} , determine:

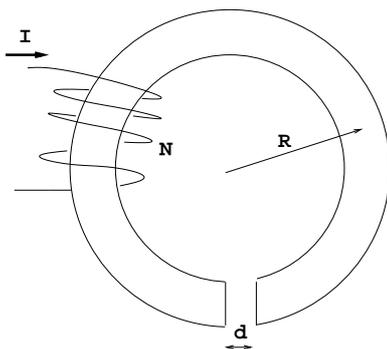


- a) a densidade de corrente existente no Cobre (J_{Cu}) e no Ferro (J_{Fe}).
- b) a intensidade do campo magnético, \vec{H} e o campo magnético \vec{B} , em todas as regiões do espaço, em função de J_{Cu} e J_{Fe} .

Exercício 76 : Utilize as condições fronteira do campo magnético na ausência de correntes para verificar que os materiais ferromagnéticos se comportam como condutores das linhas de campo.

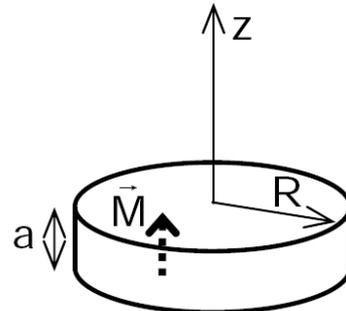
Sugestão: utilize a aproximação $\mu \gg \mu_0$.

Exercício 77 : Nas cabeças de gravação magnéticas os campos são criados por correntes pequenas e para se obterem campos intensos, utilizam-se entreferros (aberturas em núcleos de materiais ferromagnéticos). Um caso simples de um entreferro está representado na figura abaixo, em que um núcleo de material ferromagnético com a forma de um anel cilíndrico de raio médio $R = 1$ cm, possui um enrolamento de $N = 20$ espiras, percorridas por uma corrente de $I = 1$ mA. Nesse núcleo foi aberto um espaço de largura $d = 10 \mu\text{m}$.



- a) Utilizando as equações que descrevem o campo magnético, verifique que na fronteira de separação entre o ar e o ferro, se verifica a condução $B_{\perp ar} = B_{\perp Fe}$.
- b) Calcule o campo magnético no entreferro, B_{ar} , na linha de campo média ($r = R$), assumindo que o material ferromagnético apresenta para estas condições uma permeabilidade magnética $\mu = 10^5 \mu_0$.

Exercício 78 : Um cilindro de espessura $a = 1$ mm e raio $R = 1$ cm encontra-se magnetizado uniformemente ao longo do eixo zz , sendo a sua magnetização $M = 10^5 \text{ A.m}^{-1}$.



- a) Calcule as correntes equivalentes de magnetização no cilindro, \vec{J}_m . Esboce as correntes no cilindro.
- b) Fazendo as aproximações que considerar convenientes, calcule o campo magnético \vec{B} no eixo do cilindro, para $z = 0$.
- c) Esboce as linhas de campo magnético no interior do disco e no espaço à sua volta.

3.2 Exercícios Resolvidos

Resolução do exercício 65

- a) Para calcular o campo magnético no ponto pretendido pode utilizar-se a lei de Biot-Savart; começando por ver a direcção do campo criado por cada um dos lados do circuito, verifica-se que a própria barra não cria campo e que cada um dos lados de comprimento a , cria um campo segundo \vec{u}_z . Como os dois condutores criadores do campo estão simetricamente colocados em relação ao ponto, pode-se simplesmente calcular o campo de um dos lados e multiplicar por 2.

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \int \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2} \implies B = \int_0^a \frac{\mu_0 I \|d\vec{x} \times \vec{u}_r\|}{4\pi r^2} = \int_0^a \frac{\mu_0 I \sin(dx, u_r)}{4\pi r^2} dx \\ &= \int_0^a \frac{\mu_0 I}{4\pi x^2 + b^2} \frac{b}{\sqrt{x^2 + b^2}} dx = \frac{\mu_0 I b}{4\pi} \int_0^a \frac{1}{(x^2 + b^2)^{3/2}} dx \\ \vec{B} &= 2 \times \frac{\mu_0 I b}{4\pi} \frac{a}{b^2 \sqrt{x^2 + b^2}} \vec{u}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{b \sqrt{x^2 + b^2}} \vec{u}_z\end{aligned}$$

Nota: $\lim_{a \rightarrow \infty} B(a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \vec{u}_z$

- b) Já se conhece o campo magnético existente na parte móvel pelo que agora há somente que calcular a força que esse campo exerce sobre a corrente eléctrica que percorre a parte móvel,

$$\vec{F} = \int I d\vec{\ell} \times \vec{B} = IB \int_0^d d\ell (-\vec{u}_x) = -IBd\vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \frac{ad}{b\sqrt{x^2 + b^2}} \vec{u}_x$$

A corrente a partir da qual se interrompe o circuito é então,

$$I = \sqrt{\frac{F2\pi b \sqrt{a^2 + b^2}}{\mu_0 ad}}$$

- c) Verifica-se neste problema que o circuito cria sobre uma parte de si próprio uma força *para fora*. Se tivermos então um circuito flexível, sem outras forças aplicadas, e todos os seus pontos forem puxados para fora, este tomará uma forma circular.

Resolução do exercício 74

- a) Como se trata de um problema de geometria cilíndrica com um condutor muito comprido ($L \gg R$), vamos aplicar a lei de Ampère utilizando como caminho de integração uma linha de campo, ou seja, uma circunferência de raio $r > R$ genérica ($L \gg r$ também). Neste caso a corrente que atravessa a superfície definida pelo caminho fechado é toda a corrente I .

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS = I \implies H2\pi r = I \implies H = \frac{I}{2\pi r} \vec{u}_\theta \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

- b) Neste aplicaremos a lei de Ampère como anteriormente mas a corrente que atravessa a superfície definida pelo caminho fechado é apenas a fracção de I que corresponde à fracção de área do condutor que nos interessa.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS = I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \implies H2\pi r = I \frac{r^2}{R^2} \implies H = \frac{Ir}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta \implies \vec{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta$$

- c)

$$\begin{aligned}\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) &\iff \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{H} \\ \vec{M} &= \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \frac{Ir}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{J}_M &= \vec{\nabla} \times \vec{M} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial M_z}{\partial \theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rM_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial M_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z \\
&= \frac{\partial M_\theta}{\partial z} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial(rM_\theta)}{\partial r} \vec{u}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(rM_\theta)}{\partial r} \vec{u}_z \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{Ir}{2\pi R^2} \right) \vec{u}_z = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{2\pi R^2} \frac{1}{r} \frac{\partial r^2}{\partial r} \vec{u}_z = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z \\
&= \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{J}
\end{aligned}$$

A corrente de magnetização existe ao longo do condutor, como a própria corrente que o percorre.

Resolução do exercício 75

a) $\vec{J}_{Cu} = \sigma_{Cu} \vec{E}$; $\vec{J}_{Fe} = \sigma_{Fe} \vec{E}$

O campo eléctrico é igual nos dois materiais pois a diferença de potencial entre os extremos do cabo é a mesma, "vendo" pelo lado do Ferro ou pelo Cobre.

$$\begin{aligned}
I &= J_{Cu} \pi a^2 + J_{Fe} \pi (b^2 - a^2) = \sigma_{Cu} E \pi a^2 + \sigma_{Fe} E \pi (b^2 - a^2) \\
\Rightarrow E &= \frac{I}{\pi (\sigma_{Cu} a^2 + \sigma_{Fe} (b^2 - a^2))} \\
\vec{J}_{Cu} &= \frac{\sigma_{Cu} I}{\pi (\sigma_{Cu} a^2 + \sigma_{Fe} (b^2 - a^2))} (-\vec{u}_z) \\
\vec{J}_{Fe} &= \frac{\sigma_{Fe} I}{\pi (\sigma_{Cu} a^2 + \sigma_{Fe} (b^2 - a^2))} (-\vec{u}_z)
\end{aligned}$$

b) Como se trata de um problema de geometria cilíndrica com um condutor em que $L \gg R$, vamos aplicar a lei de Ampère utilizando como caminho de integração uma linha de campo, ou seja, uma circunferência de raio r genérico. Como temos dois materiais diferentes aplicaremos a lei de Ampère generalizada,

$$r < a \quad \oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS \iff H_1 2\pi r = J_{Cu} \pi r^2 \iff \vec{H}_1 = \frac{1}{2} J_{Cu} r (-\vec{u}_\theta)$$

$$\begin{aligned}
a < r < b \quad \oint \vec{H}_2 \cdot d\vec{\ell} &= \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS \iff H_2 2\pi r = J_{Cu} \pi a^2 + J_{Fe} \pi (r^2 - a^2) \\
\Rightarrow \vec{H}_2 &= \frac{1}{2r} (J_{Cu} a^2 + J_{Fe} (r^2 - a^2)) (-\vec{u}_\theta)
\end{aligned}$$

$$r > b \quad \oint \vec{H}_3 \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS \iff H_3 2\pi r = I \iff \vec{H}_3 = \frac{I}{2\pi r} (-\vec{u}_\theta)$$

Como, $\vec{B} = \mu \vec{H}$, vem:

$$\begin{aligned}
r < a \quad \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{H}_1 \\
a < r < b \quad \vec{B}_2 &= \mu \vec{H}_2 \\
r > b \quad \vec{B}_3 &= \mu_0 \vec{H}_3
\end{aligned}$$

Resolução do exercício 75

a) Se aplicarmos a equação fundamental $\oint \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$ a uma superfície cilíndrica, em que uma das tampas está do lado do ar e a outra do lado do ferro, e fizermos a altura do cilindro tender para zero, verificamos que a diferença entre o fluxo através de cada uma das tampas é zero. Mas o produto interno do campo com a normal a cada tampa é precisamente a componente do campo perpendicular à superfície de separação entre o ar e o ferro.

b) Na linha de campo média,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I \iff \int_{Fe} H_{Fe} d\ell + \int_{ar} H_{ar} d\ell = NI$$

De notar que se B é igual nos dois materiais, H não é; na linha de campo B , só existe $B \equiv B_{\perp}$ à superfície de separação.

$$\begin{aligned} H_{Fe}(2\pi R - d) + H_{ar}d &= NI \iff \frac{B_{Fe}}{\mu}(2\pi R - d) + \frac{B_{ar}}{\mu_0}d = NI \\ \implies B &= \frac{NI}{\frac{2\pi R - d}{\mu} + \frac{d}{\mu_0}} = \frac{\mu NI}{2\pi R + d\left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right)} = \frac{10^5 \mu_0 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 10^{-2} + 200\pi \cdot 10^{-6}(10^5 - 1)} \\ &= \frac{2 \cdot 10^3 \mu_0}{2 \cdot 10^{-2}\pi + 2 \cdot 10\pi} = 4 \cdot 10^{-5} T = 40 \mu T \end{aligned}$$

3.3 Soluções

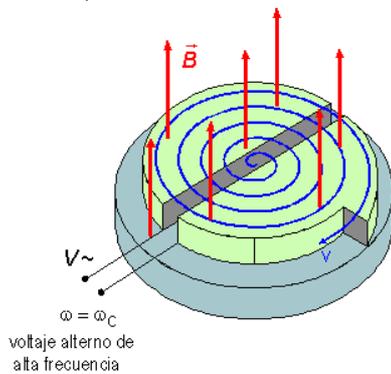
58. $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$
60. $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{u}_\theta$
61. $\vec{B} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0}{\pi} \frac{I}{L} \vec{u}_z$
62. $F = 4 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ (atractiva)
63. a) $\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 b \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) \vec{u}_x$
 b) $\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$
 c) $\vec{M} = 0$
64. a) $\vec{F} = 0$, nos lados paralelos a \vec{B}
 $\vec{F} = \pm I B \ell \vec{n}$, nos dois outros lados
 b) $\sum_i \vec{F}_i = 0$
 c) $N = I \ell^2 B$
66. $B = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R$
67. $B = \frac{\mu_0}{2} \sigma V$, paralelo à superfície do plástico e perpendicular à sua velocidade.
68. $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{u}_\theta$
69. $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$
70. a) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{R} \vec{u}_\theta$
 b) $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_\theta$
71. a) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I r}{a^2} \vec{u}_\theta$
 b) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{u}_\theta$
 c) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \left(1 - \frac{r^2 - a^2}{c^2 - b^2} \right) \vec{u}_\theta$
 d) $B = 0$
72. a) $I = J_0 \frac{2\pi}{3} a^3$
 b) $r < a$, $\vec{B} = \frac{\mu_0}{3} J_0 r^2 \vec{u}_\theta$
 $r > a$, $\vec{B} = \frac{\mu_0}{3} \frac{J_0}{r} a^3 \vec{u}_\theta$
 c) $\sigma(r) = \frac{J_0}{V} r$
 d) Idêntico ao calculado em b) para $r = R$. Pode-se chegar a esta conclusão utilizando o princípio da sobreposição e verificando que um condutor de raio b teria $B = 0$ no seu centro.
73. a) $\mu = 3,8 \mu\text{H.m}^{-1}$; $\mu_r = 3$
 b) $H = 1500 \text{ A.m}^{-1}$
 $M = 3000 \text{ A.m}^{-1}$
 $B = 5,7 \text{ mT}$
 c) $J_M = 3000 \text{ A.m}^{-1}$
78. a) $\vec{J}_M = 10^5 \vec{u}_\theta \text{ A.m}^{-1}$
 c) $\vec{B} = 6,3 \vec{u}_z \text{ mT}$

Capítulo 4

Movimento de partículas em campos

4.1 Exercícios Propostos

Exercício 79 : Num ciclotrão (acelerador de partículas), partículas carregadas são sujeitas a um campo magnético \vec{B} perpendicular à sua velocidade, sendo a sua trajectória circular. No entanto, num ciclotrão, ao fim de cada semi-volta, aplica-se às partículas uma tensão sinusoidal dada por $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$. O campo eléctrico que deriva desta tensão aumenta a velocidade das partículas acelerando-as. Deste modo, a sua trajectória deixa de ser circular passando a consistir em troços semicirculares de raio cada vez maior. Neste exercício pretende-se *dimensionar* um ciclotrão que acelera partículas alfa (núcleos de átomos de hélio possuindo 2 prótons e 2 neutrões).



- Para que haja sincronia entre o efeito da aceleração do campo eléctrico e o movimento de rotação das partículas, qual deve ser a frequência da tensão sinusoidal em função do campo B , da carga q e da massa m das partículas.
- Suponha que a frequência da tensão sinusoidal $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ é de 10 KHz . Qual deve ser então, de acordo com a alínea a), o valor do campo magnético aplicado?
- As partículas não ganham energia devido à aplicação do campo magnético (é verdade? porquê?), porém o campo eléctrico fornece-lhes energia. Qual é, em função da amplitude V_0 da tensão aplicada, a energia ganha em cada volta completa?
- Suponha que o raio da órbita de extracção (raio da última volta) é $R = 1\text{m}$. Qual a energia cinética com que saem do ciclotrão as partículas alfa?
- Suponha que as partículas percorrem 12 voltas no interior do ciclotrão. A partir das alíneas c) e d) calcule a diferença de potencial máxima V_0 que é aplicada às partículas alfa.

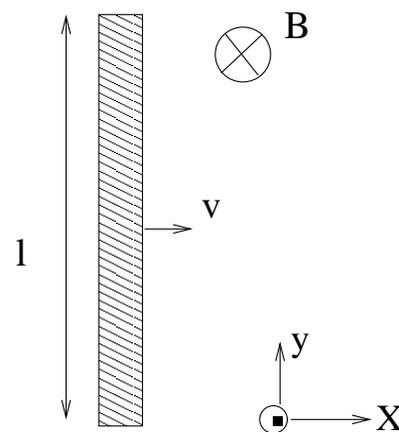
Exercício 80 : Um feixe pulsado (*bunch*) de 10^{10} electrões inicialmente em repouso é acelerado numa **zona 1**

por aplicação de uma diferença de potencial de 20 kV . Seguidamente, após entrar numa **zona 2**, o feixe é submetido à acção de um campo magnético perpendicular à sua velocidade.

- Calcule a velocidade do feixe de electrões quando sai da **zona 1**.
- Obtenha a intensidade do campo magnético aplicado na **zona 2**, sabendo que o feixe passa a ter uma trajectória circular de raio $R = 12 \text{ cm}$.
- Calcule a intensidade da corrente eléctrica média I criada pelo movimento circular do feixe electrónico na **zona 2**.
- Utilize a lei de Biot-Savart para obter a intensidade do campo magnético criado pela corrente I , no centro da trajectória do feixe electrónico. Poderá este campo influenciar significativamente a trajectória do feixe?

Exercício 81 : Uma corrente marinha tem uma velocidade de 1 m.s^{-1} numa zona em que a componente vertical do campo magnético terrestre tem uma amplitude $3,5 \times 10^{-5} \text{ T}$. Sabendo que a condutividade eléctrica da água do mar é $0,04 \Omega^{-1}.\text{cm}^{-1}$, determine a densidade de corrente perpendicular à direcção da corrente marítima.

Exercício 82 : Uma barra metálica de comprimento $\ell = 1 \text{ m}$ move-se com uma velocidade $\vec{v} = 10\vec{u}_x \text{ m.s}^{-1}$ numa zona onde existe, perpendicularmente à sua velocidade, um campo magnético $\vec{B} = -\vec{u}_z \text{ mT}$.

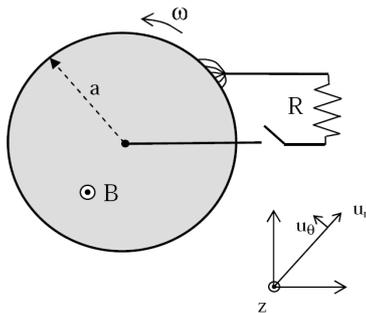


- Determine o módulo e o sentido da força magnética que actua nos electrões de condução da barra.
- Calcule a diferença de potencial entre as extremidades da barra após se ter atingido o equilíbrio.

- c) Se os extremos da barra fossem ligados com um condutor de resistência 100Ω , solidário com a barra, qual seria a corrente no circuito?

Exercício 83 : Numa experiência de efeito de Hall transversal, uma corrente de intensidade $I = 10 \text{ A}$ percorre um condutor de secção quadrada com $\ell = 0,5 \text{ cm}$ de lado. Um campo magnético transversal ao condutor de amplitude $B = 2 \text{ T}$ induz uma tensão $V = 2,5 \times 10^{-4} \text{ V}$. Supondo que os portadores de carga são electrões, calcule a densidade destes no condutor.

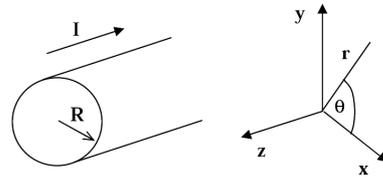
Exercício 84 : O primeiro gerador de corrente foi inventado por Faraday em 1831 e consiste num disco metálico que é posto a rodar na presença de um campo magnético perpendicular à sua superfície. Após se fechar um interruptor, o centro do disco e a sua periferia ficam ligados por um circuito imóvel que é percorrido por corrente. O disco, que possui raio a e espessura b , é posto a rodar com uma velocidade angular ω e encontra-se sujeito a um campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.



- Determine a expressão da força (\vec{F}_m) a que ficam sujeitos os electrões livres do metal devido ao campo magnético e a expressão do campo electrostático (\vec{E}) dentro do disco, devido à distribuição de carga do disco, após se ter atingido o equilíbrio electrostático.
- Determine a densidade de carga no interior do disco e na sua superfície exterior, em equilíbrio electrostático.
- Determine a diferença de potencial (V) a que vai ficar sujeita a resistência R após se fechar o interruptor.
- Determine a potência mecânica fornecida ao disco para o manter a rodar com velocidade angular constante, após se fechar o interruptor e a resistência R passar a ser percorrida por uma corrente.

Exercício 85 : Considere um condutor de cobre muito comprido, cilíndrico e de raio $R = 1 \text{ mm}$, que transporta uma corrente estacionária e uniformemente distribuída $I = 10 \text{ A}$ (segundo $-\vec{u}_z$). Vamos verificar até

que ponto a lei de Ohm é válida no período em que se estabelece a corrente, se as forças magnéticas forem ignoradas.

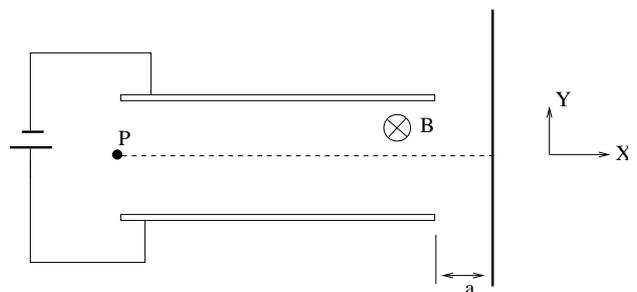


- Calcule o campo magnético (B) criado pela corrente eléctrica dentro do condutor.
- Calcule a força por unidade de carga a que ficam sujeitos os electrões devido ao campo magnético. Descreva sucintamente, de acordo com o resultado obtido, o que se passa no condutor no período transitório em que se estabelece a corrente e como se atinge o regime estacionário.
Sugestão: escreva primeiro a velocidade dos electrões (v) em função de \vec{J} , de N_{cobre} e de q .
- Calcule a força por unidade de carga a que ficam sujeitos os electrões devido ao campo electrostático que cria a corrente. Compare o resultado obtido com o da alínea b) e conclua da importância do período transitório.

Exercícios de revisão

4.1 No final do século de XIX J.J.Thomson obteve a primeira medida experimental da razão da carga sobre a massa (q/m) para os electrões. A experiência realizada consistia em duas placas condutoras quadradas de lado ℓ e separadas de uma distância d , que eram submetidas a uma diferença de potencial (V). Desta forma, produzia-se um campo eléctrico na região entre as placas. Um conjunto de duas bobinas de Helmholtz produzia um campo magnético B perpendicular ao campo eléctrico.

Admita que os electrões são produzidos no ponto P possuindo uma velocidade inicial $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$ (de facto existia um campo eléctrico adicional que fornecia a energia cinética inicial).



- Descreva o movimento dos electrões na ausência de campo eléctrico e magnético.

- b) Considere que as placas são carregadas pela bateria e que o campo magnético continua desligado.
- b.1) Determine o campo eléctrico entre as placas.
 - b.2) Descreva o movimento dos electrões na presença do campo eléctrico.
 - b.3) Determine a velocidade dos electrões à saída da região entre as placas.
 - b.4) Determine a distância deflectida pelos electrões segundo o eixo dos YY (ΔY) devido ao campo eléctrico.
- c) A resolução da alínea b.4) anterior permite obter uma expressão de q/m em função da deflecção ΔY e velocidade v_0 . Resta-nos então determinar a velocidade dos electrões v_0 . Para tal, considere agora que se liga o campo magnético com a direcção e sentido representadas na figura.
- c.1) Determine a direcção e sentido da força magnética aplicada no ponto P .
 - c.2) Admita que o experimentalista foi aumentando o campo magnético até que a trajectória dos electrões voltou a ser rectilínea, tendo registado o valor do campo magnético como sendo B_0 . Determine a velocidade dos electrões v_0 .
- d) Determine a razão q/m dos electrões.

4.2 Exercícios Resolvidos

Resolução do exercício 80

a)

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2 = qV \implies v = \sqrt{2\frac{q}{m}V} = 0,28c$$

b)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \iff ma_c = qv\sin(90^\circ) \iff m\frac{v^2}{R} = qvB \implies B = \frac{mv}{qR} = 4 \text{ mT}$$

c)

$$I = \frac{dq}{dt} = Nq \times (n. \text{ voltas}/s) = Nq\frac{v}{2\pi R} = 178 \text{ mA}$$

d) Utilizemos a lei de Biot-Savart para calcular o campo magnético criado pelo feixe no centro da circunferência. Este caso é semelhante a uma espira de raio R percorrida por uma corrente I .

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \frac{\mu_0 I d\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2} \vec{u}_z \\ \implies \vec{B} &= \int_{anel} \frac{\mu_0 I d\ell}{4\pi r^2} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} 2\pi R \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Vamos então comparar as intensidades do campo, utilizando o campo no centro do feixe como indicador da ordem de grandeza do campo criado por ele próprio:

$$\frac{B}{B_{aplicado}} = \frac{\frac{\mu_0 I}{2R}}{\frac{mv}{qR}} = \frac{\mu_0 Iq}{2mv} = \frac{\mu_0 Nq\frac{v}{2\pi R}q}{2mv} = \frac{\mu_0 Nq^2}{4\pi mR} \sim \frac{10^{-7} \times 10^{10} \times 10^{-38}}{10^{-30} \times 10^{-1}} \sim 10^{-4}$$

Conclui-se que o campo criado pelo feixe é muito menor que o aplicado pelo que não terá grande influência na sua trajectória.

Resolução do exercício 84

a)

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = -e\omega r B_0 \vec{u}_r$$

Quando se atinge o equilíbrio electrostático, $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$, pelo que,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = -\omega r B_0 \vec{u}_r$$

b)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r(-\omega r B_0)] = -2\epsilon_0 \omega B_0$$

Ou seja, aparece uma densidade de carga em volume negativa que cria o campo que contraria a força devida ao campo magnético. A carga total em volume é apenas o produto dessa densidade, que é constante, pelo volume do disco:

$$Q^- = -2\epsilon_0 \omega B_0 \times \pi a^2 \times b$$

Como o disco estava electricamente neutro a carga que aparece na sua superfície exterior é simétrica da que aparece em volume. Assim a densidade de carga superficial é:

$$\sigma = \frac{Q^+}{2\pi ab} = +\epsilon_0 \omega B_0 a$$

c)

$$V = \int_a^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\omega B_0 \left[\frac{r^2}{2} \right]_a^0 = \frac{1}{2} \omega B_0 a^2$$

d) A potência mecânica que é necessário fornecer ao disco após se fechar o interruptor é a que compensa a potência que é dissipada. Neste caso é necessário compensar a potência dissipada por efeito de Joule na resistência:

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 B_0^2 a^4}{4R}$$

Resolução do exercício 85

a) Tratando-se de um condutor cilíndrico muito comprido as linhas de campo magnético são circunferências concêntricas em torno do eixo zz (dentro e fora do condutor). Podemos então aplicar a lei de Ampère utilizando como caminho uma linha de campo de raio r genérico ($r < R$):

$$\begin{aligned} \int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I &\iff B 2\pi r = \mu_0 I \frac{\pi r^2}{\pi R^2} &\implies \vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta \\ & &\implies \vec{B} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 10^{-6}} r (-\vec{u}_\theta) = -2\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \vec{J} = Nq\vec{v} &\implies \vec{v} = \frac{\vec{J}}{Nq} \\ I = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS &\implies \vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} (-\vec{u}_z) \\ \vec{v} = \frac{I}{\pi R^2} (-\vec{u}_z) &= 0,2 \times 10^{-3} \vec{u}_z \text{ m.s}^{-1} \\ \vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} &\iff \frac{\vec{F}_m}{q} = \vec{v} \times \vec{B} = 0,4 \times 10^{-3} r \vec{u}_r \text{ N.C}^{-1} \end{aligned}$$

Isto significa que quando se estabelece a corrente os electrões ficam sujeitos a uma força que os puxa para o interior do fio (a carga dos electrões é negativa). Mas esta deslocação de carga criará um campo electrostático que se lhe oporá e quando as duas forças se igualem atingir-se-á o equilíbrio e cessará a migração de electrões para o interior do condutor.

c) O campo que cria a corrente (aplicado ao longo do condutor, ou seja, segundo o eixo zz) obedece à lei de Ohm, $\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho}$. Então,

$$\frac{\vec{F}_e}{q} = \vec{E} = \rho \vec{J} = \rho \frac{I}{\pi R^2} \vec{u}_z = 5 \times 10^{-2} \vec{u}_z \text{ V.m}^{-1}$$

O valor máximo da força por unidade de carga calculado na alínea anterior é obtido quando $r = R$, e vale nesse caso, $\frac{F_m^{max}}{q} = 4 \times 10^{-7} \text{ V.m}^{-1}$ sendo 5 ordens de grandeza inferior ao campo longitudinal criado pela fonte que gera a corrente. Podemos pois afirmar que em termos práticos, mesmo durante o período transitório, a densidade de corrente é devida somente ao campo aplicado pela fonte e a lei de Ohm, ignorando as forças magnéticas, é válida.

4.3 Soluções

79. a) $f = \frac{qB}{2\pi m}$
b) $B = 1,3 \text{ mT}$
c) $\Delta T = 2qV_0 =$
d) $T = 1,3 \times 10^{-17} \text{ J}$
e) $V_0 = 1,7 \text{ V}$
81. $J = 1,4 \times 10^{-4} \text{ A.m}^{-1}$
82. a) $\vec{F} = -1,6 \times 10^{-21} \vec{u}_y \text{ [N]}$
b) $V = 10 \text{ mV}$
b) $I = 0$
83. $N = 10^{26} \text{ electrões.m}^{-3}$

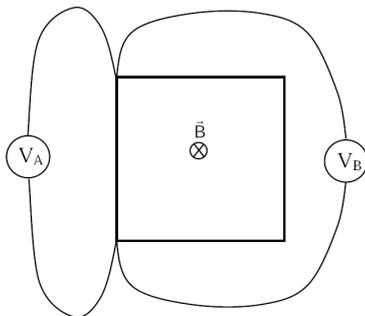
Capítulo 5

Campo Magnético Variável

5.1 Exercícios Propostos

Exercício 86 : Um circuito de área A e resistência eléctrica R encontra-se numa zona do espaço em que existe um campo magnético que lhe é perpendicular e que é aproximadamente uniforme. O campo tem uma variação temporal descrita por $B(t) = B_0 e^{-\omega t}$. Determine a intensidade da corrente eléctrica que percorre o circuito.

Exercício 87 : Para medir um campo magnético que existe apenas numa zona confinada do espaço cuja secção é um quadrado de lado ℓ , colocou-se em seu redor uma espira condutora quadrada também de lado ℓ , cujos quatro lados têm a mesma resistência. O campo magnético teve uma variação temporal expressa por $B = B_0 t$ e a diferença de potencial entre dois vértices consecutivos da espira foi medida por dois voltímetros, V_A e V_B , de acordo com a figura.



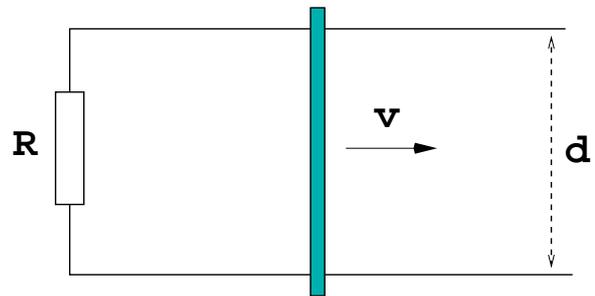
- a) Calcule a força electromotriz induzida na espira em função do máximo do campo magnético (B_0) e indique o sentido da corrente induzida.
- b) Sabendo que a diferença de potencial medida por V_A é $5 \mu V$, calcule o valor de B_0 .
- c) Qual é o valor medido por V_B ?

Exercício 88 : Um circuito quadrado de resistência $R = 20 \Omega$ e de lado $\ell = 0,2 \text{ m}$ roda 100 vezes por segundo em torno de um eixo horizontal que o divide ao meio. Existe no local em que se encontra o circuito um campo magnético uniforme, de intensidade $B = 1 \text{ T}$ e perpendicular à posição ocupada pelo circuito quando $t = 0 \text{ s}$. Determine:

- a) o fluxo do campo magnético através da espira, em função do tempo.
- b) a corrente induzida.
- c) a energia dissipada na espira, por efeito de Joule, ao fim de 2 minutos.

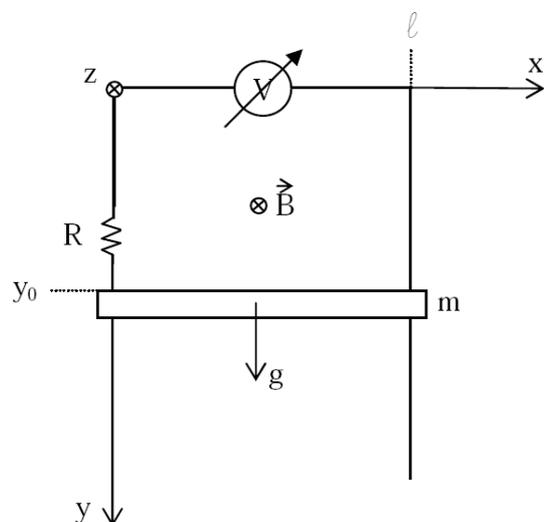
Exercício 89 : Dois carris condutores paralelos entre si, que se encontram a uma distância d , estão unidos

numa das extremidade por um condutor. A resistência equivalente deste sistema é R . Uma barra condutora de resistência desprezável desliza apoiada nos carris com uma velocidade constante $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$, sem atrito, sob acção de uma força exterior. Existe um campo $\vec{B} = B \vec{u}_z$ uniforme em toda a região ocupada pelo sistema. Determine:



- a) a intensidade e sentido da corrente induzida no circuito.
- b) a potência dissipada por efeito de Joule.
- c) a força que o campo B exerce sobre a barra móvel.
- d) a potência correspondente ao trabalho da força aplicada sobre a barra para a movimentar.

Exercício 90 : Considere o circuito da figura, constituído por uma fonte de tensão variável V , uma resistência R e uma barra móvel de comprimento ℓ e de massa m . O circuito está colocado na vertical, estando a barra sujeita à aceleração da gravidade g . Perpendicularmente ao circuito existe um campo magnético uniforme de intensidade $\vec{B} = B \vec{u}_z$. No instante inicial a barra encontra-se na posição y_0 .

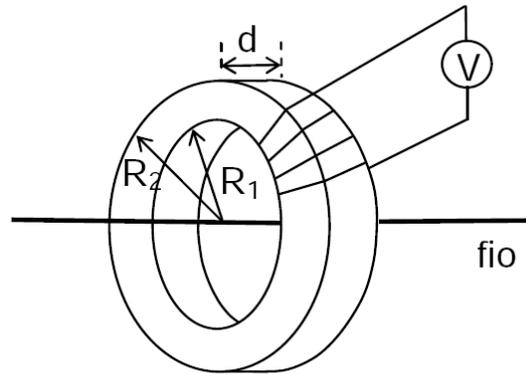


- Admita que a barra tem uma velocidade segundo y (para baixo) $\vec{v} = v_0 \vec{u}_y$. Determine a intensidade e sentido da corrente que percorre o circuito.
- Admita que a barra é deixada cair sem velocidade inicial. Determine a tensão que terá de ser imposta pela fonte em cada instante, $V(t)$, para que não exista corrente no circuito (indique também a polaridade da fonte).
- Admita que a barra é largada sem velocidade inicial. Determine a tensão que terá de ser imposta pela fonte, V , para que a barra fique suspensa sem cair (indique também a polaridade da fonte).
- Admita agora que a barra é largada com uma velocidade inicial v_0 . Se a tensão imposta ao circuito for semelhante à da alínea c) que tipo de movimento terá a barra? Justifique qualitativamente.

Exercício 91 : Uma bobina muito comprida, com um diâmetro $D = 20$ cm e uma densidade de espiras $n = 1000$ espiras.m⁻¹, é percorrida por uma corrente eléctrica de intensidade I . Em torno do seu eixo vertical existe um anel de um material condutor com um diâmetro $D' = 40$ cm.

- Calcule a força electromotriz induzida no anel quando a corrente na bobina varia de $I_1 = 10$ A para $I_2 = 1$ A numa décima de segundo.
- Se o anel tiver uma secção $S = 1$ cm² e uma condutividade $\sigma = 6 \times 10^8$ Ω⁻¹.m⁻¹, qual a corrente que o percorre?
- Qual a resposta à alínea b) se o anel tiver 1 m de diâmetro? É importante que os eixos estejam coincidentes?

Exercício 92 : Um amperímetro clip-on é um dispositivo para medir correntes alternadas em cabos sem ter que cortar o cabo. Consiste num enrolamento em torno de um núcleo metálico de permeabilidade magnética μ com a forma de um anel cilíndrico, de secção quadrada. O dispositivo é colocado de modo a que a normal que passa pelo centro do anel esteja alinhada com o fio e possui um voltímetro que mede a diferença de potencial aos terminais do enrolamento. Considere um destes dispositivos com um anel de raios $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 11$ cm, uma espessura $d = 2$ cm e um enrolamento de 5000 espiras.



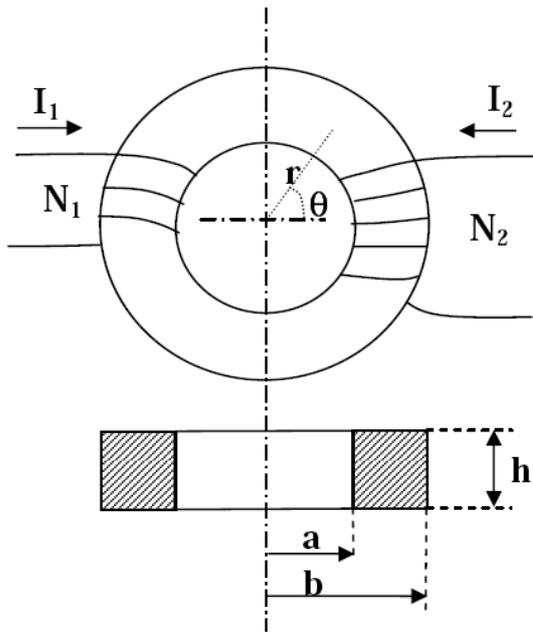
- Determine a expressão do campo magnético produzido pelo fio no núcleo metálico, em função da corrente que o percorre.
- Determine a expressão do fluxo do campo magnético criado pelo fio no enrolamento.
- Calcule a diferença de potencial medida pelo voltímetro, sabendo que a corrente que passa pelo fio é $I = 16 \cos(100\pi t)$ A e que o núcleo metálico tem uma permeabilidade magnética relativa $\mu_r = 1000$.

Exercício 93 : Determine o coeficiente de auto-indução externo por unidade de comprimento de dois fios condutores infinitos de raio $R = 1$ mm cujos centros se encontram a uma distância $d = 1$ cm um do outro.

Exercício 94 : Considere uma bobina de comprimento ℓ e diâmetro D em que $\ell \gg D$, com n espiras por unidade de comprimento. Este é percorrido por uma corrente variável $I = I_0 \cos(\omega t)$. Determine:

- o coeficiente de auto-indução da bobina.
- a força electromotriz induzida num anel condutor concêntrico com a bobina, de raio $r < D/2$.
- o campo eléctrico existente num pontos P a uma distância $r < D/2$ do eixo da bobina.

Exercício 95 : Na figura que se segue está representado um transformador de núcleo circular e de secção quadrada. Este núcleo é constituído por um material ferromagnético linear de permeabilidade μ . Os enrolamentos primário e secundário são atravessados por correntes I_1 e I_2 e possuem N_1 e N_2 espiras, respectivamente. Determine:



- o campo magnético (\vec{B}) no interior do núcleo.
- o coeficiente de indução mútua entre os enrolamentos.
- as forças electromotriz induzidas em cada um dos enrolamentos, ε_1 e ε_2 , em função do fluxo do campo magnético (Φ) que atravessa uma secção do núcleo e do número de espiras. Calcule a razão entre as tensões no circuito primário e secundário do transformador.

Exercício 96 : Considere uma bobina de comprimento ℓ e diâmetro D em que $\ell \gg D$, com n espiras por unidade de comprimento e um núcleo de ar, possui uma resistência R . Em torno da bobina existe uma espira quadrada de lado a que é percorrida por uma corrente $I = I_0 \cos(\omega t)$. Determine:

- o coeficiente de indução mútua entre a espira e o solenóide.
- a expressão da equação diferencial que permite determinar a corrente induzida no solenóide.

Exercício 97 : Considere uma bobina de comprimento ℓ , raio R_1 , N_1 espiras e núcleo de ar, percorrida por uma corrente $I = I_0 e^{-at}$. Esta bobina está colocada dentro de uma segunda bobina de comprimento ℓ , de raio R_2 , N_2 espiras e de resistência R . Os eixos das duas bobinas estão coincidentes e considera-se que $\ell \gg R_2$.

- Determine o coeficiente de indução mútua do sistema das duas bobinas.

- Determine a corrente induzida na bobina exterior.

Exercício 98 : Considere um condutor rectilíneo de comprimento infinito e secção circular de raio a , com uma permeabilidade magnética μ_0 e estando a ser percorrido por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I_1 . Determine:

- a densidade de energia magnética no interior do condutor.
- a energia magnética do condutor por unidade de comprimento.
- o coeficiente de auto-indução interno do condutor por unidade de comprimento. Compare com o resultado do exercício 92.

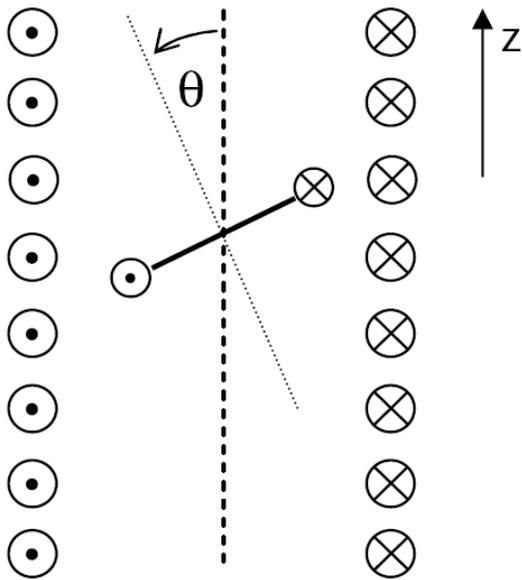
Exercício 99 : Considere um cabo coaxial condutor rectilíneo de comprimento infinito e raios a , b e c , em que o espaço entre os condutores está preenchido com ar. No caso de o cabo ser percorrido por uma corrente I , determine:

- a densidade de energia magnética no espaço entre os condutores.
- a energia magnética por unidade de comprimento, no espaço entre os condutores.
- O coeficiente de auto-indução do cabo, por unidade de comprimento.

Exercício 100 : As bobinas projectadas para campos magnéticos fortes têm problemas mecânicos de construção devido às pressões a que ficam sujeitas. Considere uma bobina de comprimento ℓ e raio r ($\ell \gg r$), com n espiras por unidade de comprimento, núcleo de ar e percorrida por uma corrente I . Determine:

- a densidade de energia magnética armazenada no interior da bobina.
- a energia magnética armazenada na bobina.
- o coeficiente de auto-indução do solenóide, a partir da energia magnética.
- qualitativamente se a bobine fica sujeita a uma força de implosão ou de explosão.
- a pressão sobre os enrolamentos em função do campo magnético, B .

Exercício 101 : Uma bobina de N espiras colocada na vertical, tem um comprimento ℓ e um raio a ($\ell \gg a$) e é percorrida por uma corrente estacionária I_1 . No seu interior é colocada uma espira de raio $b < a$ cujo eixo faz um ângulo θ com o eixo da bobina.



- Determine o coeficiente de auto-indução (L) da bobina.
- Determine o coeficiente de indução mútua (M) do sistema.
- Desprezando a auto-indução da espira, determine a expressão da energia magnética do sistema quando a espira também percorrida por uma corrente estacionária I_2 com o mesmo sentido de I_1 .
- Determine o momento da força que actua a espira. Identifique o ponto de equilíbrio estável.
Nota: Recorde que a derivada de uma energia em ordem a um ângulo não é uma força mas sim o momento de uma força.

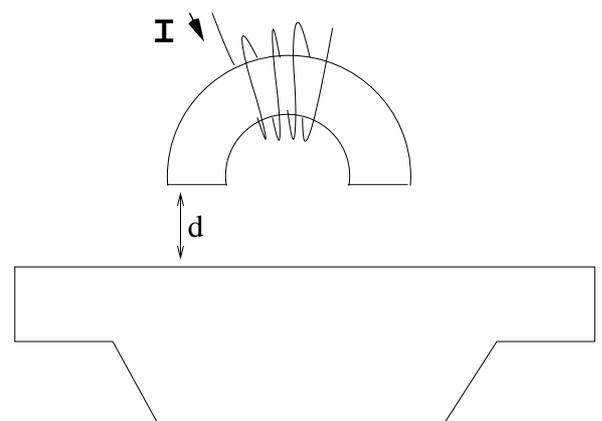
Exercício 102 : Considere duas espiras circulares paralelas e alinhadas coaxialmente com raios a e b cujos planos estão distanciados de z , a serem percorridas por correntes eléctricas I_a e I_b . Admitindo que uma das espiras é muito mais pequena que a outra ($a \ll b$) e que a distância a que se encontram seja grande quando comparada com os seus raios ($z \gg a, b$), determine:

- o coeficiente de indução mútua do sistema em função dos sentidos das correntes.
- designando os coeficientes de auto-indução das espiras por L_a e L_b , a energia magnética do sistema.
- a força existente entre as espiras em função dos sentidos das correntes; utilize o resultado para discutir qualitativamente as forças entre ímanes.

Exercício 103 : Considere um enrolamento de comprimento ℓ , raio R_2 ($\ell \gg R_2$) e densidade de espiras n , percorrido por uma corrente I_2 . No seu interior, colocado coaxialmente existe um segundo enrolamento de comprimento ℓ , raio R_1 , a mesma densidade de espiras n e percorrido por uma corrente I_1 que tem o mesmo sentido de I_2 . Este segundo enrolamento possui um núcleo de material ferromagnético, que nas condições de funcionalidade descritas, tem uma permeabilidade magnética μ .

- Determine o campo magnético existente no várias regiões interiores aos enrolamentos: $r > R_2$, $R_1 < r < R_2$ e $r < R_1$.
- Determine os coeficientes de auto-indução dos dois enrolamentos e o coeficiente de indução mútua do sistema composto pelos dois enrolamentos.
- Determine a energia magnética do sistema.
- Determine a pressão aplicada sobre cada um dos enrolamentos.

Exercício 104 : Um electroímã é constituído por um enrolamento de espiras em torno de um núcleo ferromagnético com a forma indicada na figura e cuja secção $S = 400 \text{ cm}^2$. Admitindo que a distância entre o objecto a elevar e o núcleo ferromagnético seja pequena, pode-se considerar uniforme o campo magnético existente nessa região e de valor $B = 1 \text{ T}$. Determine:

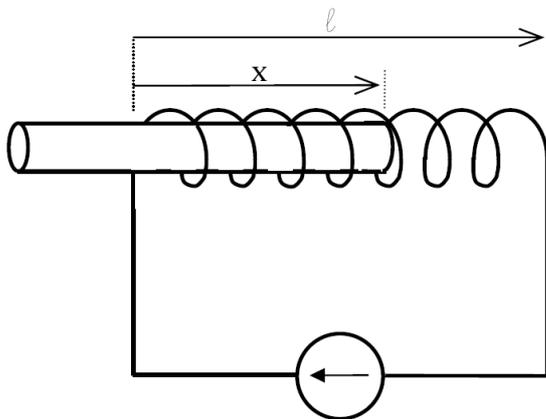


- a energia magnética existente no espaço entre o núcleo ferromagnético e o objecto que se pretende elevar, em função da distância (x) que separa o electroímã do objecto.
- a força exercida pelo electroímã sobre o objecto a elevar.

Exercício 105 : Considere uma bobina de raio R , comprimento $\ell \gg R$ e densidade de espiras n , preenchida com ar. Determine:

- a) o campo magnético (\mathbf{B}) no interior da bobina se esta for percorrida por uma corrente I .

Suponha agora que parte da bobina está parcialmente preenchida com um núcleo de material ferromagnético de raio R e permeabilidade magnética μ (como um "relais"). Determine:



- b) o coeficiente de auto-indução da bobina
Nota: para efeitos de cálculo, considere como válida a aproximação da bobina infinita quer do lado do material ferromagnético quer do lado do ar.
- c) a potência média fornecida pela fonte ao sistema para estabelecer a corrente no circuito (partindo da situação $I = 0$) num intervalo de tempo Δt . Despreze as resistências dos condutores.
- d) a força a que fica sujeito o núcleo ferromagnético após se ter estabelecido a corrente I .

5.2 Exercícios Resolvidos

Resolução do exercício 87

a)

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt}(BA) = -A \frac{dB}{dt} = -\ell^2 \frac{dB_0 t}{dt} = -\ell^2 B_0$$

Notese que esta força electromotriz só existe durante 1s. Como utilizámos uma normal com o sentido de \vec{B} e obtivemos uma força electromotriz com um valor negativo, a corrente tem o sentido contrário ao que nos daria a regra da mão direita em relação à normal, ou seja, tem o sentido antihorário \odot .

b) Como os quatro lados da espira têm igual resistência cada lado terá um quarto da força electromotriz induzida total. O voltímetro V_A está a medir a diferença de potencial num dos lados por isso:

$$V_A = \frac{\varepsilon}{4} = 5 \mu V \iff \frac{B_0 \ell^2}{4} = 5 \times 10^{-6} \iff B_0 = \frac{4 \times 5 \times 10^{-6}}{10^{-4}} = 0,2 T$$

c) Há duas maneira de analisar o circuito do voltímetro V_B : $V_B A D V_B$ ou $V_B A B C D V_B$. A primeira maneira é mais difícil de analisar pois, para além da força electromotriz da espira, temos a força electromotriz induzida no próprio circuito do voltímetro. A segunda maneira é bastante simples pois ficamos com um circuito sem indução. Nesse circuito verificamos facilmente que a queda de tensão medida pelo voltímetro é a queda de tensão em três lados da espira, com um sentido contrário à do lado AD :

$$V_B = -\frac{3}{4}\varepsilon = -3 \times 5 \mu V = -15 \mu V$$

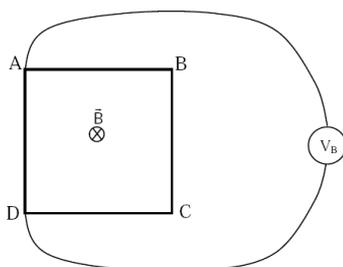


Figura 87.1

Resolução do exercício 90

a) Se a barra cai com velocidade constante (assumese que existe uma força externa que permite verificar esta condição) o fluxo do campo magnético no circuito é dado por (assumindo uma normal com a mesma direcção do campo):

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int B dS = B \int dS = B\ell(y_0 + v_0 t)$$

Como a única diferença de potencial no circuito é a força electromotriz induzida ($V = 0$),

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Blv_0}{R}$$

O sinal negativo indicamos que, tendo-se escolhido uma normal de acordo com uma corrente de sentido horário (\odot), a corrente no circuito tem um sentido antihorário (\ominus).

- b) Se não existir corrente no circuito, não existirá também qualquer força magnética sobre a barra pelo que esta cairá em queda livre. Mas como existirá força electromotriz induzida devida ao aumento da área do circuito, a fonte de tensão terá que criar uma diferença de potencial que anule a tensão total. A posição da barra em função do tempo será,

$$y = y_0 + \frac{1}{2}gt^2$$

o fluxo através do circuito será (escolhendo novamente uma normal paralela ao campo magnético)

$$\Phi = Bl \left(y_0 + \frac{1}{2}gt^2 \right)$$

E a força electromotriz induzida será,

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \left[Bl \left(y_0 + \frac{1}{2}gt^2 \right) \right] = -Blgt$$

Isto significa então que a fonte de tensão variável terá que variar linearmente no tempo, de acordo com a expressão anterior mas com uma polaridade que criaria uma corrente com sentido horário (\odot).

- c) Neste caso a corrente criada pela fonte tem que originar uma força magnética na barra que contrarie a força gravítica. A força criada pelo campo sobre um elemento de corrente da barra se esta for percorrida por uma corrente I será,

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$$

É fácil verificar que para termos uma força vertical para cima que equilibre o peso necessitamos de uma corrente com sentido antihorário e neste caso,

$$\vec{F} = \int Id\vec{\ell} \times \vec{B} = \int_0^{\ell} IBd\ell(-\vec{u}_y) = -IB\ell\vec{u}_y = -mg\vec{u}_y$$

$$I = \frac{V}{R} = \frac{mg}{Bl} \iff V = R \frac{mg}{Bl}$$

Ou seja, a fonte terá um valor constante e criará uma corrente com sentido antihorário (\ominus).

- d) Movimento retardado até parar. A corrente na barra será a soma de duas correntes antihorárias: a da alínea c), que contrariará sempre a força gravítica; uma corrente antihorária devido à indução, tal como na alínea a) que criará uma força adicional para cima. Esta força adicional fará a barra parar, uma vez que, ao contrário à alínea a), não existe a força exterior que garante a velocidade constante da barra. Quando a barra parar esta segunda corrente desaparece, desaparecendo com ela a força exterior e a barra ficará suspensa.

Resolução do exercício 95

- a) Os dois enrolamentos estão ligados por um núcleo de material ferromagnético que, como sabemos, conduz as linhas de campo. Deste modo, e tendo o núcleo uma forma circular, as linhas de campo vão ser circunferências. Da observação da figura verificase que ambos os enrolamentos criam um campo com a mesma direcção: linhas de campo com sentido horário. Vamos então aplicar a lei de Ampère a uma linha de campo genérica de raio r , circulando em sentido horário e verificando que todas as espiras dos dois enrolamentos atravessam a superfície que se apoia em qualquer linha de campo:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum I \iff B2\pi r = \mu(N_1I_1 + N_2I_2) \implies \vec{B} = \mu \frac{N_1I_1 + N_2I_2}{2\pi r} (-\vec{u}_\theta)$$

b)

$$M = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_{S_2} \mu \frac{N_1 I_1}{2\pi r} (-\vec{u}_\theta) (-\vec{u}_\theta) dS = \left(\int_{S_2 \text{ (espiras)}} \mu \frac{N_1 I_1}{2\pi r} dS \right) N_2$$

$$= \mu \frac{N_1 N_2 I_1}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^h dz = \mu \frac{N_1 N_2 I_1}{2\pi} h \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

c)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -N_{\text{espiras}} \frac{d\Phi_{\text{espiras}}}{dt}$$

$$\varepsilon_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Em que Φ é o fluxo que atravessa a secção do núcleo, ou seja, o fluxo que atravessa cada espira dos dois enrolamentos.

Resolução do exercício 105

a) Na aproximação da bobina infinita, as linhas de campo magnético são paralelas ao eixo da bobina e o campo é nulo no seu exterior. Nesse caso aplicase a lei de Ampère com um caminho fechado que coincide com uma linha de campo ao longo de um troço L , que tem dois lados perpendiculares às linhas de campo que saem para fora da bobina e que se fecha do lado de fora da bobina. A corrente que atravessa a superfície que se apoia no caminho assim definido depende do número de espiras que atravessa essa superfície (nL) e da corrente que cada espira transporta, I :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I \iff BL = \mu_0 nLI \implies B = \mu_0 nI$$

se considerarmos, por exemplo a bobina da figura que se segue, com os enrolamentos como são mostrados,

$$\vec{B} = \mu_0 nI \vec{u}_x$$

b) Utilizemos a lei de Ampère generalizada. Se podermos considerar os dois lados da bobina como uma bobina infinita, o campo tem a expressão da alínea anterior com a diferença de que no material ferromagnético em vez de μ_0 tem-se μ .

$$L = \frac{\Phi}{I}, \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$\Phi_1 = \int \vec{B}_1 \cdot \vec{n} dS = \int B_1 dS = \int \mu n I ds = \mu n I \pi R^2 \times (\text{n}^\circ \text{ de espiras}) = \mu n^2 I \pi R^2 x$$

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_2 \cdot \vec{n} dS = \int B_2 dS = \int \mu_0 n I ds = \mu_0 n I \pi R^2 \times (\text{n}^\circ \text{ de espiras}) = \mu_0 n^2 I \pi R^2 (\ell - x)$$

$$L = n^2 \pi R^2 [\mu_0 (\ell - x) + \mu x]$$

c) A posição do núcleo de ferro só pode variar segundo xx :

$$F_x = + \frac{dW_m}{dx} \Big|_{I=cte} = \frac{1}{2} n^2 \pi R^2 I^2 (\mu - \mu_0)$$

Nota: quando $\mu \rightarrow \mu_0$, $F_x \rightarrow 0$

5.3 Soluções

86. $I = \frac{B_0}{R} A \alpha e^{-at}$
88. a) $\Phi = B \ell^2 \cos(\omega t)$, com $\omega = 200\pi$
 b) $I = 1,3 \text{ sen}(\omega t)$
 c) $E = 3,8 \text{ mV}$
89. a) $I = \frac{B d v_0}{R}$, sentido \odot .
 b) $P = \frac{(B d v_0)^2}{R}$
 c) $\vec{F} = \frac{B^2 d^2 v_0}{R} (-\vec{u}_x)$
 d) $P = \frac{(B d v_0)^2}{R}$
91. a) $\epsilon = 3,6 \text{ mV}$
 b) $I = 171 \text{ A}$
 c) $I = 72 \text{ A}$; não.
92. a) $B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{r}$
 b) $\Phi = N \frac{\mu}{2\pi} I d \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$
 c) $\epsilon = 9,6 \text{ sen}(100\pi t) \text{ V}$
93. $L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d-R}{R}\right) = 0,9 \text{ mH.m}^{-1}$
94. a) $L = \mu_0 n^2 \ell \left(\frac{D}{2}\right)^2$
 b) $\epsilon = \mu_0 n \omega I_0 \text{ sen}(\omega t) \pi r^2$
 c) $E = \frac{\epsilon}{2\pi r}$
96. a) $M = \mu n \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$
 b) $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{M}{L} I_0 \omega \text{ sen}(\omega t)$
97. a) $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \pi R_1^2$
 b) $i_2(t) = \frac{M a I_0}{R - aL} (e^{-at} - e^{-R/L})$
98. a) $u_m = \frac{\mu_0}{8} \left(\frac{I r}{\pi a^2}\right)^2$
 b) $W_m = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2$
 c) $L' = \frac{\mu_0}{8\pi}$
99. a) $u_m = \frac{\mu_0}{8} \left(\frac{I}{\pi r}\right)^2$
 b) $W_m = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
 c) $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
100. a) $u_m = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2$
 b) $W_m = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \pi r^2 \ell$
 c) $L = \mu_0 n^2 \ell \pi r^2$
 d) explosão.
 e) $P = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2$
101. a) $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2$
 b) $L = \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi b^2 \cos(\theta)$
 c) $W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 I_1^2 + \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi b^2 \cos(\theta) I_1 I_2$
 d) $N = -\mu_0 \frac{N}{\ell} \pi b^2 \text{ sen}(\theta) I_1 I_2$;
 o sinal negativo significa que q diminui, ou seja, a espira roda em sentido horário; Os pontos de equilíbrio são $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ mas apenas $\theta = 0$ é estável.
102. a) $M = \frac{\mu_0}{2z^3} \pi a^2 b^2$
 b) $W_m = \frac{1}{2} L_a I_a^2 + \frac{1}{2} L_b I_b^2 + M I_a I_b$
 c) $F_z = \frac{3}{2} I_a I_b \frac{\mu_0}{z^4} \pi (ab)^2$
 atractiva se as correntes tiverem o mesmo sentido e repulsiva se as correntes tiverem sentidos diferentes.
103. a) $B = \mu n (I_1 + I_2)$ ($r < R_1$)
 $B = \mu_0 n I_2$ ($R_1 < r < R_2$)
 $B = 0$ ($r > R_2$)
 b) $L_2 = \mu \pi R_1^2 n^2 \ell + \mu_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) n^2 \ell$
 $M = L_1 = \mu \pi R_1^2 n^2 \ell$
 c) $W_m = \frac{1}{2} \mu \pi R_1^2 n^2 \ell (I_1 + I_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) n^2 \ell I_2^2$
 d) $P_1 = \frac{1}{2} [\mu n^2 (I_1 + I_2)^2 - \mu_0 n^2 I_2^2]$
 $P_2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_2^2$
104. a) $W_m = 3,2 \times 10^4 \text{ J}$
 b) $F_x = -3,2 \times 10^4 \text{ N}$
 3,2 toneladas para cima.

Capítulo 6

Circuitos Eléctricos

6.1 Exercícios Propostos

Exercício 106 : Considere um circuito RC com uma fonte de tensão constante V_f . No instante inicial o condensador encontrase descarregado.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a carga no condensador, $q(t)$, a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão no condensador, $V_C(t)$, e a tensão na resistência, $V_R(t)$.
- Encontre as equações que descrevem $q(t)$, $i(t)$, $V_C(t)$ e $V_R(t)$.
Sugestão: experimente soluções do tipo $a+be^{at}$.
- Determine a expressão da energia fornecida pela fonte ao circuito durante a carga do condensador.
- Determine as expressões da energia dissipada por efeito de Joule na resistência durante a carga do condensador e da energia armazenada no condensador após este se encontrar carregado.
Nota: o resultado não depende do valor da resistência utilizada e que a energia fornecida pela fonte se reparte em partes iguais pelo condensador e pela resistência!
- Sabendo que a tensão da fonte é $V_f = 9$ V, que a capacidade do condensador é $1 \mu\text{F}$ e que a resistência é $R = 100 \Omega$, esboce os gráficos de $q(t)$, $i(t)$, $V_C(t)$ e $V_R(t)$.
- Quanto tempo demora o condensador a atingir uma fracção $q/q_0 = 0,9$ da sua carga final?

Exercício 107 : Considere um circuito RC em que o condensador se descarrega através da resistência. No instante inicial o condensador tem uma carga $q(0) = q_0$.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a carga no condensador, $q(t)$, a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão no condensador, $V_C(t)$ e a tensão na resistência, $V_R(t)$.
- Encontre as equações que descrevem $q(t)$, $i(t)$, $V_C(t)$ e $V_R(t)$.
Sugestão: experimente soluções do tipo $a + be^{at}$.
- Determine a expressão da energia dissipada por efeito de Joule na resistência durante a descarga do condensador.
- Sabendo que a capacidade do condensador é $C = 10 \mu\text{F}$ e que a resistência é $R = 1 \text{K}\Omega$, esboce os gráficos de $q(t)$, $i(t)$, $V_C(t)$ e $V_R(t)$.

Exercício 108 : Considere um circuito RL com uma fonte de tensão constante V_f . No instante inicial a corrente no circuito é $i(0) = 0$.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão na indutância, $V_L(t)$ e a tensão na resistência, $V_R(t)$.
- Encontre as equações que descrevem $i(t)$, $V_L(t)$ e $V_R(t)$.
Sugestão: experimente soluções do tipo $a + be^{at}$.
- Determine a expressão da energia fornecida pela fonte ao circuito durante o período de estabelecimento da corrente no circuito ("carga" da indutância).
- Determine as expressões da energia dissipada por efeito de Joule na resistência durante o período de estabelecimento da corrente no circuito e da energia armazenada na indutância.
- Sabendo que a tensão da fonte é $V_f = 9$ V, que a indutância é $L = 1$ mH e que a resistência é $R = 100 \Omega$, esboce os gráficos de $i(t)$, $V_L(t)$ e $V_R(t)$.
- Quanto tempo demora o circuito a atingir uma fracção $i/i_0 = 0,9$ da sua corrente final?

Exercício 109 : Considere um circuito RL onde uma fonte estabelece uma corrente i_0 sendo de seguida retirada a fonte.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão na indutância, $V_L(t)$ e a tensão na resistência, $V_R(t)$.
- Encontre as equações que descrevem $i(t)$, $V_L(t)$ e $V_R(t)$.
Sugestão: experimente soluções do tipo $a + be^{at}$.
- Determine a expressão da energia dissipada por efeito de Joule na resistência até a corrente cessar no circuito.
- Sabendo que a indutância é $L = 10$ mH e que a resistência é $R = 100 \Omega$, esboce os gráficos de $i(t)$, $V_L(t)$ e $V_R(t)$.

Exercício 110 : Considere um circuito LC em que no instante inicial o condensador está carregado com uma carga $q(0)=q_0$ e a corrente no circuito é $i(0) = 0$.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a carga do condensador $q(t)$, a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão na indutância, $V_L(t)$ e a tensão no condensador, $V_C(t)$.
- Encontre as equações que descrevem $q(t)$, $i(t)$, $V_L(t)$ e $V_C(t)$.
Sugestão: experimente soluções do tipo $\alpha \text{sen}(\omega t + \beta)$.

- c) Se o valor da capacidade for $C = 10 \mu\text{F}$ e o valor da indutância for $L = 1 \text{ mH}$, qual a frequência de oscilação do circuito?
- d) Determine as expressões da energia armazenada no condensador, U_C , da energia armazenada na indutância, U_L , e da energia total do sistema, $U = U_C + U_L$. Esboce os seus gráficos em função do tempo.

Exercício 111 : Um circuito RLC em que $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ e $C = 1 \mu\text{F}$, encontra-se ligado a uma fonte de tensão sinusoidal $V(t) = V_0 \text{sen}(\omega t)$, sendo $V_0 = 5 \text{ V}$.

- a) Escreva a equação diferencial que descreve a corrente no circuito, $i(t)$.

Sabendo que a solução da equação diferencial encontrada na alínea a) para o regime forçado (após ter desaparecido o regime livre) é

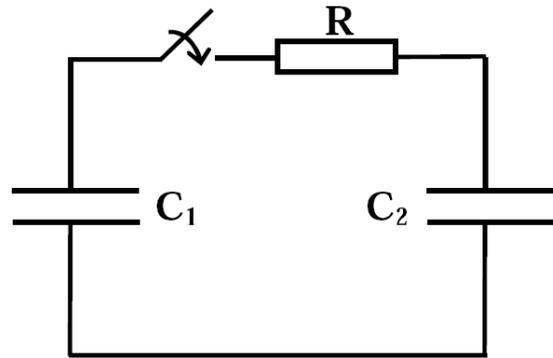
$$I(t) = I_0 \text{sen}(\omega t + \phi) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \text{sen}(\omega t + \phi)$$

com, $\text{tg}(\phi) = \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}$, determine:

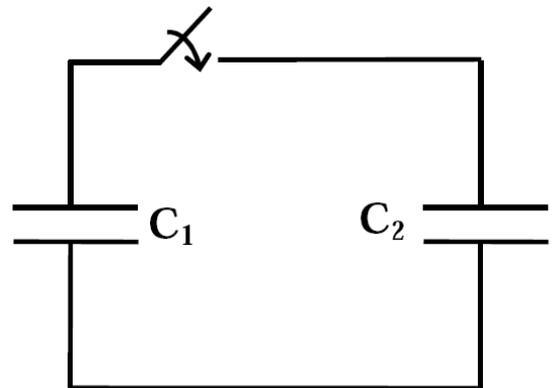
- b) as expressões que descrevem $V_R(t)$, $V_L(t)$ e $V_C(t)$.
- c) a frequência angular da fonte, ω e a frequência f , que tornam máxima amplitude da corrente no circuito? Qual o seu valor nesse caso? Escreva neste caso a expressão da corrente no circuito.
- d) Nas condições da alínea anterior, as expressões da energia armazenada no condensador, U_C e da energia armazenada na indutância, U_L . Verifique que a energia total armazenada no sistema é constante. Esboce os gráficos de U_C , U_L e da energia total.

Exercício 112 : Um circuito que permite sintonizar um receptor de rádio é constituído por uma indutância de 10 mH e por uma capacidade variável. Qual o valor da capacidade quando o circuito está sintonizado para receber uma estação que emite em $1,4 \text{ MHz}$?

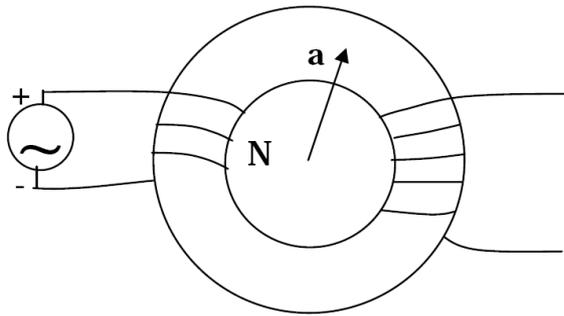
Exercício 113 : Considere o circuito da figura em que $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$ e $R = 100 \Omega$. Inicialmente o interruptor encontra-se aberto, condensador C_1 tem uma tensão de 10 V e o condensador C_2 está descarregado.



- a) Calcule a carga e a energia inicial do condensador C_1 .
- b) Após se ter fechado o interruptor e se ter atingido o regime estacionário:
- b1) Calcule a tensão de cada condensador.
- b2) Calcule a energia dissipada na resistência.
- c) Considere agora o mesmo circuito mas sem resistência (utilizaram-se materiais supercondutores ou a resistência é desprezável). Tendo em conta os resultados da alínea b) e o facto de não haver energia dissipada (não existe resistência), discuta qualitativamente o comportamento do circuito quando se fecha o interruptor.



Exercício 114 : Um transformador (dois enrolamentos com um núcleo de ferro comum, como mostrado na figura) encontra-se ligado à rede eléctrica mas no seu circuito secundário não está ligado qualquer equipamento. O circuito primário do transformador constitui um circuito RL (resistência interna R e indutância L do enrolamento) ligado a uma fonte de tensão alternada ($V(t) = V_0 \text{sen}(\omega t)$) com $V_0 = \sqrt{2} \times 230 \text{ V}$ e frequência $f = 50 \text{ Hz}$.



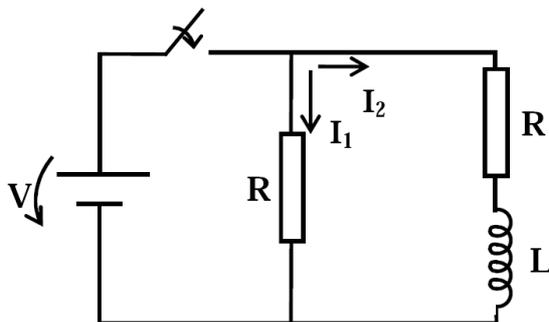
- a) Escreva a equação diferencial que descreve a corrente no circuito primário do transformador.
- b) Verifique que a corrente no circuito primário, no regime forçado, é descrita pela equação

$$i(t) = i_0 \text{sen}(\omega t - \phi)$$

com, $i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$ e $\phi = \text{atan} \left(\frac{\omega L}{R} \right)$.

- c) Sabendo que o núcleo de ferro tem uma secção $S = 1 \text{ cm}^2$ e um raio médio $a = 4 \text{ cm}$, que o ferro tem $\mu = 10^5 \mu_0$ e que circuito primário tem $N = 200$ espiras, calcule um valor aproximado para o coeficiente de autoindução do enrolamento do circuito primário, L , baseado no raio médio do núcleo.
- d) Sabendo que a resistência interna do enrolamento do circuito primário é $R = 0,1 \Omega$, determine a potência média dissipada na resistência. Compare com a potência que seria dissipada na resistência no caso de não haver indução magnética no enrolamento do primário.
- e) Existe força electromotriz aos terminais do enrolamento do circuito secundário?

Exercício 115 : Considere o circuito da figura em que a fonte tem uma tensão de 10 V, a resistência $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, a resistência $R_2 = 1 \Omega$ e a indutância $L = 10 \text{ mH}$. O interruptor encontra-se fechado há muito tempo.



- a) Determine a força electromotriz induzida na bobine e as correntes eléctricas I_1 e I_2 . Justifique a sua resposta.
- b) Num dado instante abrese o interruptor.
 - b1) Escreva a equação diferencial que descreve a tensão na bobine. Marque no circuito as direcções da tensão na bobine e da força electromotriz induzida na bobine.
 - b2) Qual será a energia dissipada por efeito de Joule nas resistências até a corrente que percorre o circuito se anular?

6.2 Exercícios Resolvidos

Resolução do exercício 115

- a) O circuito equivalente do primário do transformador é um circuito RL com fonte pelo que a lei das malhas nos dá:

$$V = V_R + V_L = Ri + L \frac{di}{dt} \iff \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L} \text{sen}(\omega t)$$

- b)

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= i_0 \omega \cos(\omega t - \phi) \\ i_0 \omega \cos(\omega t - \phi) + \frac{R}{L} i_0 \text{sen}(\omega t - \phi) &= \frac{V_0}{L} \text{sen}(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

Desenvolvendo,

$$\text{sen}(\omega t - \phi) = \frac{V_0}{L} [\text{sen}(\omega t - \phi) \cos(\phi) + \cos(\omega t - \phi) \text{sen}(\phi)]$$

e igualando os termos em $\text{sen}(\omega t - \phi)$ e $\cos(\omega t - \phi)$,

$$\frac{R}{L} i_0 \text{sen}(\omega t - \phi) = \frac{V_0}{L} \text{sen}(\omega t - \phi) \cos(\phi) \iff \frac{R}{L} i_0 = \frac{V_0}{L} \cos(\phi) \quad (6.1)$$

$$i_0 \omega \cos(\omega t - \phi) = \frac{V_0}{L} \cos(\omega t - \phi) \text{sen}(\phi) \iff i_0 \omega = \frac{V_0}{L} \text{sen}(\phi) \quad (6.2)$$

Dividindo (6.2) por (6.1),

$$\frac{\omega L}{R} = \tan(\phi) \implies \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

Tendo em conta que,

$$\cos(\phi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e substituindo por exemplo em (6.1), vem:

$$\frac{R}{L} i_0 = \frac{V_0}{L} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \implies i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

- c) Utilizando a lei de Ampère com um caminho fechado que é a linha de campo de raio médio criada pelo enrolamento do circuito primário temos,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum I = NI \implies H = \frac{NI}{2\pi a}$$

sendo I a corrente estacionária no enrolamento utilizada para este cálculo. O fluxo do campo magnético será o fluxo através de uma espira vezes o número de espiras do enrolamento,

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = BNS = \mu \frac{N^2 I}{2\pi a} S$$

E o coeficiente de autoindução é,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{N^2 I}{2\pi a} S = 2$$

[H]

d)

$$P = Ri^2 = R \left(\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \text{sen}(\omega t - \phi) \right)^2$$

Como o valor médio da função $\text{sen}^2(\omega t - \phi)$ no tempo é $1/2$,

$$\bar{P} = \frac{R}{2} \frac{V_0^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = 13$$

mW Se não houvesse indução o circuito apresentaria uma resistência de $0,1 \Omega$ ligada à fonte e,

$$P = \frac{V_0^2}{R} \text{sen}^2(\omega t)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} = 530$$

KW e o circuito não resistiria. *Nota: Para além da dissipação na resistência, mesmo com o secundário desligado, existem ainda perdas devidas às correntes de Eddy/Focault (ver, por exemplo, Popovic pág. 247) e devidas à histerese (ver, por exemplo, Popovic pág. 282)*

e) Sim. Apesar de não haver corrente e, portanto, não existir no núcleo de ferro um campo magnético criado pelo enrolamento secundário, as linhas do campo magnético criado pelo primário atravessam o circuito do secundário induzindo-lhe uma força electromotriz, ou seja, uma tensão aos seus terminais.

6.3 Soluções

106. a) $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{V_f}{R}$
 $\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$
 $\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = \frac{V_f}{RC}$
 $\frac{dV_R}{dt} + \frac{V_R}{RC} = 0$
- b) $q(t) = q_0 (1 - e^{-t/RC})$
 $i(t) = i_0 e^{-t/RC}$
 $V_C(t) = V_f (1 - e^{-t/RC})$
 $V_R(t) = V_f e^{-t/RC}$
- c) $U_f = CV_f^2$
- d) $U_R = \frac{1}{2} CV_f^2$
 $U_C = \frac{1}{2} CV_f^2$
- e) $t = 230 \mu s$
107. a) $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$
 $\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$
 $\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = 0$
 $\frac{dV_R}{dt} + \frac{V_R}{RC} = 0$
- b) $q(t) = q_0 e^{-t/RC}$
 $i(t) = i_0 e^{-t/RC}$
 $V_C(t) = V_{C0} e^{-t/RC}$
 $V_R(t) = V_{C0} e^{-t/RC}$
- d) $U_R = \frac{1}{2} CV_{C0}^2$
108. a) $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{V_f}{L}$
 $\frac{dV_L}{dt} + \frac{R}{L} V_L = 0$
 $\frac{dV_R}{dt} + \frac{R}{L} V_R = \frac{R}{L} V_f$
- b) $i(t) = i_0 (1 - e^{-R/L t})$
 $V_L(t) = V_f e^{-R/L t}$
 $V_R(t) = V_f (1 - e^{-R/L t})$
- c) $U_f = \int_0^\infty V_f i_0 dt - Li_0^2$
- d) $U_L = \frac{1}{2} Li_0^2$
 $U_R = \int_0^\infty V_f i_0 dt - \frac{3}{2} Li_0^2$
- e) $t = 23 \mu s$
109. a) $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0$
 $\frac{dV_L}{dt} + \frac{R}{L} V_L = 0$
 $\frac{dV_R}{dt} + \frac{R}{L} V_R = 0$
- b) $i(t) = i_0 e^{-R/L t}$
 $V_L(t) = Ri_0 e^{-R/L t}$
 $V_R(t) = Ri_0 e^{-R/L t}$
- d) $U_R = \frac{1}{2} Li_0^2$
110. a) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$
 $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$
 $\frac{d^2 V_C}{dt^2} + \frac{V_C}{LC} = 0$
 $\frac{d^2 V_R}{dt^2} + \frac{V_R}{RC} = 0$
- b) $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$
 $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$
 $V_C(t) = V_{C0} \cos(\omega t)$
 $V_L(t) = V_{C0} \cos(\omega t)$
- c) $f = 1,6 \text{ KHz}$
- d) $U_C = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \cos^2(\omega t)$
 $U_L = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \sin^2(\omega t)$
 $U = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} CV_{C0}^2 = U_C = \frac{1}{2} Li_0^2$
111. a) $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{V_0}{L} \omega \cos(\omega t)$
- b) $V_R(t) = RI_0 \sin(\omega t + \phi)$
 $V_L(t) = \omega LI_0 \cos(\omega t + \phi)$
 $V_C(t) = -\frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \phi)$
- c) I_0^{max} quando $\omega^2 LC = 1$
 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3,2 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$
 $f = 5 \text{ KHz}$
 $I_0^{max} = \frac{V_0}{R} = 5 \text{ mA}$
 $I(t) = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t)$
- d) $U_C(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 \cos^2(\omega t)$
 $U_L(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 \sin^2(\omega t)$
 $U = \frac{1}{2} LI_0^2$
112. $C = 1,29 \mu F$
113. a) $Q = 10 \mu C; U_C = 50 \mu J$
- b.1) $V_{C1} = V_{C2} = 5 V$
- b.2) $U_R = 25 \mu J$
- c) O circuito ficará a oscilar com toda a energia em C1 ou em C2.
114. a) $\epsilon = 0; I_1 = 1 \text{ mA}; I_2 = 10 \text{ A}$
- b) $\frac{dV_L}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L} V_L = 0;$
 V_L tem a direcção de cima para baixo na figura mas a força electromotriz tem a direcção de baixo para cima.
- c) $U_R = 0,5 J$

Capítulo 7

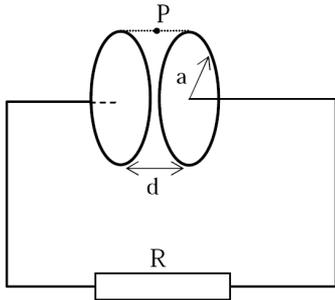
Equações de Maxwell e Ondas Electromagnéticas

7.1 Exercícios Propostos

Exercício 116 : Um condensador plano de placas circulares de raio a , em que as armaduras estão separadas por ar de uma distância $d \ll a$ possui uma carga inicial Q_0 e descarregase através de uma resistência R , de acordo com a expressão:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Considere que é válida a aproximação do condensador de placas infinitas em todo o condensador.



- Determine o campo eléctrico (E_P) no ponto P.
- Determine o campo magnético (B_P) no ponto P.
- Determine o vector de Poynting (\vec{S}) no ponto P e do fluxo do vector de Poynting que atravessa a superfície lateral do condensador.
- Como se relaciona aquele fluxo do vector de Poynting com a potência fornecida pelo condensador à resistência?

Exercício 117 : Um condutor de comprimento ℓ , secção circular de raio a e condutividade σ está ligado a uma fonte de tensão V .

- Determine o vector de Poynting (\vec{S}), junto à superfície do condutor, no seu exterior.
- Determine o fluxo do vector de Poynting através da superfície do condutor e compare com a potência dissipada no condutor por efeito de Joule.

Exercício 118 : Um cabo coaxial com condutores de raios a , b e c , liga uma fonte de tensão V a uma resistência R .

- Determine os campos eléctrico e magnético na região entre os condutores.
- Determine a magnitude e direcção do vector de Poynting.
- Determine o fluxo do vector de Poynting através da secção recta do cabo.

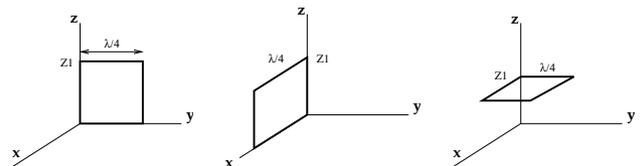
- Calcule a potência dissipada por efeito de Joule na resistência.

Exercício 119 : Uma onda plana monocromática de frequência $f = 50$ MHz viaja no vácuo na direcção dos zz , estando o campo magnético \vec{B} polarizado segundo a direcção xx com uma amplitude B_0 .

- Qual o seu comprimento de onda?
- Qual a direcção de polarização do campo eléctrico?
- Admita que usa uma espira condutora para detectar o campo magnético da onda. Em que plano deve ser colocada a espira para que a eficiência de detecção seja máxima?
- Se a espira, de diâmetro muito menor que o comprimento de onda, tiver uma área A e resistência R , qual a amplitude da corrente induzida?

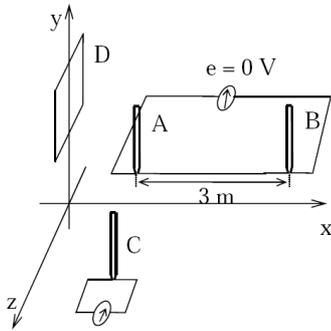
Exercício 120 : Uma onda electromagnética plana, monocromática e sinusoidal propaga-se no vácuo segundo o eixo dos zz e tem um comprimento de onda $\lambda = 500$ nm. O seu campo eléctrico encontra-se polarizado segundo o eixo xx . A amplitude do campo eléctrico é $1 \mu\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$.

- Escreva a expressão do campo eléctrico segundo nas coordenadas x , y e z .
- Calcule o campo magnético.
- Calcule o vector de Poynting.
- Colocaram-se 3 espiras quadradas de lado $\ell/4$ nos planos xy , xz e yz , como indica a figura. Calcule a força electromotriz induzida devido ao campo eléctrico nas três espiras no instante em que o campo é máximo em $z = z_1$.



Exercício 121 : Uma onda electromagnética plana de frequência desconhecida e polarizada linearmente, propaga-se no sentido positivo de eixo xx . Para determinar a sua frequência realizou-se a montagem experimental indicada na figura. Por tentativa e erro, concluiu-se que a força

electromotriz induzida nas espiras A, B e C era máxima quando estas estavam paralelas ao plano xy . Fazendo variar a distância entre as espiras A e B, verificouse que a força electromotriz induzida no circuito a que pertencem era nula quando a distância era **3,0 m**. Ao mesmo tempo, mediuse na espira C, cuja coordenada em x é idêntica à da espira A, uma força electromotriz máxima, que oscilava entre **31,4 nV** e **-31,4 nV**.



- Calcule a frequência da onda electromagnética.
- Sabendo que a área da espira C é **0,01 m²** e admitindo que as espiras são suficientemente estreitas para se poder considerar o campo uniforme no seu interior, obtenha a expressão do campo magnético, \vec{B} .
Sugestão: comece por calcular a força electromotriz induzida no circuito da espira C.
- Obtenha a expressão do campo eléctrico (\vec{E}).
- Calcule o valor médio da potência transportada pela onda através da espira D, que tem a área de **0,05 m²** e é paralela ao plano yz .

Exercício 122 : Se a velocidade da luz fosse infinita e o campo eléctrico fosse caracterizado pela mesma constante, $(1/4\pi\epsilon_0)$, qual seria o valor do campo magnético? Existiriam ímanes? E disquetes ou compact flash drives?

Exercício 123 : Uma onda plana monocromática de frequência $f = 1$ GHz propaga-se no vácuo e é descrita pelo seguinte campo eléctrico:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \\ E_x &= E_0 \cos(\omega t - \kappa z) \\ E_y &= E_0 \sin(\omega t - \kappa z)\end{aligned}$$

Determine:

- O comprimento de onda e o período da onda.

- A direcção de propagação.
- A polarização da onda.
- O campo magnético.
- A densidade de energia transportada pela onda.
- O vector de Poynting.

Exercício 124 : O campo magnético de uma onda electromagnética plana que se propaga num meio com permeabilidade magnética μ_0 é dada por:

$$\begin{aligned}B_x &= 7,5 \times 10^9 \sin(7,5 \times 10^6 t - 3 \times 10^2 y) [T] \\ B_y &= 0 [T] \\ B_z &= -7,5 \times 10^9 \sin(7,5 \times 10^6 t - 3 \times 10^2 y) [T]\end{aligned}$$

- Calcule a velocidade de propagação da onda.
- Qual a constante dieléctrica e o índice de refração do meio?
- Qual a direcção de propagação da onda?
- Descreva o estado de polarização da onda.

Exercício 125 : Uma onda electromagnética plana propaga-se num meio não condutor com permeabilidade magnética μ_0 . O seu campo eléctrico é dado por:

$$\vec{E} = 0,5 \cos [6,5 \times 10^6 t - 3,1 \times 10^{-2} (0,5 \times \sqrt{3} y - 0,5 z)] \vec{u}_x [V.m^{-1}]$$

- Defina a direcção de propagação da onda.
- Qual o índice de refração do meio?
- Determine o campo magnético da onda, B.
- Qual a polarização da onda?
- Determine o vector de Poynting S e a intensidade da onda.

Exercício 126 : Uma fonte de radiação electromagnética radia isotropicamente (todas as direcções são equivalentes) uma potência média de saída de **1000 W**.

- Determine a intensidade de radiação à distância de 10 metros?
- Qual o valor médio da densidade de energia transportada pela onda?
- Relacione os campos eléctrico e magnético existentes a essa distância com a densidade de energia transportada pela onda.

Exercício 127 : Uma onda electromagnética plana e monocromática propagase no ar e incide com um ângulo de 60° numa placa de cristal de área $A = 0,5 \text{ m}^2$, sendo a placa totalmente iluminada pela onda. A densidade média da potência transportada pela onda é de $I = 10^{-4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \text{ W.m}^{-2}$ e o seu campo eléctrico é descrito por:

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_z \vec{u}_z$$

$$E_x = E_0 \cos(\omega t - k y)$$

$$E_z = E_0 \sin(\omega t - k y)$$

- Qual a polarização da onda?
- Quais as equações que descrevem o seu campo magnético \vec{B} ?
- Qual o valor de E_0 ?
- Sabendo que 50% da potência transportada pela onda atravessa a placa, qual a energia que a atravessou ao fim de 1 hora?

7.2 Exercícios Resolvidos

Resolução do exercício 117

- a) Sendo $a \gg d$ pode-se considerar a aproximação do condensador de placas infinitas, ou seja, pode-se considerar o campo eléctrico uniforme dentro do condensador e até à sua superfície lateral. Podemos de seguida usar a lei de Gauss para calcular o campo dentro do condensador, recorrendo a uma superfície cilíndrica de raio a com *tampas* dentro e fora do condensador. A tampa de fora não terá fluxo pois $\vec{E} = \vec{0}$ e as superfícies laterais do cilindro também não terá fluxo pois $\vec{E} \perp \vec{n}$. Ficamos então com,

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \iff \epsilon_0 E \pi a^2 = Q(t) \implies E = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 E \pi a^2}$$

Considerando como positiva a placa da esquerda e a direcção \vec{u}_z como da placa da esquerda para a placa da direita:

$$\vec{E} = \frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\epsilon_0 E \pi a^2} \vec{u}_z$$

- b) Dentro do condensador não há corrente eléctrica mas há corrente de deslocamento. Como as linhas de campo magnético são circunferência em torno do eixo zz (centrado nos eixos das placas do condensador), vamos aplicar a lei de Ampère escolhendo como caminho uma linha de campo que passe no ponto P. Para sentido de circulação vamos escolher o que nos dá a normal com a direcção de \vec{E} :

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\int \vec{E} \cdot \vec{n} dS \right) \iff B 2\pi a = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (E \pi a^2) \\ \implies B &= \frac{\mu_0}{2} \epsilon_0 a \frac{d}{dt} \left(\frac{Q(t)}{\epsilon_0 E \pi a^2} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{dQ}{dt} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

- c)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = E \frac{B}{\mu_0} (-\vec{u}_r)$$

sendo \vec{u}_r um vector que aponta para o eixo das placas do condensador.

$$\vec{S} = \frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\epsilon_0 \pi a^2} \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} (-\vec{u}_r) = \frac{(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}})^2}{2\pi^2 a^3 \epsilon_0 \tau} \vec{u}_r$$

O fluxo através da superfície que envolve o condensador só existe na sua superfície lateral, já que o vector de Poynting é radial. Deste modo, e notando que o valor de S é constante nessa superfície:

$$\Phi_S = \int \vec{S} \cdot \vec{n} dS = \frac{(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}})^2}{2\pi^2 a^3 \epsilon_0 \tau} A = \frac{(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}})^2}{2\pi^2 a^3 \epsilon_0 \tau} 2\pi a d = \frac{(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}})^2}{\pi a^2 \epsilon_0 \tau} d$$

- d) O resultado da alínea anterior diznos que existe uma potência a sair do condensador (fluxo positivo). Isto acontece porque um condensador a descarregar fornece potência ao circuito a que está ligado.

A potência fornecida pelo condensador ao circuito, $P = \vec{V} \cdot \vec{I}$, depende da tensão aos terminais do condensador $V = Ed$ e da corrente eléctrica devido à diminuição da carga nas armaduras do condensador, $I = -\frac{dQ}{dt}$.

$$P = \vec{V} \cdot \vec{I} = -Ed \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\epsilon_0 E \pi a^2} d \frac{d}{dt} (Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}})^2}{\pi a^2 \epsilon_0 \tau} d = \Phi_S$$

Resolução do exercício 120

- a) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^7} = 6 \text{ m}$
- b) $\vec{n} = \vec{u}_E \times \vec{u}_B \iff \vec{u}_z = \vec{u}_E \times \vec{u}_x \implies \vec{u}_E = -\vec{u}_y$
- c) A detecção do campo magnético da onda faz-se através da corrente induzida na espira. Para que o fluxo do campo magnético seja máximo, o plano da espira deve ser perpendicular ao campo, ou seja, deve estar em yz.
- d) Sendo a espira muito pequena em relação ao comprimento de onda (6 m) podemos considerar a amplitude do campo, em cada instante, constante no plano da espira. Assim, sendo o campo magnético, $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x$, vem:

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt} \left(\int \vec{B} \cdot \vec{n} dS \right) = -\frac{d}{dt} (BA) = -A \frac{dB}{dt} = -A\omega B_0 (-\text{sen}(\omega t - kz))$$

$$I_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{R} = \frac{A\omega B_0}{R}$$

Resolução do exercício 122

- a) Do enunciado depreende-se que $\lambda/2 = 3 \text{ m}$ pois assim o campo está em oposição de fase nas espiras A e B e $\varepsilon = 0$. Donde:
 $\lambda = 6 \text{ m}$
 $v = \frac{c}{\lambda} = 5 \times 10^7 \text{ Hz}$
- b) Do enunciado sabe-se que na espira C a força electromotriz induzida é $\varepsilon = 31,4 \times 10^{-9} \text{ sen}(\omega t + \alpha)$.
 $\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$
 $\Phi = \frac{31,4 \times 10^{-9}}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) = \frac{31,4 \times 10^{-9}}{2 \times 31,4 \times 5 \times 10^7} \cos(\omega t + \alpha) = 10^{-16} \cos(\omega t + \alpha)$
 $\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = BA$, uma vez que esta força electromotriz é máxima e portanto o campo é perpendicular à superfície da espira.
 $B = \frac{\Phi}{A} = 10^{-14} \cos(\omega t + \alpha) \text{ [T]}$
Podemos então concluir que: $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta)\vec{u}_B$, com:
 $B_0 = 10^{-14} \text{ T}$
 $\vec{k} \cdot \vec{r} = kx$, pois a onda progaga-se segundo xx.
 $\vec{u}_B = \vec{u}_z$, pois, como já se referiu, a força electromotriz é máxima quando o campo é perpendicular à espira, que está no plano xy.
- c) $\vec{u}_x = \vec{u}_E \times \vec{u}_B \implies \vec{u}_E = \vec{u}_y$ e $E = cB$, pelo que:
 $\vec{E} = cB_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta)\vec{u}_y = 3 \times 10^{-6} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta)\vec{u}_y \text{ V.m}^{-1}$
- d)

$$I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle = \langle S \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x \rangle = \langle EH \rangle = \left\langle E \frac{B}{\mu_0} \right\rangle = \left\langle \frac{E^2}{c\mu_0} \right\rangle$$

$$= \frac{9 \times 10^{-12}}{3 \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) \rangle = \frac{9 \times 10^{-12}}{2 \times 360} = 1,25 \times 10^{-14} \text{ W.m}^{-2}$$

$$\langle P \rangle = 1,25 \times 10^{-14} \times 5 \times 10^{-2} = 6,25 \times 10^{-16} \text{ W}$$

7.3 Soluções

118. a) $\vec{S} = -\frac{\sigma V^2 a}{2\ell^2} \vec{u}_r$
 b) $\Phi_S = \frac{V^2 \sigma \pi a^2}{\ell} = \frac{V^2}{R}$
119. a) $\vec{E} = \frac{V}{R \ln(b/a)} \vec{u}_r$; $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{u}_\theta$
 b) $\vec{S} = \frac{VI}{2\pi R^2 \ln(b/a)} \vec{u}_z$
 c) $\Phi_S = VI$
 d) $P = VI$
121. a) $\vec{E} = 10^{-6} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \text{ V.m}^{-1}$
 $\omega = 12\pi \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$
 $k = 4\pi \times 10^6 \text{ rad.m}^{-1}$
 b) $\vec{B} = 3,3 \times 10^{-15} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \text{ T}$
 c) $\vec{S} = 2,6 \times 10^{-15} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z \text{ W.m}^{-2}$
 d) $yz : \epsilon = 0$; $xz : \epsilon = 0, 125 \text{ pV}$; $xy : \epsilon = 0$.
123. $B = 0$
124. a) $\lambda = 0,3 \text{ m}$; $T = 10^{-9} \text{ s}$.
 b) $\vec{u}_k = \vec{u}_z$
 c) polarização circular direita (\odot)
 d) $\vec{B} = \frac{1}{c} (E_x \vec{u}_y - E_y \vec{u}_x)$
 e) $u = \epsilon_0 E_0^2$
 f) $\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \vec{u}_z$
125. a) $v = 0,83c$
 b) $\epsilon = 1,44\epsilon_0$; $n = 1,2$.
 c) \vec{u}_y
 d) polarização linear no plano xz, fazendo um ângulo de -45° com o eixo xx.
126. a) $\vec{u}_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y - \frac{1}{2} \vec{u}_z$
 b) $n = 1,43$
 c) $B_x = 0$
 $B_y = -\frac{0,5}{2v} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \text{ [T]}$
 $B_z = -\frac{0,5\sqrt{3}}{2v} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \text{ [T]}$
 d) linear
 e) $\vec{S} = \frac{\epsilon}{\mu_0} 0,5^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{u}_k$
 $I \equiv \langle \vec{S} \rangle = \frac{\epsilon}{\mu_0} 0,5^2 \frac{1}{2}$
127. a) $\lambda = 6 \text{ m}$
 b) $-\vec{u}_y$
 c) no plano yz
 d) $I_{max} = \frac{A^2 \pi f B_{max}}{R}$
128. a) $I = \frac{10}{4\pi} \text{ W.m}^{-2}$
 b) $\langle u_T \rangle = \frac{10^{-7}}{12\pi} \text{ J.m}^{-3}$
 c) $\langle E^2 \rangle = \frac{\langle u_T \rangle}{\epsilon}$
129. a) circular esquerda
 b) $\vec{B} = \frac{1}{c} (E_z \vec{u}_x - E_x \vec{u}_z)$
 c) $E_0 = 10^{-2} \text{ V.m}^{-1}$
 d) Energia $= 90 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \text{ mJ}$

Capítulo 8

Óptica

8.1 Exercícios Propostos

Exercício 128 : Uma onda electromagnética monocromática de frequência $f = 10^{14}$ Hz propague-se no ar e entra num material com um índice de refração $n = 2$.

- Qual a velocidade de propagação da onda no material?
- Qual a frequência da onda no material?
- Qual o comprimento de onda no material?

Exercício 129 : Um raio de luz monocromático incide com um ângulo de 30° numa das faces de uma placa de vidro com índice de refração $n = 1,5$ (para esse comprimento de onda).

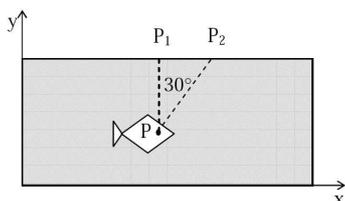
- Qual o ângulo da onda transmitida através do vidro? (faça um esquema)
- O que se alterava se em vez de vidro a luz atravessasse uma placa diamante de índice de refração $2,4$?

Exercício 130 : Um raio de sol (luz branca) incide sobre uma janela de vidro de 4 mm com um ângulo de 45° . Sabendo que o índice de refração do vidro para a cor vermelha é de $1,5885$ e para a cor azul é de $1,5982$, determine a separação espacial das duas cores após o raio atravessar o vidro.

Exercício 131 : Uma onda electromagnética plana monocromática propague-se dentro de um material caracterizado por $\epsilon_r = 1,5$ e $\mu_r = 1$.

- Verifique em que condições de incidência da onda na superfície de separação do material com o ar não existe onda propagada no ar.
- O fenómeno descrito em a) (reflexão total) poder-se-ia verificar se a onda incidisse na superfície de separação dos meios mas propagando-se no ar?

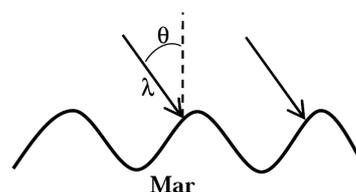
Exercício 132 : Um pescador procura observar na água ($n_{\text{agua}} \gg 1,5$) um peixe, sendo este visível caso a luz nele reflectida atinja os olhos do pescador. Considere que a luz proveniente do ponto P de um peixe (imóvel) está linearmente polarizada, com o seu campo eléctrico no plano xy (ver figura).



- Determine a velocidade da luz na água e escreva uma expressão para o campo eléctrico associado à componente da luz com $\lambda = 500\text{nm}$ da onda que se propaga na direcção do ponto P_2 . Considere que a amplitude do campo eléctrico é E_0 .
- Determine as direcções de propagação da luz transmitida para o ar dos raios luz que incidem na superfície da água nas posições P_1 e P_2 .
- Qual o ângulo de incidência máximo que a luz proveniente do peixe pode ter para que possa ser observada pelo pescador?

Exercício 133 : Uma onda electromagnética plana monocromática e polarizada circularmente desloca-se no ar e incide segundo um dado ângulo de incidência θ_i sobre a superfície plana de um dieléctrico ($\epsilon_r = 2,7$ e $\mu_r = 1$). Determine o ângulo de incidência para o qual a onda reflectida está polarizada linearmente.

Exercício 134 : Um avião de estudos oceanográficos pretende medir o comprimento de onda das ondas do mar enviando um feixe de radar de frequência variável e verificando em que condições se obtêm máximos de interferência.



- Qual o ângulo de incidência do feixe sobre a superfície da água para que o feixe reflectido volte ao ponto de partida? (De outra forma, como poderia o avião detectar o feixe reflectido?!)
- Calcule, em função do comprimento de onda das ondas do mar, λ_{mar} , e do ângulo que o feixe faz nas condições da alínea a) com a vertical do lugar, θ , os comprimentos de onda da radiação do feixe que produzem máximos de interferência no receptor do avião.

- c) Designando por n o índice de refração da água do mar, qual o comprimento de onda do feixe emitido pelo avião que é transmitido para a água? Qual o desvio angular desse feixe na passagem do ar para a água?

Exercício 135 : Duas fendas são iluminadas por uma lâmpada de sódio filtrada ($\lambda = 589$ nm). Num alvo a 1 m de distância formam-se riscas que na zona central do alvo estão distanciadas de 1 cm. Qual a distância entre as fendas?

Exercício 136 : Uma rede de difracção com 6000 linhas por centímetro é iluminada por luz verde de comprimento de onda $\lambda = 500$ nm.

- a) Quantas riscas poderão ser vistas num alvo?
b) Qual a posição angular dessas riscas?

Exercício 137 : Uma rede de difracção com 4000 linhas por centímetro é iluminada com luz branca que contém comprimentos de onda que vão desde o violeta, $\lambda_1 = 400$ nm, ao vermelho, $\lambda_2 = 700$ nm.

- a) Quais as separações angulares dos espectros de 1ª, 2ª e 3ª ordem? Faça um esquema.
b) Que conclui quanto à visibilidade desses espectros?

Exercício 138 : A luz do Sódio é composta por radiação que contém dois comprimentos de onda muito próximos: $\lambda_1 = 589,59$ nm e $\lambda_2 = 589,00$ nm.

- a) Que número mínimo de linhas de uma rede de difracção deverá ser iluminado para se conseguir separar as duas riscas de primeira ordem (critério de Rayleigh)?
b) Este número de riscas iluminadas separava também as riscas de 2ª ordem?
c) Como variava o espectro de riscas da luz do Sódio se se utilizasse uma rede de difracção com o mesmo número de riscas iluminadas mas mais próximas entre si?
d) Como variava o espectro de riscas da luz do Sódio se se utilizasse uma rede de difracção com as riscas à mesma distância entre si mas com mais riscas iluminadas?

Exercício 139 : A luz emitida por uma lâmpada de alto rendimento tem dois comprimentos de onda próximos λ_1 e λ_2 . Ao passar por uma rede de difracção formam-se duas riscas de primeira ordem ($m = 1$) a 1 cm e a

1,1 cm do centro de um alvo. Considerando a aproximação dos pequenos ângulos $\sin\theta \sim \theta$ e $\cos\theta \sim 1$), determine:

- a) a razão entre os comprimentos de onda λ_1 e λ_2 .
b) o número mínimo de fendas iluminadas para que as duas riscas pareçam separadas (critério de Rayleigh)?

Exercício 140 : Numa sala à escuras foi possível observar a figura de difracção, resultante da luz vermelha de um ponteiro de laser que entrava por uma frincha de $6,3 \mu\text{m}$ de largura (invisível a olho nu), projectada numa parede a 1 m de distância da frincha. A largura da mancha luminosa central na parede é 20 cm.

- a) Qual a frequência da luz do laser?
b) Se em vez de passar pela frincha a luz passasse por uma dupla fenda com aberturas distanciadas de $6,3 \mu\text{m}$, a figura de interferência seria igual ou diferente da observada na parede? Justifique.
c) Se, ao entrar na sala, alguém acendesse duas lâmpadas que, por absurdo, estivessem distanciadas de $6,3 \mu\text{m}$, haveria figura de interferência (zonas claras e escuras na sala)? Justifique.

Exercício 141 : Uma fenda com 400 nm de largura é iluminada com luz monocromática de 400 nm de comprimento de onda. O padrão resultante da difracção é projectado num alvo.

- a) Qual a posição angular do primeiro mínimo de difracção? Qual a largura angular do máximo central?
b) Repita a alínea anterior para o caso de a abertura ter 4000 nm.

Exercício 142 : Um cabelo humano é iluminado com uma luz monocromática de comprimento de onda $\lambda = 500$ nm. Num alvo situado a 2 m obtém-se o primeiro mínimo do padrão de interferência a 2 cm do seu centro. Qual a espessura do cabelo?

Exercício 143 : A difracção limita a nitidez das imagens formadas nos instrumentos ópticos e na retina humana. Sabendo que o diâmetro médio da retina do olho durante o dia é 2,5 mm, determine:

- a) a largura angular da imagem de um ponto que emita com a cor laranja ($\lambda = 600$ nm).
b) a separação mínima entre dois pontos situados a 10 m do observador para que este possa obter duas imagens distintas (critério de Rayleigh).

Exercício 144 : A distância entre planos atômicos adjacentes na Calcite ($CaCO_3$ cristalizado) é $d = 3 \times 10^{10}$ m. Se um feixe de raios X de comprimento de onda igual a $0,3 \times 10^{10}$ m incidir sobre o cristal, qual o ângulo mínimo de incidência em relação aos planos do cristal para o qual existe interferência construtiva?

Exercício 145 : Uma mancha de óleo no chão da rua tem uma espessura $d = 0,5 \mu\text{m}$. Qual o ângulo mínimo entre um transeunte e a luz solar para que este veja uma mancha verde ($\lambda = 500 \text{ nm}$)?

8.2 Exercícios Resolvidos

Resolução do exercício 136

- a) O feixe tem que incidir perpendicularmente à superfície da água para que volte para trás com a mesma direcção, para o avião que o enviou.
- b) Para existir interferência construtiva entre o feixe reflectido em duas ondas, a diferença de percurso tem que ser um múltiplo inteiro de comprimentos de onda. Convém notar também que as condições de perpendicularidade entre o feixe e a superfície da água se repetem a cada comprimento de onda do mar. Assim, a diferença de percurso é duas vezes a distância d marcada na figura, ou seja, $2\lambda_{mar} \text{sen}\theta = m\lambda \implies \lambda = \frac{2\lambda_{mar} \text{sen}\theta}{m}$
- c) $\lambda' = \frac{v}{f} = \frac{c}{nf} = \frac{\lambda}{n}$
 O ângulo de transmissão é calculável a partir da lei de SnellDescartes. Como neste caso a incidência é normal, a transmissão também o é, ou seja, não há qualquer desvio angular.

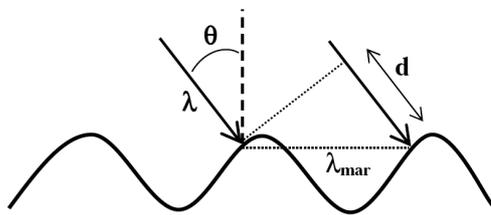


Figura 136.1

Resolução do exercício 142

- a) Se a largura da mancha central é 20 cm, a posição dos primeiros mínimos de difracção é 10 cm para cada lado do centro. A posição angular do primeiro mínimo é então $\arctg(0,1)$, que é um ângulo suficientemente pequeno para se poder fazer a aproximação
- $$\lambda = a \text{sen}\theta_{min} = 6,3 \times 10^{-6} \times 0,1 = 630 \text{nm}$$
- $$\lambda = \frac{c}{f} \implies f = \frac{3 \times 10^8}{630 \times 10^{-9}} = 4,76 \times 10^{14} \text{ Hz}$$
- b) A expressão da posição angular dos mínimos da figura de difracção é igual à da posição angular dos máximos da figura de interferência pelo que as figuras são diferentes: apesar da posição do máximo central ser igual, a sua largura não o é e todos os mínimos da difracção vão coincidir com os máximos da interferência.
- c) Não pois as duas lâmpadas não são coerentes: a sua fase varia aleatoriamente e independentemente uma da outra.

8.3 Soluções

130. a) $1,5 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
 b) 10^{14} Hz
 c) $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$
131. a) 30°
 b) Saía com o mesmo ângulo mas mais perto do ponto de incidência.
132. $d = 14,8 \mu\text{m}$
133. a) $\theta_i = 54,7^\circ$
 b) não
134. a) $\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$
 $E_x = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \cos(8\pi \times 10^{14} t - 4\pi \times 10^6 (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y))$
 $E_y = -\frac{1}{2} E_0 \cos(8\pi \times 10^{14} t - 4\pi \times 10^6 (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y))$
 b) $\vec{n}_{ar1} = \vec{u}_y$
 $\vec{n}_{ar2} = 0,75\vec{u}_x + 0,66\vec{u}_y$
 c) $\theta_{max} = 41,8^\circ$
135. $58,7^\circ$
137. $d = 58,9 \mu\text{m}$
138. a) 7 riscas.
 b) $\theta = 0; \theta = \pm 17^\circ; \theta = \pm 37^\circ; \theta = \pm 64^\circ;$
139. a) $m = 1; \theta_1 = 9^\circ; \theta_2 = 16^\circ;$
 $m = 2; \theta_1' = 19^\circ; \theta_2' = 34^\circ;$
 $m = 3; \theta_1' = 29^\circ; \theta_2' = 57^\circ;$
 b) Os espectros de 2ª e 3ª ordem estão sobrepostos.
140. a) 1000
 b) Sim, pois bastam 500 riscas iluminadas para separar.
 c) Obtinham-se riscas mais separadas.
 d) Obtinham-se riscas mais finas.
141. a) $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1,1$
 b) $N = 10$
143. a) $\theta = 90^\circ$. Todo o alvo está iluminado: $\Delta\theta = 180^\circ$
 b) $\theta = 5,7^\circ; \Delta\theta = 1,5^\circ$
144. $50 \mu\text{m}$
145. a) $\theta = 49,5^\circ$
 b) $2,4 \text{ mm}$
146. $\theta = 2,9^\circ$
147. 120°